

Τα βιβλία των Εκδόσεων Πουκαμισάς συμπυκνώνουν την πολύχρονη διδακτική εμπειρία των συγγραφέων μας και αποτελούν το βασικό εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιούν οι μαθητές των φροντιστηρίων μας. Μέσα από τη διαρκή τους αξιοποίηση στις τάξεις μας διασφαλίζουμε τον εμπλουτισμό τους, τη συνεχή τους βελτίωση και την επιστημονική τους αρτιότητα, καθιστώντας τα βιβλία των Εκδόσεών μας εγγύηση για την επιτυχία των μαθητών.



εκδόσεις

πουκαμισάς

τα **βιβλία** των **επιτυχιών**

Κώστας Λεμάνης

Μαθηματικά

Γ' Γυμνασίου



εκδόσεις

ΠΟΥΚΑΜΙΣΣ

*Σ' αυτούς που μου χάρισαν απλόχερα την πνοή τους,
στη Ρίτσα, στον Σπύρο, στον Άγγελο,
στις μαθήτριες, στους μαθητές,
στους φίλους, στους συναδέλφους*

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο Μαθηματικά της Γ' Γυμνασίου είναι αποτέλεσμα πολύχρονης εμπειρίας στην εκπαίδευση χωρίς όμως να χάνει στιγμή τον προσανατολισμό του από τις σύγχρονες παιδαγωγικές αρχές και διδακτικές ανάγκες των μαθηματικών.

Με το πόνημα αυτό σκοπός μας είναι αφενός να βοηθήσουμε τον μαθητή να κατανοήσει και να εμπεδώσει το γνωστικό αντικείμενο και αφετέρου να στηρίξουμε τον συνάδελφο καθηγητή στην επεξεργασία και στη μετάδοση της διδακτέας ύλης ενός μαθήματος τόσο βασικού και πολλές φορές τόσο παρεξηγημένου και δυσνόητου.

Το βιβλίο ακολουθεί, εν πολλοίς, τη δομή του σχολικού εγχειριδίου και αποτελείται από οκτώ κεφάλαια καλύπτοντας έτσι μεθοδικά την ύλη της:

- Άλγεβρας (κεφάλαιο 1 έως 6)
- Ευκλείδειας Γεωμετρίας (κεφάλαιο 7)
- Τριγωνομετρίας (κεφάλαιο 8)

Τα κεφάλαια είναι χωρισμένα σε επιμέρους ενότητες, οι οποίες περιλαμβάνουν τη σχετική κάθε φορά θεωρία σε σύντομες υποενότητες, με σαφείς και λιτούς ορισμούς, ευκρινή σχήματα, πληροφορίες για μεγάλους μαθηματικούς της ιστορίας της επιστήμης, σημειώσεις και παρατηρήσεις όπου απαιτείται η επικέντρωση της προσοχής του μαθητή, και φυσικά πλήθος από παραδείγματα και εφαρμογές με τις λύσεις τους.

Εδώ πρέπει να αναφερθούμε στη συστηματική μας προσπάθεια τα παραδείγματα και πολλές ασκήσεις να προσεγγίζονται βιωματικά θέλοντας να παραπέμψουμε τους μαθητές στην καθημερινή τους εμπειρία, έτσι ώστε να τους «αποδείξουμε» ότι τα μαθηματικά, εκτός από «μάθημα», είναι ένα μονοπάτι που οδηγεί στην ορθή και δομημένη σκέψη.

Στο τέλος κάθε ενότητας, ο αναγνώστης θα βρει ερωτήσεις κατανόησης της ύλης που έχει προηγηθεί και ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας που στοχεύουν στη βελτίωση του επιπέδου αντίληψης και δεξιότητας στη λύση προβλημάτων, ενώ στο τέλος κάθε κεφαλαίου οι ασκήσεις επανάληψης ανακεφαλαιώνουν ό,τι έχει ήδη κατακτηθεί.

Στο τελευταίο τμήμα του βιβλίου έχουν ενσωματωθεί:

- Πληροφορίες για τον αριθμό π και για το ακτίνιο (rad).
- Χρήσιμοι πίνακες: (α) των τριγωνομετρικών αριθμών, (β) των βασικών σχημάτων με τους τύπους των περιμέτρων-μηκών (L), των εμβαδών (E) και των όγκων (V) τους.
- Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης και οι λύσεις των ασκήσεων του βιβλίου αυτού, καθώς και του σχολικού βιβλίου.

Θερμά ευχαριστώ τη Μαλβίνα, τη Χαρά, τον Απόστολο, και ιδιαίτερα τη συνάδελφο Μαρία Λαφαζάνογλου για την πολύτιμη βοήθειά της.

Ο συγγραφέας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Τα σύνολα των αριθμών	13	1.6 Οι δυνάμεις των πραγματικών αριθμών	33
1.2 Συστήματα αρίθμησης	18	1.7 Η τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού πραγματικού αριθμού	42
1.3 Είδη-Κατηγορίες πραγματικών αριθμών	20	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	
1.4 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού	20	1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	50
1.5 Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς	22		

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2.1 Αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις	55	2.8 Πολυνώνυμα – Διαίρεση πολυωνύμων	118
2.2 Τα μονώνυμα	58	2.9 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων	125
2.3 Οι πράξεις μεταξύ μονωνύμων	64	2.10 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις	129
2.4 Πολυνώνυμα – Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων	70	2.11 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών παραστάσεων	134
2.5 Πολυνώνυμα – Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων	83	2.12 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών παραστάσεων	139
2.6 Αξιοσημείωτες ταυτότητες	90	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	
2.7 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων	106	2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	144

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 Η εξίσωση 1ου βαθμού $ax + b = 0$	151	3.5 Επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού	181
3.2 Η εξίσωση 2ου βαθμού $ax^2 + bx + c = 0$, με $a \neq 0$, και η λύση της με παραγοντοποίηση	156	3.6 Οι κλασματικές (ρητές) εξισώσεις	188
3.3 Λύση και διερεύνηση της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, με τη βοήθεια τύπων	162	3.7 Η διάταξη των πραγματικών αριθμών – Ανισότητες	198
3.4 Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, με τη χρήση των ριζών του	175	3.8 Ανισώσεις 1ου βαθμού με έναν άγνωστο ...	209
		ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	
		3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	215

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ

4.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης	221	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	
4.2 Το γραμμικό σύστημα και η γραφική επίλυσή του	229	4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	249
4.3 Η αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος	237		

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1 Η συνάρτηση με τύπο $y = ax^2$, με $a \neq 0$	255	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	
5.2 Η συνάρτηση-τριώνυμο 2ου βαθμού με τύπο $y = ax^2 + bx + \gamma$, με $a \neq 0$	269	5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	282

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

6.1 Τα μαθηματικά σύνολα	287	6.3 Η έννοια της πιθανότητας	311
6.2 Πείραμα τύχης – Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα	302	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	
		6ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	320

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

7.1 Η ισότητα των τριγώνων	327	7.6 Όμοια τρίγωνα	381
7.2 Ο λόγος των ευθυγράμμων τμημάτων	349	7.7 Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων	387
7.3 Το θεώρημα του Θαλή	363	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	
7.4 Η ομοιοθεσία	368	7ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	394
7.5 Η ομοιότητα	375		

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

8.1 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$	399	8.4 Ο νόμος των ημιτόνων και των συνημιτόνων	422
8.2 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των παραπληρωματικών γωνιών	408	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	
8.3 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας	415	8ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	436

Μια ιστορία για τον αριθμό π	439
Το ακτίνιο	440
Πίνακες τριγωνομετρικών αριθμών	442
Πίνακας γεωμετρικών σχημάτων με τους τύπους των περιμέτρων τους (L) και των εμβαδών τους (E)	444
Πίνακας των βασικών στερεών με τους τύπους των εμβαδών (E) και των όγκων τους (V)	446

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	449
---------------------------	-----

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ	521
--	-----

AVALEBBPA



Οι πραγματικοί
αριθμοί

Οι πραγματικοί αριθμοί

1.1 ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α. Ορισμοί

Έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα αριθμούς, όπως οι:

$$1, 0, 0,1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 2\frac{1}{3}, -5,244444..., 3,14, \pi, -10^2$$

που ο καθένας ανήκει σε ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω σύνολα.

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι οι αριθμοί $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ και το σύνολο αυτό γράφεται συμβολικά:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Το γράμμα $\mathbb{N}$ είναι το αρχικό της αγγλικής λέξης *Natural*, που σημαίνει «φυσικός».

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι οι αριθμοί $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, \dots$ και το σύνολο αυτό γράφεται συμβολικά:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Το γράμμα $\mathbb{Z}$ είναι το αρχικό της γερμανικής λέξης *Zahl*, που σημαίνει «αριθμός».

Σημείωση

Όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός x είναι στοιχείο ενός συνόλου A , δηλαδή ότι ανήκει σε ένα σύνολο A , γράφουμε συμβολικά $x \in A$.

Αντίθετα, όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός x δεν είναι στοιχείο ενός συνόλου A , δηλαδή ότι δεν ανήκει σε ένα σύνολο A , γράφουμε συμβολικά $x \notin A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$2016 \in \mathbb{Z}, 2017 \in \mathbb{Z}, -2 \in \mathbb{Z}, -2 \notin \mathbb{N}, \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$$

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι οι αριθμοί που είναι κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιο αριθμό και οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιο αριθμό. Το σύνολο αυτό γράφεται συμβολικά:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} / \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0 \right\}$$

Το γράμμα $\mathbb{Q}$ είναι το αρχικό της αγγλικής λέξης *Quotient*, που σημαίνει «πηλίκο – λόγος».

Σημειώσεις

- Οι ακέραιοι αριθμοί α είναι ρητοί αφού, αν χρειαστεί, μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\alpha}{1}$ ή $\frac{2\alpha}{2}$ ή $\frac{-3\alpha}{-3}$ ή ...

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$-5 = \frac{-5}{1} = \frac{-15}{3} = -\frac{15}{3} = \dots, \quad 6 = \frac{24}{4} = \frac{-12}{-2} = \dots$$

- Οι δεκαδικοί αριθμοί με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων είναι ρητοί αφού, αν χρειαστεί, μπορούν να γραφούν σε μορφή δεκαδικού κλάσματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$3,5 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}, \quad -0,2 = \frac{-2}{10} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}, \quad 4,125 = \frac{4.125}{1.000} = \frac{165}{40} = \frac{33}{8}$$

- Οι δεκαδικοί αριθμοί με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, τα οποία επαναλαμβάνονται, μπορούν, αν χρειαστεί, να γραφούν σε μορφή κλάσματος με όρους ακέραιους αριθμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Για τον αριθμό $\rho = 7,333333\dots$, που συμβολικά γράφεται $\rho = 7,\overline{3}$, έχουμε $10\rho = 73,333333\dots$, οπότε $10\rho - \rho = 66$, $9\rho = 66$, δηλαδή $\rho = \frac{66}{9} = \frac{22}{3}$.
- Για τον αριθμό $\tau = 0,0252525$, που συμβολικά γράφεται $\tau = 0,0\overline{25}$, έχουμε $10\tau = 0,25252525$, $1000\tau = 25,25252525$, οπότε $1000\tau - 10\tau = 25$, $990\tau = 25$, δηλαδή $\tau = \frac{25}{990} = \frac{1}{36}$.

ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί και στη δεκαδική τους μορφή έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, τα οποία δεν εμφανίζουν περιοδικότητα.

Δεν υπάρχει σύμβολο για το σύνολο των άρρητων αριθμών!

Σημειώσεις

Ρητός → αριθμός που μπορεί να λεχθεί και να προσδιοριστεί επακριβώς.

Άρρητος → αριθμός που δεν μπορεί να λεχθεί ούτε να προσδιοριστεί επακριβώς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\sqrt{3} \approx 1,7320508076...$
2. $\sqrt{2} \approx 1,4142135624...$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660254038...$
4. $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071067812...$
5. $1 + \sqrt{3} \approx 2,7320508076...$
6. $\pi \approx 3,1415926536...$
7. $\sqrt{5} - 2 \approx 2,2360679775... - 2 = 0,2360679775...$
8. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,8284271248...$
9. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,4641016152...$
10. $\frac{\pi}{2} \approx 1,5707963268...$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι το σύνολο όλων των αριθμών που έχουμε γνωρίσει μέχρι τώρα, ρητών και άρρητων, και συμβολίζεται με το γράμμα $\mathbb{R}$.

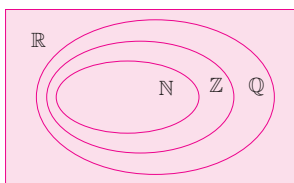
Το γράμμα $\mathbb{R}$ είναι το αρχικό της αγγλικής λέξης *Real*, που σημαίνει «πραγματικός».

Σημείωση

Το σύνολο των άρρητων αριθμών προκύπτει αν από τους πραγματικούς εξαιρέσουμε τους ρητούς και το παρουσιάζουμε συμβολικά: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

B. Διαγραμματική παρουσίαση των συνόλων των αριθμών

Τα σύνολα των αριθμών, καθώς και η σχέση που υπάρχει μεταξύ τους, παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο το $\mathbb{R}$ είναι το βασικό σύνολο.



Ένα τέτοιο διάγραμμα παρουσίασης συνόλων λέγεται και **διάγραμμα Venn**.

ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$

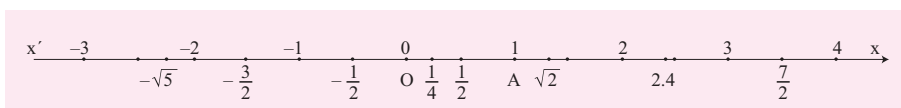
Αν ένα σύνολο A περιέχει το 0, τότε με το σύμβολο A^* εξαιρούμε από το A το 0. Έτσι:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad \mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Γ. Ευθεία-άξονας των πραγματικών αριθμών

Θεωρούμε μία ευθεία ε και το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Στην ευθεία ε παίρνουμε ένα σημείο O και ένα τμήμα OA της επιλογής μας ως (άτυπη) μονάδα μέτρησης.

Με βάση το μοναδιαίο τμήμα που ορίσαμε, σε κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που λέγεται **τετμημένη του σημείου**, και με τον τρόπο αυτό δημιουργούμε τη λεγόμενη **ευθεία $x'x$ των πραγματικών αριθμών** ή, αλλιώς, τον **άξονα $x'x$ των πραγματικών αριθμών** ή **πραγματικό άξονα**.



Φυσικά, και κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο της ευθείας αυτής.

Το σημείο O είναι η **αρχή του άξονα**, η ημιευθεία Ox είναι ο **θετικός ημιάξονας των πραγματικών αριθμών** και η Ox' είναι ο **αρνητικός ημιάξονας των πραγματικών αριθμών**.

Δ. Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Αν πάρουμε δύο πραγματικούς άξονες $x'x$, $y'y$ κάθετους μεταξύ τους, με κοινή αρχή O και ίσα μοναδιαία τμήματα, δημιουργούμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων** ή, αλλιώς, ένα **καρτεσιανό σύστημα αναφοράς**.

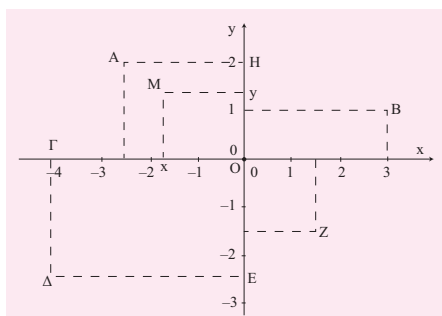
Ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς, κάθε σημείο M του επιπέδου έχει δύο **συντεταγμένες**, μία **τετμημένη x** και μία **τεταγμένη y** , και συμβολικά γράφουμε **$M(x, y)$** .

Αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένα (μόνο) σημείο του επιπέδου, που είναι εφοδιασμένο με ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

- το σημείο A με τετμημένη $-2,5$ και τεταγμένη 2 , δηλαδή το $A\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$,
- το σημείο B με τετμημένη 3 και τεταγμένη 1 , δηλαδή το $B(3, 1)$,
- το σημείο E του άξονα των τεταγμένων με τετμημένη 0 και τεταγμένη $-\frac{5}{2}$, δηλαδή το $E\left(0, -\frac{5}{2}\right)$,



- το σημείο Γ του άξονα των τετμημένων με τετμημένη -4 και τεταγμένη 0 , δηλαδή το $\Gamma(-4, 0)$.

Αντίστροφα, στο διατεταγμένο ζεύγος $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ αντιστοιχεί ένα σημείο του επιπέδου με τετμημένη $x = \frac{3}{2}$ και τεταγμένη $y = -\frac{3}{2}$.

Για να βρούμε το σημείο αυτό φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$, στο σημείο που βρίσκεται το $\frac{3}{2}$, και μία κάθετη στον άξονα $y'y$, στο σημείο που βρίσκεται το $-\frac{3}{2}$. Το σημείο τομής Z των δύο αυτών ευθειών είναι το σημείο $Z(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

Όμοια βρίσκουμε ότι στο διατεταγμένο ζεύγος $(0, 2)$ αντιστοιχεί το σημείο H του επιπέδου και στο διατεταγμένο ζεύγος $(-4, -\frac{5}{2})$ αντιστοιχεί το σημείο Δ του επιπέδου.

Σημείωση

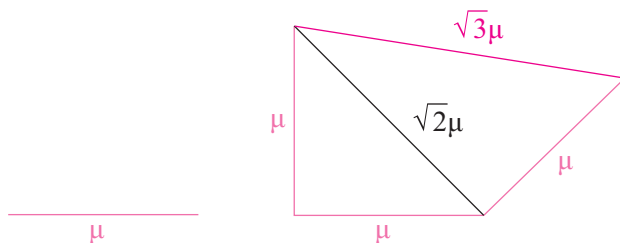
Κάθε σημείο του άξονα $y'y$ των τεταγμένων έχει τετμημένη 0 .
Κάθε σημείο του άξονα $x'x$ των τετμημένων έχει τεταγμένη 0 .

ΚΑΡΤΕΣΙΟΣ (René Descartes, 1596-1650): Γάλλος φιλόσοφος, μαθηματικός και επιστήμονας φυσικών επιστημών που έζησε τον 17ο αιώνα. Ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια του μεταβλητού μεγέθους και καθιέρωσε στην Άλγεβρα τους όρους $x, y, z, a, b, c, \dots$. Δημιούργησε τη μέθοδο του συστήματος των συντεταγμένων, βοηθώντας σημαντικά το έργο μεταγενέστερων επιστημόνων, ενώ ταυτόχρονα πέτυχε την ένωση της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα.

Ε. «Κατασκευή» των αριθμών $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

Αν γνωρίζουμε τη μονάδα μέτρησης μ (τυποποιημένη ή άτυπη), τότε με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος $\sqrt{2} \mu, \sqrt{3} \mu, \dots$

Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με τη μονάδα μ . Με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, προκύπτει ότι η υποτείνουσα του τριγώνου αυτού έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2} \mu$.



Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τη μία κάθετη πλευρά του ίση με $\sqrt{2}$ μ και την άλλη κάθετη ίση με μ. Η υποτείνουσα του νέου τριγώνου είναι ίση με $\sqrt{3}$ μ. Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, θα βρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\sqrt{4}$ μ, $\sqrt{5}$ μ, $\sqrt{6}$ μ, ...

Αν ως μοναδιαίο τμήμα μ πάρουμε το τυποποιημένο 1 cm, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που σχεδιάσαμε παραπάνω έχουν μήκη $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{4}$ cm, $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{6}$ cm, ...

1.2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

A. Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Είναι το γνωστό σύστημα αρίθμησης, στο οποίο όλοι οι αριθμοί γράφονται με τη χρήση των ψηφίων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9. Κάθε ψηφίο ενός αριθμού έχει την τάξη του είτε στο ακέραιο είτε στο δεκαδικό μέρος του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ο αριθμός 257 ισούται με:

$$7 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 100 = 7 + 50 + 200 \text{ μονάδες}$$

2. Ο αριθμός 6409,35 ισούται με:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 = \\ & = 5 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot 1 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 1000 = \\ & = \frac{5}{100} + \frac{3}{10} + 9 + 0 + 400 + 6000 = 0,05 + 0,3 + 9 + 400 + 6000 \text{ μονάδες} \end{aligned}$$

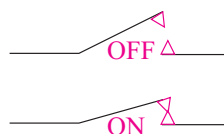
3. Αν συμβολίσουμε x, y, z τα ψηφία του ακέραιου αριθμού xyz, τότε αυτός είναι ίσος με:

$$z \cdot 10^0 + y \cdot 10^1 + x \cdot 10^2 \text{ μονάδες}$$

B. Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης

Οι πρώτες απλές ηλεκτρικές υπολογιστικές μηχανές εμφανίστηκαν πριν από πολλά χρόνια. Στη συνέχεια, εξελίσσονταν συνεχώς, απέκτησαν κι άλλες δυνατότητες, για να φτάσουμε σήμερα στους Η/Υ με τις εξαιρετικές τους «ικανότητες». Τα εργαλεία αυτά αποτελούνται από το σώμα (μηχανικό-ηλεκτρικό μέρος), το «hardware», και το μυαλό-ψυχή, το «software».

Η λειτουργία αυτών των μηχανών στηρίζεται στις δύο «καταστάσεις» που έχουμε στο ηλεκτρικό ρεύμα, την ON και την OFF. Όταν ένας διακόπτης είναι κλειστός, έχουμε την κατάσταση ON, ενώ όταν είναι ανοικτός, έχουμε την κατάσταση OFF. Στη «γλώσσα» των Η/Υ, στην κατάσταση ON αντιστοιχίζουμε το ψηφίο 1 και στην κατάσταση OFF το ψηφίο 0.



Για τη λειτουργία και την εξέλιξη των Η/Υ χρειάστηκε η δημιουργία ενός συστήματος αρίθμησης με τη χρήση (μόνο) των ψηφίων 0 και 1.

Γ1. Μετατροπή αριθμού από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ο αριθμός 1011 ισούται με $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 1 + 2 + 0 + 8 = 11$ μονάδες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.
2. Ο αριθμός 10 ισούται με $0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2$ μονάδες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.
3. Ο αριθμός 11 ισούται με $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$ μονάδες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.
4. Ο αριθμός 100 ισούται με $0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 4$ μονάδες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.
5. Ο αριθμός 101 ισούται με 5 μονάδες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Γ2. Μετατροπή αριθμού από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης

Στην περίπτωση αυτή, κάνουμε διαδοχικές διαιρέσεις με το 2 μέχρι να βρούμε πηλίκο 0 και γράφουμε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων αυτών **από το τελευταίο προς το πρώτο**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για τον αριθμό 13 του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης έχουμε τις διαιρέσεις:

$$\begin{array}{r}
 13 \mid 2 \\
 \hline
 1 \mid 6 \mid 2 \\
 \hline
 0 \mid 3 \mid 2 \\
 \hline
 1 \mid 1 \mid 2 \\
 \hline
 1 \mid 0
 \end{array}$$

Οπότε στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης γράφεται στη μορφή 1101.

2. Για τον αριθμό 18 του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης έχουμε τις διαιρέσεις:

$$\begin{array}{r}
 18 \mid 2 \\
 \hline
 0 \mid 9 \mid 2 \\
 \hline
 1 \mid 4 \mid 2 \\
 \hline
 0 \mid 2 \mid 2 \\
 \hline
 0 \mid 1 \mid 2 \\
 \hline
 1 \mid 0
 \end{array}$$

Οπότε στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης γράφεται στη μορφή 10010.

1.3 ΕΙΔΗ-ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ένας πραγματικός αριθμός x μπορεί να είναι:

- **Θετικός** ($x > 0$)
- **Αρνητικός** ($x < 0$)
- **Το μηδέν** ($x = 0$)
- **Μη αρνητικός**, δηλαδή μεγαλύτερος του μηδενός ή ίσος με το μηδέν ($x \geq 0$).
- **Μη θετικός**, δηλαδή μικρότερος του μηδενός ή ίσος με το μηδέν ($x \leq 0$).

Δύο πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδενός, μπορεί να είναι:

- **Ομόσημοι**, όταν είναι ή και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί.
- **Ετερόσημοι**, όταν είναι ο ένας θετικός και ο άλλος αρνητικός.

1.4 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

A. Ορισμός

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού x λέμε την απόστασή του από την αρχή O του άξονα των πραγματικών αριθμών και τη συμβολίζουμε με $|x|$.

Σημειώσεις

- Αν ο αριθμός είναι θετικός, η απόλυτη τιμή του ισούται με τον αριθμό.
- Αν ο αριθμός είναι αρνητικός, η απόλυτη τιμή του ισούται με τον αντίθετο του αριθμού.
- Η απόλυτη τιμή του μηδενός ισούται με μηδέν.

Μπορούμε **ισοδύναμα** να εκφράσουμε, συμβολικά, τον ορισμό ως εξής:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

B. Άμεσες συνέπειες του ορισμού

1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.
Η απόλυτη τιμή κάθε αριθμού είναι αριθμός μη αρνητικός.
2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.
Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.

3. Αν για τον πραγματικό αριθμό x γνωρίζουμε ότι ισχύει η $|x| = x$, τότε συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός είναι θετικός ή το μηδέν.
4. Αν για τον πραγματικό αριθμό x γνωρίζουμε ότι ισχύει η $|x| = -x$, τότε συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός είναι αρνητικός ή το μηδέν.
5. Αν ο αριθμός θ είναι θετικός, τότε έχουμε την ισοδυναμία:

$$|x| = \theta, \text{ αν και μόνο αν } x = -\theta \text{ ή } x = \theta$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Θεωρούμε τους αριθμούς -12 , $\frac{13}{3}$, 0 , -14 , $-\frac{5}{7}$ και για κάθε ένα βρίσκουμε την απόλυτη τιμή του, το τετράγωνό του και το τετράγωνο της απόλυτης τιμής του.
Αν ονομάσουμε x έναν οποιονδήποτε από τους αριθμούς αυτούς, τι συμπέρασμα προκύπτει για τα αποτελέσματα που βρήκατε για τα x^2 και $|x|^2$;
Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x ;
Μπορείτε να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας;
2. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή ως Λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:
 - α. Αν $|a| = 5$, τότε $a = -5$ ή $a = 5$.
 - β. Αν $|\beta| = \frac{1}{3}$, τότε $\beta = \frac{1}{3}$.
 - γ. Αν $|\omega| = -2$, τότε $\omega = -2$ ή $\omega = 2$.
 - δ. Αν $|x| = 2\sqrt{2}$, τότε $x = -2\sqrt{2}$ ή $x = 2\sqrt{2}$.
 - ε. Αν $\kappa = -10^{-1}$ ή $\kappa = 10^{-1}$, τότε $|\kappa| = 0,1$.

x	$ x $	x^2	$ x ^2$
-12			
$\frac{13}{3}$			
0			
-14			
$-\frac{5}{7}$			

1.5 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Α. Η πρόσθεση

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

1. Για να προσθέσουμε δύο αριθμούς που είναι **ομόσημοι**, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.
2. Για να προσθέσουμε δύο αριθμούς που είναι **ετερόσημοι**, παίρνουμε τις απόλυτες τιμές τους, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Σημειώσεις

- Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης λέγεται **άθροισμα**.
- Οι αριθμοί που προσθέτουμε λέγονται **προσθετέοι** ή **όροι του αθροίσματος**.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
3. $\alpha + 0 = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\alpha + (-\alpha) = 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Αντιμεταθετική
Προσεταιριστική
Ουδέτερο στοιχείο
Ο αντίθετος

♦ Αντίθετοι αριθμοί

1. Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς x, y γνωρίζουμε ότι $x + y = 0$, τότε αυτοί είναι αντίθετοι.
2. Οι αριθμοί $\alpha - \beta, \beta - \alpha$ είναι αντίθετοι, αφού $\alpha - \beta + \beta - \alpha = 0$, δηλαδή $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$x - 1 = -(1 - x), \text{ αφού } x - 1 + 1 - x = 0$$

$$-x - y = -(x + y), \text{ αφού } -x - y + x + y = 0$$

♦ Απόλυτη τιμή των αντίθετων αριθμών

Αφού οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές, είναι αληθείς οι ισότητες:

$$|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha| \text{ και } |-\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$|1 - x| = |x - 1|$$

♦ Το μέσον διαστήματος

Αν $\alpha \neq \beta$ και $|x - \alpha| = |x - \beta|$, δηλαδή ο x ισαπέχει από τα α, β , τότε ο x είναι το μέσον $\frac{\alpha + \beta}{2}$ του διαστήματος με άκρα τα α, β .

Σημείωση

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι μη αρνητικοί, δηλαδή $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, και ισχύει $\alpha + \beta = 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Έτσι, αν ισχύει η $|\alpha| + |\beta| = 0$, τότε έχουμε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, και αντίστροφα.

Β. Ο πολλαπλασιασμός

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

1. Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε θετικό πρόσημο.
2. Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε αρνητικό πρόσημο.

Σημειώσεις

- Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού λέγεται **γινόμενο**.
 - Οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε λέγονται **παράγοντες του γινομένου**.
3. Όταν σε ένα **γινόμενο οι παράγοντες είναι περισσότεροι των δύο**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:
 - Το πρόσημο $+$ αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο.
 - Το πρόσημο $-$ αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
3. $\alpha \cdot 1 = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Αντιμεταθετική
Προσεταιριστική
Ουδέτερο στοιχείο
Ο αντίστροφος

Σημείωση

Το σύμβολο επί « $\cdot$ » του πολλαπλασιασμού εμφανίζεται όταν οι παράγοντες είναι αριθμοί και όχι γράμματα που εκφράζουν αριθμούς ή όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στην πράξη.

ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

1. $\alpha \cdot 0 = 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Αν $\alpha\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$, και αντίστροφα,
Αν $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$, τότε $\alpha\beta = 0$.

3. Αν $\alpha\beta \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$, και αντίστροφα.
4. Οι αριθμοί α , β είναι αντίστροφοι, αν και μόνο αν $\alpha\beta = 1$.
5. Αν $xy \neq 0$, τότε οι αριθμοί $\frac{x}{y}$ και $\frac{y}{x}$ είναι αντίστροφοι, αφού:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{x \cdot y}{y \cdot x} = 1$$
6. Οι αριθμοί α , β είναι ομόσημοι, αν και μόνο αν $\alpha\beta > 0$.
7. Οι αριθμοί α , β είναι ετερόσημοι, αν και μόνο αν $\alpha\beta < 0$.

♦ **Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση**

α. «Απλή» επιμεριστική

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για τους αριθμούς $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 7$ έχουμε $\alpha\beta = 6$, $\alpha\gamma = 14$, $\beta + \gamma = 10$ και $\alpha(\beta + \gamma) = 20$, $\alpha\beta + \alpha\gamma = 20$, οπότε ισχύει $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.
2. Για τους αριθμούς $x = 3$, $y = 5$, $z = 4$ έχουμε $xz = 12$, $yz = 20$, $x - y = -2$ και $(x - y)z = -2 \cdot 4 = -8$, $xz - yz = 12 - 20 = -8$, οπότε ισχύει $(x - y)z = xz - yz$.

Γενικά, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x , y , z ισχύουν οι:

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y)z = xz + yz$$

$$x(y - z) = xy - xz$$

$$(x - y)z = xz - yz$$

β. «Διπλή» επιμεριστική

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για τους αριθμούς $\alpha = 3$, $\beta = 11$, $\gamma = \frac{2}{3}$, $\delta = -1$ έχουμε:

$$\alpha + \beta = 14, \gamma + \delta = \frac{2}{3} + (-1) = \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{1}{3}$$

Οπότε:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 14 \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{14}{3} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma + \delta) + \beta(\gamma + \delta) &= \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta = \\ &= 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot (-1) + 11 \cdot \frac{2}{3} + 11 \cdot (-1) = 2 - 3 + \frac{22}{3} - 11 = \\ &= -12 + \frac{22}{3} = -\overset{3}{\underset{1}{12}} + \frac{\underset{1}{22}}{3} = -\frac{36}{3} + \frac{22}{3} = -\frac{14}{3} \end{aligned} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha(\gamma + \delta) + \beta(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$