

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Γενικής Παιδείας

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Κεφάλαιο 1ο: Συστήματα

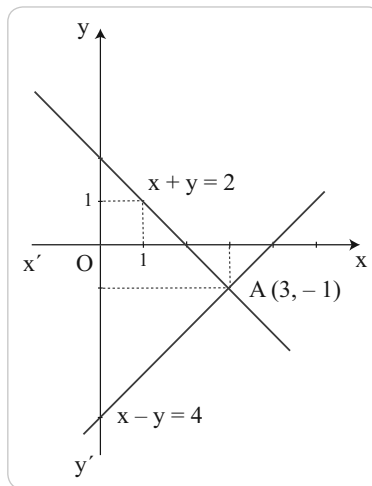
1.1 Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

$$\text{i. } \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3, -1)$.



Οι ευθείες $x + y = 2$ και $x - y = 4$ τέμνονται στο σημείο $A(3, -1)$.

$$\text{2. i. } \begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 7y \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 7y = 0 \\ x + y = 45 \end{cases} \cdot 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 7y = 0 \\ 7x + 7y = 315 \end{cases}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $15x = 315 \Leftrightarrow x = \frac{315}{15} \Leftrightarrow x = 21$

και από την εξίσωση $x + y = 45$ προκύπτει $y = 45 - 21 = 24$.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(21, 24)$.

$$\text{ii. } \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 3y - 6 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -2 & , (1) \\ 4x + 3y = 8 & , (2) \end{cases}.$$

Με πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $8x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Με αφαίρεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $6y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}$.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{3}\right)$.

3. i. Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών και εκτελώντας τις πράξεις στις εξισώσεις του συστήματος προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x + 12y = 15 \\ 8x - 12y = 72 \end{cases}.$$

Με πρόθεση έχουμε:

$$29x = 87 \Leftrightarrow x = \frac{87}{29} \Leftrightarrow x = 3.$$

Για $x = 3$ η εξίσωση $7x + 4y = 5$ γίνεται:

$$7 \cdot 3 + 4y = 5 \Leftrightarrow 4y = -21 + 5 \Leftrightarrow 4y = -16, \text{ οπότε } y = -4.$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3, -4)$.

- ii. Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών και εκτελώντας τις πράξεις στις εξισώσεις του συστήματος προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 8x + 3y = 46 \\ x + 2y = 9 \end{cases}, \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}.$$

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου $x = 9 - 2y$ και έχουμε:

$$8(9 - 2y) + 3y = 46 \Leftrightarrow 72 - 16y + 3y = 46 \Leftrightarrow 13y = 26 \Leftrightarrow y = 2.$$

Η (2) για $y = 2$ γίνεται $x + 2 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow x = 5$.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(5, 2)$.

4. i. Το σύστημα $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = -2 \end{cases}$ γράφεται $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$.

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

- ii. Το σύστημα $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases}$ γράφεται $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$.

Άρα, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $\left(\kappa, \frac{\kappa + 2}{2}\right), \kappa \in \mathbb{R}$.

5. i. Έχουμε:

$$\bullet \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 3 \cdot 1 = -10 - 3 = -13 \neq 0,$$

$$\bullet \quad D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 7 - 4 \cdot 1 = -35 - 4 = -39,$$

$$\bullet \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 8 - 21 = -13.$$

$$\text{Τότε } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-39}{-13} = 3 \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13}{-13} = 1.$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (3, 1).

ii. Το σύστημα γράφεται
$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 3y = -1 \end{cases}.$$

Είναι:

$$\bullet \quad D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11 \neq 0, \quad \bullet \quad D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22,$$

$$\bullet \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11.$$

$$\text{Τότε } x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2 \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{11} = -1.$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (2, -1).

6. i. • Είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 30 = 44 \neq 0$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

ii. • Είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$. Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$$

και επομένως έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

iii. Είναι $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$. Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -9x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

7. i. • Είναι $D = \begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix} = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) - 2 = 2 - 2 = 0$.

Το σύστημα γράφεται διαδοχικά ισοδύναμα:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3}+1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \\ (\sqrt{3}-1)x + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)y = -(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \\ (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \end{cases}.$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής:

$$((\sqrt{3}+1)(\kappa+1), \kappa), \kappa \in \mathbb{R}.$$

ii. Είναι $D = \begin{vmatrix} \sqrt{3}+1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix} = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) - 2 = 2 - 2 = 0$.

Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x + 4y = 7 \\ x + 2(\sqrt{3}-1)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}+1)x + 4y = 7 \\ (\sqrt{3}+1)x + 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)y = 2(\sqrt{3}+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}+1)x + 4y = 7 \\ (\sqrt{3}+1)x + 4y = 2(\sqrt{3}+1) \end{cases}.$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

8. i. Λύνουμε μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο π.χ. την πρώτη.

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\omega = 3x - 2y - 11$, (4).

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται:

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2x - 5y - 2(3x - 2y - 11) &= 3 \Leftrightarrow 2x - 5y - 6x + 4y + 22 = 3 \\ &\Leftrightarrow -4x - y = -19 \Leftrightarrow 4x + y = 19, \quad (5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad 5x + y - 2(3x - 2y - 11) &= 33 \Leftrightarrow 5x + y - 6x + 4y + 22 = 33 \\ &\Leftrightarrow -x + 5y = 11 \Leftrightarrow x - 5y = -11, \quad (6). \end{aligned}$$

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2×2 σύστημα:

$$\begin{cases} 4x + y = 19 \\ x - 5y = -11 \end{cases},$$

από τη λύση του οποίου, κατά τα γνωστά, βρίσκουμε $x = 4$ και $y = 3$.

Με αντικατάσταση των τιμών x και y στην (4) βρίσκουμε $\omega = -5$.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(x, y, \omega) = (4, 3, -5)$.

ii. Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x = 3y - \omega + 2$, (4).

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται:

$$\begin{aligned} \bullet \quad 5(3y - \omega + 2) - y + 32 &= 4 \Leftrightarrow 15y - 5\omega + 10 - y + 32 = 4 \\ &\Leftrightarrow 14y - 2\omega = -6 \Leftrightarrow 7y - \omega = -3, \quad (5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad 3(3y - \omega + 2) - 2y + 2\omega &= 2 \Leftrightarrow 9y - 3\omega + 6 - 2y + 2\omega = 2 \\ &\Leftrightarrow 7y - \omega = -4, \quad (6). \end{aligned}$$

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2×2 σύστημα $\begin{cases} 7y - \omega = -3 \\ 7y - \omega = -4 \end{cases}$, που είναι αδύνατο.

Άρα, το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

iii. Μετά την απαλοιφή παρονομαστών το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6 \\ 3x + 2y + 2\omega = 10. \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases}$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y = 4\omega - 2x + 6$, (4).

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται:

$$\begin{aligned} \bullet \quad 3x + 2 - (4\omega - 2x + 6) + 2\omega &= 10 \Leftrightarrow 3x + 8\omega - 4x + 12 + 2\omega = 10 \\ &\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2, \quad (5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad 5x + 3(4\omega - 2x + 6) - 2\omega &= 16 \Leftrightarrow 5x + 12\omega - 6x + 18 - 2\omega = 16 \\ &\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2, \quad (6). \end{aligned}$$

Οι (5), (6) αποτελούν το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 10\omega = 2 \\ x - 10\omega = 2 \end{cases},$$

που έχει άπειρες λύσεις της μορφής $x = 10\kappa + 2$, με $\omega = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Από την (4) έχουμε $y = 4\kappa - 2(10\kappa + 2) + 6 = -16\kappa + 2$.

Άρα, το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$(x, y, \omega) = (10\kappa + 2, -16\kappa + 2, \kappa), \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας (ε_1). Επειδή η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(0, 2)$ και $(4, 0)$ έχουμε:

$$\begin{cases} 2 = \alpha \cdot 0 + \beta \\ 0 = \alpha \cdot 4 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ 4\alpha + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Άρα (ε_1) : $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Αν, τώρα, η $y = \gamma x + \delta$ είναι η εξίσωση της (ε_2) , τότε επειδή διέρχεται από τα σημεία $(0, -1)$ και $(1, 0)$ έχουμε:

$$\begin{cases} -1 = \gamma \cdot 0 + \delta \\ 0 = \gamma \cdot 1 + \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases}.$$

Άρα (ε_2) : $y = x - 1$.

- ii. Οι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ορίζουν το σύστημα $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$, του οποίου η λύση, όπως φαίνεται και από το σχήμα, είναι το ζεύγος $(2, 1)$.

2. Έστω x ο αριθμός των δίκλινων και y ο αριθμός των τρίκλινων δωματίων, τότε από τα δεδομένα έχουμε:

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x + 3y = 68 \end{cases},$$

η λύση του οποίου είναι το ζεύγος $(x, y) = (10, 16)$.

Άρα, υπάρχουν 10 δίκλινα και 16 τρίκλινα δωμάτια.

3. Αν τον αγώνα παρακολούθησαν x παιδιά και y ενήλικες, τότε από τα δεδομένα έχουμε:

$$\begin{cases} x + y = 2200 \\ 1,5x + 4y = 5050 \end{cases},$$

η λύση του οποίου είναι το ζεύγος $(x, y) = (1500, 700)$.

Επομένως, τον αγώνα παρακολούθησαν 1500 παιδιά και 700 ενήλικες.

4. Έχουμε ότι:

- για $T = 20$, είναι $R = 0,4$, οπότε:

$$0,4 = \alpha \cdot 20 + \beta \Leftrightarrow 20\alpha + \beta = 0,4, \quad (1)$$

- και για $T = 80$, είναι $R = 0,5$, οπότε:

$$0,5 = 80\alpha + \beta \Leftrightarrow 80\alpha + \beta = 0,5, \quad (2).$$

Από τις εξισώσεις (1), (2) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 20\alpha + \beta = 0,4 \\ 80\alpha + \beta = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{600} \\ \beta = \frac{11}{30} \end{cases}.$$

$$\text{Άρα } R = \frac{1}{600} \cdot T + \frac{11}{30}.$$

5. Έστω ότι απαιτούνται x ml από το πρώτο διάλυμα και y ml από το δεύτερο διάλυμα, τότε $x + y = 100$, (1).

Η ποσότητα του υδροχλωρικού οξέος σε κάθε διάλυμα είναι $\frac{50}{100}x$ στο πρώτο και $\frac{80}{100}y$

στο δεύτερο. Επομένως $\frac{50}{100}x + \frac{80}{100}y = \frac{68}{100} \cdot 100$, (2).

Οι εξισώσεις (1) και (2) ορίζουν το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{50}{100}x + \frac{80}{100}y = \frac{68}{100} \cdot 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 100 \\ 5x + 8y = 680 \end{cases},$$

του οποίου η λύση είναι το ζεύγος $(x, y) = (40, 60)$.

Επομένως, πρέπει να αναμείξει 40 ml από το πρώτο με 60 ml από το δεύτερο.

6. i. Λύνουμε ως προς y τις εξισώσεις των ευθειών:

$$2x + 4y = 3 \Leftrightarrow 4y = -2x + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{4}x + \frac{3}{4}. \text{ Άρα } \lambda_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$x + 2y = \alpha \Leftrightarrow 2y = -x + \alpha \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2}. \text{ Άρα } \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

- ii. Επειδή $\lambda_1 = \lambda_2$, οι ευθείες ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

Επομένως, δεν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες τέμνονται.

- iii. Για να είναι παράλληλες, αρκεί $\frac{3}{4} \neq \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 4\alpha \neq 6 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{3}{2}$.

7. i. $\begin{cases} \alpha x + y = \alpha^2 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$. Βρίσκουμε τις ορίζουσες:

$$\bullet \quad D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1).$$

$$\bullet \quad D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + 1 + 1).$$

$$\bullet \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1 - \alpha).$$

Αν $D \neq 0$, δηλαδή, αν $\alpha \neq -1$ και $\alpha \neq 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, οπότε οι ευθείες τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1 + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)} = \frac{-\alpha}{\alpha + 1}.$$

Επομένως, αν $\alpha \neq \pm 1$, οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1}, \frac{-\alpha}{\alpha + 1}\right)$.

- Αν $\alpha = 1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, το οποίο έχει άπειρο πλήθος λύσεων, που σημαίνει ότι οι ευθείες ταυτίζονται.
- Αν $\alpha \neq -1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ και είναι αδύνατο που σημαίνει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

ii. $\begin{cases} \alpha x - y = \alpha \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$

Επειδή $D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 \neq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, επομένως οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. i. Βρίσκουμε τις ορίζουσες:

$$\begin{aligned} \bullet \quad D &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 4 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 4 \cdot (-2) = -(\lambda^2 - 1) + 8 \\ &= -\lambda^2 + 1 + 8 = -\lambda^2 + 9 = -(\lambda^2 - 9) \\ &= -(\lambda + 3)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

$$\bullet \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -1 \cdot (\lambda + 1) - (-2) \cdot (-2) = -\lambda - 1 - 4 = -(\lambda + 5).$$

$$\bullet \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (\lambda - 1) - 4 = -2\lambda + 2 - 4 = -2\lambda - 2 = -2(\lambda + 1).$$

• Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μια λύση, την:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(\lambda + 5)}{-(\lambda + 3)(\lambda - 3)} = \frac{\lambda + 5}{(\lambda + 3)(\lambda - 3)} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2(\lambda + 1)}{-(\lambda + 3)(\lambda - 3)} = \frac{2(\lambda + 1)}{(\lambda + 3)(\lambda - 3)}.$$

• Αν $\lambda = 3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 4x - 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 2x - 2y = -1 \end{cases}, \text{ που είναι αδύνατο.}$$

• Αν $\lambda = -3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -4x - 2y = 1 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = -1 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}, \text{ που είναι αδύνατο.}$$

ii. Βρίσκουμε τις ορίζουσες:

$$\bullet D = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix} = (\mu-2)(\mu+2) - 5 = \mu^2 - 4 - 5 = \mu^2 - 9 = (\mu+3)(\mu-3).$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix} = 5(\mu+2) - 25 = 5\mu + 10 - 25 = 5\mu - 15 = 5(\mu-3).$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot (\mu-2) - 5 = 5\mu - 10 - 5 = 5\mu - 15 = 5(\mu-3).$$

• Αν $D \neq 0$, δηλαδή, αν $\mu \neq \pm 3$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, την:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{(\mu+3)} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{(\mu+3)}.$$

• Αν $\mu = 3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + 5y = 5 \\ x + 5y = 5, \end{cases} \text{ που έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής } (x, y) = (5 - 5\kappa, \kappa), \kappa \in \mathbb{R}.$$

• Αν $\mu = -3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -5x + 5y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}, \text{ που είναι αδύνατο.}$$

9. Αν R_1, R_2 και R_3 οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα O_1, O_2 και O_3 αντίστοιχα, που εφάπτονται εξωτερικά, τότε έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 6, & (1) \\ R_2 + R_3 = 7, & (2). \\ R_1 + R_3 = 5, & (3) \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) που ονομάζεται «κυκλικό».

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε:

$$2(R_1 + R_2 + R_3) = 18 \Leftrightarrow R_1 + R_2 + R_3 = 9, \quad (4).$$

Αν τώρα από τα μέλη της (4) αφαιρέσουμε τα μέλη των (1), (2) και (3), βρίσκουμε ότι:

$$\bullet R_1 + R_2 + R_3 - R_1 - R_2 = 9 - 6 \Leftrightarrow R_3 = 3.$$

$$\bullet R_1 + R_2 + R_3 - R_2 - R_3 = 9 - 7 \Leftrightarrow R_1 = 2.$$

$$\bullet R_1 + R_2 + R_3 - R_1 - R_3 = 9 - 5 \Leftrightarrow R_2 = 4.$$

Επομένως, οι ακτίνες των κύκλων είναι 2 cm, 4 cm και 4 cm.

10. Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο είναι ίσα. Επομένως $AZ = AE = x$, $BD = BZ = y$ και $GD = GE = z$.

Έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = \gamma, & (1) \\ y + z = \alpha, & (2) \\ z + x = \beta, & (3) \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων κατά μέλη έχουμε:

$$2(x + y + z) = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow x + y + z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}, \quad (4).$$

- Από (4) και (1) έχουμε $\gamma + z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \Leftrightarrow z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$.
- Από (4) και (2) έχουμε $x + \alpha = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.
- Από (4) και (3) έχουμε $y + \beta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.

Παρατήρηση: Αν θέσουμε $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, τότε:

$$x = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} = \frac{2\tau - \alpha - \alpha}{2} = \tau - \alpha \quad \text{και ομοίως} \quad y = \tau - \beta, \quad z = \tau - \gamma.$$

11. Έστω x, y, z οι ποσότητες σε lt από κάθε διάλυμα αντίστοιχα που θα χρησιμοποιήσει ο Χημικός. Τότε από τα δεδομένα προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} x + y + z = 52 \\ \frac{50}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{30}{100}z = \frac{32}{100} \cdot 52 \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 52 \\ 50x + 10y + 30z = 1664 \\ x = 2z \end{cases} \quad \begin{matrix} , (1) \\ , (2) \\ , (3) \end{matrix}$$

Από (1) και (3) έχουμε $y + 3z = 52$, οπότε $y = 52 - 3z$ και η (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} 50 \cdot 2z + 10(52 - 3z) + 30z &= 1664 \Leftrightarrow 100z + 520 - 30z + 30z = 1664 \\ &\Leftrightarrow 100z = 1144 \Leftrightarrow z = 11,44, \end{aligned}$$

οπότε $z = 11,44$ lt. Επομένως $x = 22,88$ lt και $y = 17,68$ lt.

12. • Στην 1η περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 3, θα ισχύει $f(0) = 3$, οπότε θα έχουμε $\gamma = 3$, επομένως το τριώνυμο θα είναι της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + 3$.

Επειδή το τριώνυμο $f(x)$ έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$ και $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$, θα ισχύει:

$$\begin{cases} -\frac{\beta}{2\alpha} = 2 \\ f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4\alpha \\ f(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

Επομένως είναι $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- Στη 2η περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $g(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $g(-1) = 0$, θα έχουμε:

$$\alpha - \beta + \gamma = 0, \quad (2).$$

Επειδή, επιπλέον, η γραφική παράσταση του τριωνύμου $g(x)$ έχει κορυφή το σημείο $K(1, 4)$, θα ισχύει:

$$\begin{cases} -\frac{\beta}{2\alpha} = 1 \\ g\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ g(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \alpha + \beta + \gamma = 4 \end{cases}.$$

Επομένως, λόγω της (3), οι (2) και (4) γράφονται:

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -3\alpha \\ -\alpha - 3\alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases}.$$

Άρα, είναι και $\alpha = -1$, $\beta = 2$ και $\gamma = 3$, οπότε έχουμε $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- Στην 3η περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $h(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα x' στα σημεία 2 και 4 και τον άξονα y' στο σημείο 4, θα ισχύει:

$$\begin{cases} h(2) = 0 \\ h(4) = 0 \\ h(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 16\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta = -4 \\ 16\alpha + 4\beta = -4 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -2 \\ 4\alpha + \beta = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 2 \\ 4\alpha - 2\alpha - 2 = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 0,5 \\ \gamma = 4 \end{cases}.$$

Επομένως, είναι $h(x) = 0,5x^2 - 3x + 4$.

1.2 Μν Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς y προκύπτει $y = 1 - x$, (1), οπότε αντικαθιστώντας στην πρώτη, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) &= 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + x - x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0, \quad (2). \end{aligned}$$

Η (2) έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$, οπότε λόγω της (1) είναι:

$$y_1 = 1 - x_1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{και} \quad y_2 = 1 - x_2 = 1 - 2 = -1.$$

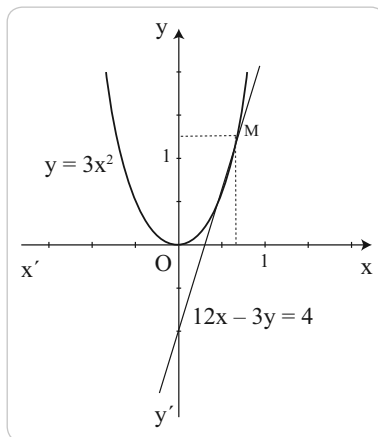
Επομένως, το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(-1, 2)$ και $(2, -1)$.

2. i. Αντικαθιστώντας την τιμή του y από την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη προκύπτει η εξίσωση:

$$12x - 3(3x^2) = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0, \quad (1).$$

Η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα, την $x = \frac{2}{3}$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε $y = \frac{4}{3}$.

Επομένως, το σύστημα έχει μοναδική λύση, το ζεύγος $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Για να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τη λύση του συστήματος χαράσσουμε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή $y = 3x^2$ και την ευθεία $12x - 3y = 4$. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M , το οποίο έχει συντεταγμένες $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.



ii. Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & , (1) \\ y = x & , (2) \end{cases}$$

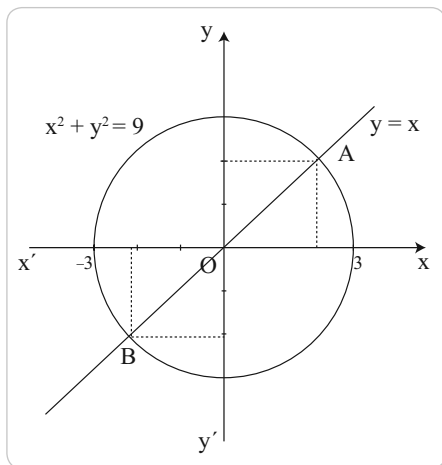
Η (1), λόγω της (2), γίνεται

$$x^2 + x^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 = 9 \text{ και έχει ρίζες τις}$$

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ και } x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

οπότε επειδή $y = x$ έχουμε:

$$y_1 = x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ και } y_2 = x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$



Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Για να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος χαράσσουμε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$ με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα 3 καθώς επίσης και την ευθεία $y = x$. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε δύο σημεία, τα $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

μέγς τέμνονται σε δύο σημεία, τα $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

iii. Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$x \neq 0, y \neq 0 \text{ και } y = \frac{2}{x}.$$

Η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 & \Leftrightarrow x^4 + 4 = 5x^2 \\ & \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0, (1). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $x^2 = \omega$, (2), η (1) γίνεται

$$\omega^2 - 5\omega + 4 = 0, (3).$$

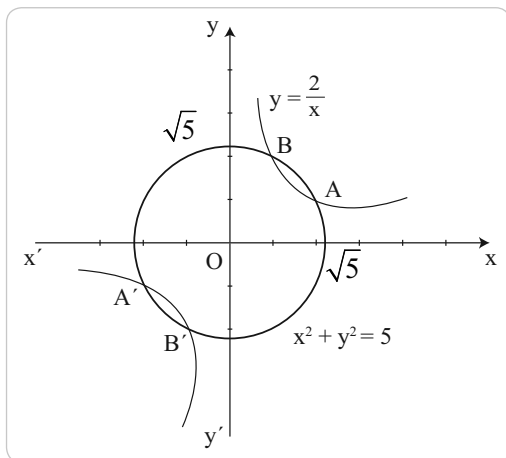
Αυτή έχει ρίζες $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 4$,

οπότε λόγω της (2) έχουμε $x^2 = 1$ ή

$x^2 = 4$. Από αυτές παίρνουμε τέσσερις

ρίζες $x_1 = -1, x_2 = 1$ και $x_3 = -2, x_4 = 2$, οπότε για το y παίρνουμε τις τιμές

$$y_1 = \frac{2}{x_1} = -2, y_2 = \frac{2}{x_2} = 2 \text{ και } y_3 = \frac{2}{x_3} = -1, y_4 = \frac{2}{x_4} = 1.$$



Άρα, το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(-2, -1)$ και $(2, 1)$.

Για να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος χαράσσουμε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{5}$, καθώς επίσης και την υπερβολή $y = \frac{2}{x}$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε τέσσερα σημεία, τα $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(-2, -1)$ και $(2, 1)$.

3. Από την $v = v_0 + at$, οπότε $a = \frac{v - v_0}{t}$. Αντικαθιστούμε στην πρώτη και έχουμε:

$$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v - v_0}{t} \cdot t^2 = v_0 t + \frac{(v - v_0)t}{2} = \frac{2v_0 t + vt - v_0 t}{2}.$$

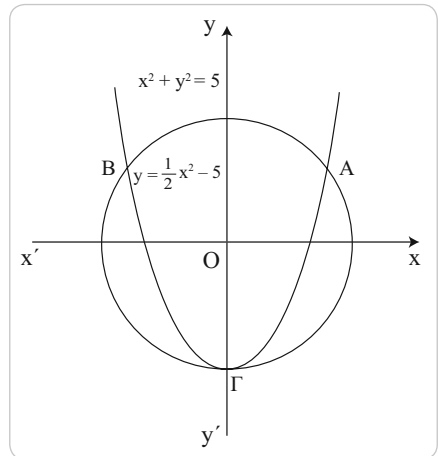
$$\text{Άρα } S = \frac{v + v_0}{2} \cdot t.$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Η δεύτερη εξίσωση λόγω της πρώτης γράφεται $2y + 10 + y^2 = 25$ ή, ισοδύναμα, $y^2 + 2y - 15 = 0$, η οποία έχει ρίζες 3 και -5. Για $y = 3$ έχουμε $x^2 = 16$, οπότε $x = 4$ ή $x = -4$. Για $y = -5$ έχουμε $x^2 = 0$, οπότε $x = 0$.

Άρα, το σύστημα έχει τρεις λύσεις τις $(4, 3)$, $(-4, 3)$, $(0, -5)$.

Σχεδιάζουμε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$ και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$ και παρατηρούμε ότι έχουν τρία κοινά σημεία.



2. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y(2x - y - 5) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $2x - y - 5 = 0$, οπότε το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με τα συστήματα:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}, (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}, (2).$$

Για να λύσουμε το (1) θέτουμε στη δεύτερη εξίσωση $y = 0$, οπότε έχουμε $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Οι ρίζες αυτής είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$, έτσι το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(1, 0)$ και $(3, 0)$. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2) γράφεται $y = 2x - 5$, (3) και αν θέσουμε

στη δεύτερη παίρνουμε:

$$2x - 5 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Οι ρίζες αυτές είναι $x_3 = 2$ και $x_4 = 4$, οπότε λόγω της (3) είναι $y_3 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$ και $y_4 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$. Έτσι, το σύστημα (2) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(2, -1)$ και $(4, 3)$. Επομένως το αρχικό σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(2, -1)$ και $(4, 3)$.

3. Έστω x, y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε είναι:

$$xy = 120, \quad (1) \quad \text{και} \quad (x + 3)(y - 2) = 120, \quad (2).$$

Η (2) γράφεται $xy + 3y - 2x - 6 = 120$ και λόγω της (1) γίνεται:

$$120 + 3y - 2x - 6 = 120 \Leftrightarrow 3y - 2x = 6 \Leftrightarrow y = \frac{2x + 6}{3}, \quad (3)$$

και αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει η εξίσωση:

$$x \left(\frac{2x + 6}{3} \right) = 120 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 360 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες $x_1 = 12$ και $x_2 = -15$.

Επειδή οι διαστάσεις είναι θετικοί αριθμοί θα έχουμε $x = 12$ cm, οπότε, λόγω της (1), θα

$$\text{είναι } y = \frac{120}{x} = \frac{120}{12} = 10 \text{ cm.}$$

4. Για να βρούμε τα σημεία, στα οποία η ευθεία $y = 2x + \kappa$ τέμνει την παραβολή $y = -x^2$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = 2x + \kappa \\ y = -x^2 \end{cases}, \quad (1).$$

Οι τετμημένες των σημείων τομής είναι ρίζες της εξίσωσης:

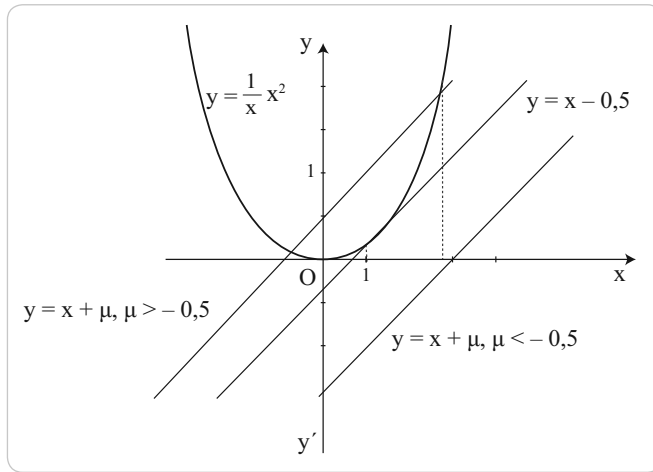
$$-x^2 = 2x + \kappa \Leftrightarrow x^2 + 2x + \kappa = 0, \quad (2).$$

Οι δύο γραμμές θα τέμνονται σε δύο σημεία, αν το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, που σημαίνει ότι η εξίσωση (2) θα πρέπει να έχει δύο λύσεις. Αυτό συμβαίνει, μόνο αν είναι $\Delta = 4 - 4\kappa > 0 \Leftrightarrow -4\kappa > -4 \Leftrightarrow \kappa < 1$.

5. Αντικαθιστώντας το $y = x + \mu$ στην πρώτη εξίσωση προκύπτει:

$$2(x + \mu) = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2\mu = 0, \quad (1),$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού, με διακρίνουσα $\Delta = 4 + 8\mu = 4(1 + 2\mu)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:



- $\Delta > 0$, δηλαδή $\mu > -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει δύο ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει δύο λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία τέμνονται σε δύο σημεία.
- $\Delta = 0$, δηλαδή $\mu = -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει διπλή ρίζα, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μία λύση, οπότε η παραβολή και ευθεία εφάπτονται σε ένα σημείο.
- $\Delta < 0$, δηλαδή $\mu < -\frac{1}{2}$. Η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις, οπότε η παραβολή και ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Γραφικά τα εξαγόμενα, εξηγούνται με τη βοήθεια του προηγούμενου σχήματος.

Ερωτήσεις κατανόησης

I. $(\Sigma_1) \rightarrow B$, $(\Sigma_2) \rightarrow A$, $(\Sigma_3) \rightarrow \Gamma$, $(\Sigma_4) \rightarrow A$.

II. 1. A, 2. Ψ, 3. A, 4. Ψ.

Κεφάλαιο 2ο: Ιδιότητες συναρτήσεων

2.1 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
 - Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
 - Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -1$.
 - Η g δεν παρουσιάζει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.
 - Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ και για $x = 1$ το $h(-1) = h(1) = -2$.

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξουμε τα $f(x) \geq f(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

- Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq g(1)$.

$$\frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)^2, \text{ που ισχύει.}$$

- Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_1(-x) = 3(-x^2) + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f_1(x), \text{ άρα η } f_1 \text{ είναι άρτια.}$$

- Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1 = f_2(x), \text{ άρα η } f_2 \text{ είναι άρτια.}$$

- Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_3(-x) = |-x + 1|,$$

οπότε δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, αφού $f_3(-1) \neq f_3(1)$.

- Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(x), \text{ άρα η } f_4 \text{ είναι περιττή.}$$

- Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0.

Άρα, η f_5 δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

vi. Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f_6(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f_6(x), \text{ άρα η } f_6 \text{ είναι περιττή.}$$

5. i. Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_1(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f_1(x).$$

Άρα η f_1 είναι άρτια.

ii. Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $[2, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0.

Άρα, δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iii. Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_3(-x) = |-x - 1| - |-x + 1| = |x + 1| - |x - 1| = -f_3(x).$$

Άρα η f_3 είναι περιττή.

iv. Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι περιττή, διότι ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_4(x) = \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x^2 + 1} = \frac{1}{x} \quad \text{άρα} \quad f_4(-x) = -\frac{1}{x} = -f_4(x).$$

Τέλος, αν εργαστούμε όπως στην I, θα αποδείξουμε ότι:

v. Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι $f_5(-x) = \sqrt{|1-x|} = \sqrt{|x|} = f_5(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vi. Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και είναι άρτια, διότι:

$$f_6(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f_6(x), \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

6. i. Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$. Άρα, η f είναι περιττή.

ii. Η C_g έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άρα, η g είναι άρτια.

iii. Η C_h δεν έχει ούτε άξονα συμμετρίας τον $y'y$, ούτε κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$.

Άρα, η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

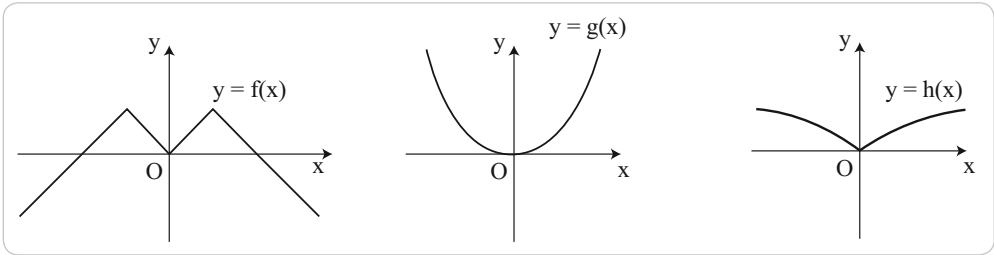
7. Ομοίως:

i. Η f είναι άρτια διότι έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

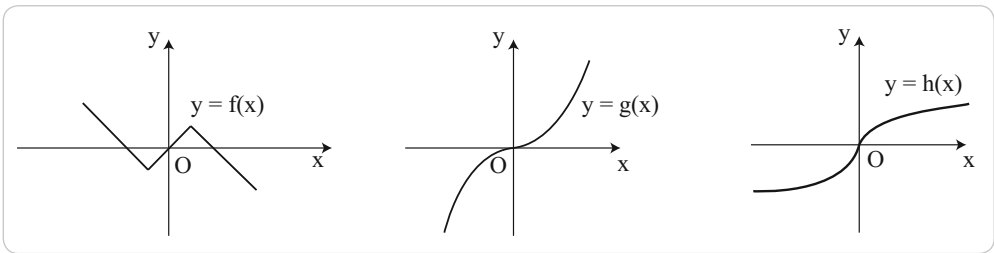
ii. Η g είναι περιττή διότι έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.

iii. Η h δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

8. α. Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1 , C_2 και C_3 ως προς τον άξονα $y'y$.



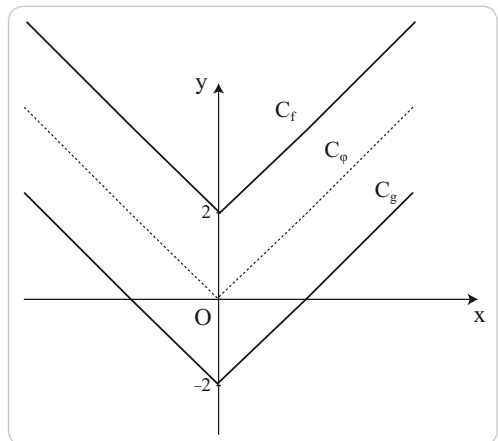
β. Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1 , C_2 και C_3 ως προς την αρχή των αξόνων.



2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

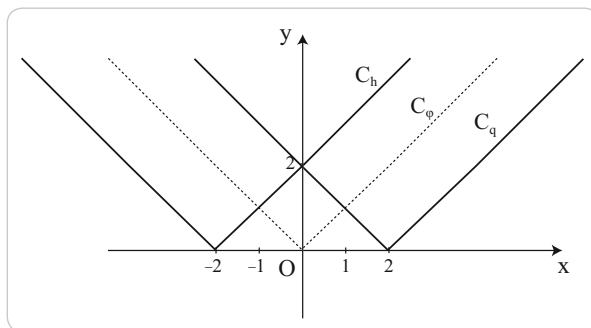
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

- Όπως γνωρίζουμε, η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$, αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω (σχήμα).

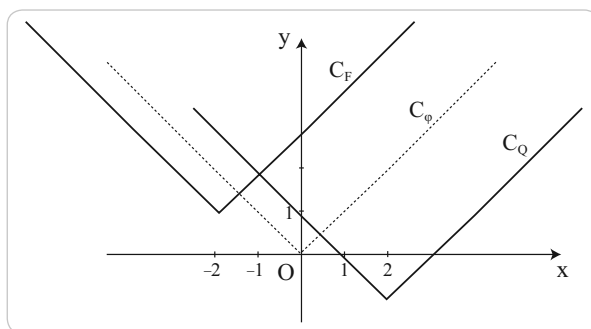


2. Χαράζουμε πρώτα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = |x|$.

Η γραφική παράσταση της $h(x) = |x + 2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά, ενώ η γραφική παράσταση της $q(x) = |x - 2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (σχήμα).



3. Χαράζουμε πρώτα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = |x|$ και στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = |x + 2|$, που, όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = |x + 2| + 1$, που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης $y = |x + 2|$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Επομένως, η γραφική παράσταση της $F(x) = |x + 2| + 1$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y = |x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (σχήμα).



Ομοίως, η γραφική παράσταση της $G(x) = |x - 2| - 1$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y = |x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω (σχήμα).

4. i. Επειδή:

$$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x^2 - 2 \cdot x + 1^2) - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 3,$$

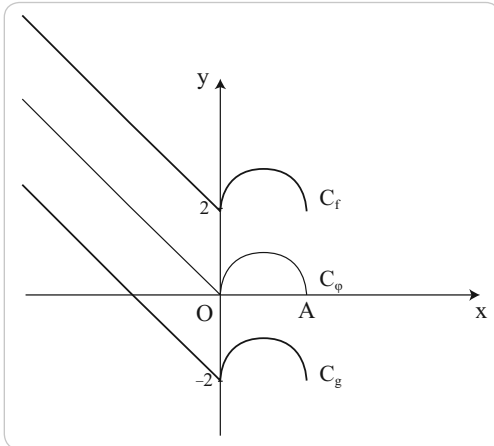
επομένως, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii. Επειδή:

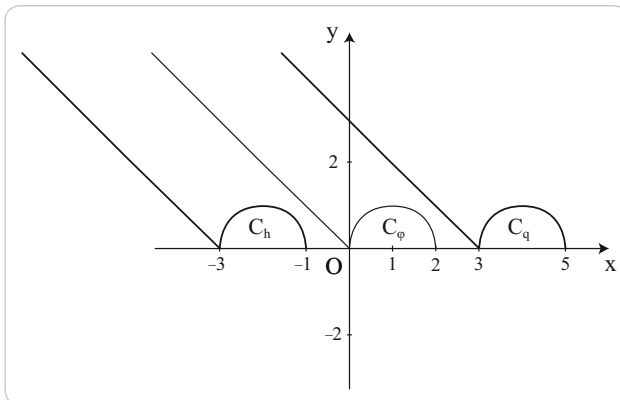
$$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 9 = -2(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 9 = -2(x - 2)^2 - 1,$$

επομένως, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

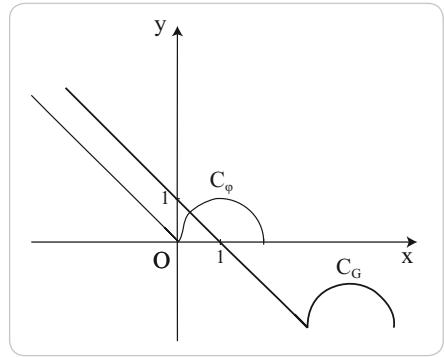
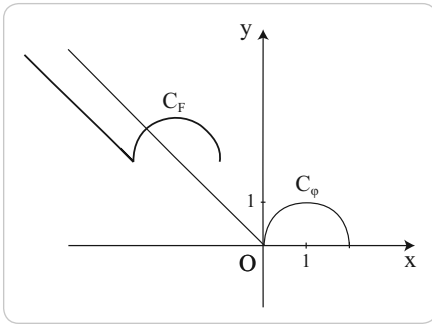
5. i.



ii.



iii.



6. i. $f(x) = 2(x - 2)^2 - 1 + 1 = 2(x - 2)^2$.
 ii. $f(x) = 2(x - 3)^2 - 1 - 2 = 2(x - 3)^2 - 3$.
 iii. $f(x) = 2(x + 2)^2 - 1 + 1 = 2(x + 2)^2$.
 iv. $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1 - 2 = 2(x + 3)^2 - 3$.

Ερωτήσεις κατανόησης

I. 1. Α, 2. Α, 3. Ψ, 4. Ψ, 5. Α, 6. Α, 7. Ψ, 8. Α, 9. Α, 10. Ψ.

II. Γ.

Κεφάλαιο 3ο: Τριγωνομετρία

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB έχουμε $\eta\mu 30^\circ = \frac{x}{6}$, οπότε $x = 6\eta\mu 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο, τώρα, $\Delta A\Gamma$ έχουμε $\epsilon\phi\omega = \frac{x}{3} = \frac{3}{3} = 1$, οπότε $\omega = 45^\circ$.

Επομένως, επειδή $\eta\mu\omega = \frac{x}{y}$, έχουμε $\eta\mu 45^\circ = \frac{3}{y}$, οπότε:

$$y = \frac{3}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{1} = 3\sqrt{2}.$$

2. Επειδή $B + \Gamma = 90^\circ$ θα είναι $A = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και είναι $\eta\mu 30^\circ = \frac{(AB)}{2}$. Άρα $(AB) = 2\eta\mu 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Επίσης, είναι $\eta\mu 60^\circ = \frac{(A\Gamma)}{2}$. Άρα $(A\Gamma) = 2\eta\mu 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

3. i. Γνωρίζουμε ότι $S = \alpha \cdot \rho$, $6 = \omega \cdot 1$, άρα $\omega = 6 \text{ rad}$.

ii. $6 = \omega \cdot 2$, άρα $\omega = 3 \text{ rad}$.

iii. $6 = \omega \cdot 3$, άρα $\omega = 2 \text{ rad}$.

4. Από τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ έχουμε:

i. Για $\mu = 30$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{30}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$. Άρα $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

ii. Για $\mu = 120$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{120}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$. Άρα $120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$.

iii. Για $\mu = 1260$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1260}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = 7 \Leftrightarrow \alpha = 7\pi$. Άρα $1260^\circ = 7\pi \text{ rad}$.

iv. Για $\mu = 1485$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1485}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{33}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{33\pi}{4}$. Άρα $-1485^\circ = -\frac{33\pi}{4} \text{ rad}$.

5. Από τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ έχουμε:

i. $\frac{\frac{\pi}{10}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 18$, άρα $\frac{\pi}{10} \text{ rad} = 18^\circ$.

$$\text{ii. } \frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 150, \text{ άρα } \frac{5\pi}{6} \text{ rad} = 150^\circ.$$

$$\text{iii. } \frac{\frac{91\pi}{3}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 5460, \text{ άρα } \frac{91\pi}{3} \text{ rad} = 5460^\circ.$$

$$\text{iv. } \frac{100}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = \frac{18000}{\pi}, \text{ άρα } 100 \text{ rad} = \frac{18000^\circ}{\pi}.$$

$$6. \text{ i. Είναι } 1830^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 30^\circ, \text{ οπότε } \eta\mu 1830^\circ = \eta\mu(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu 1830^\circ = \sigma\upsilon\nu(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ ακόμη } \epsilon\varphi 1830^\circ = \epsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sigma\varphi 1830^\circ = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}.$$

$$\text{ii. Είναι } 2940^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 60^\circ, \text{ οπότε } \eta\mu 2940^\circ = \eta\mu(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu 2940^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}, \epsilon\varphi 2940^\circ = \epsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}, \sigma\varphi 2940^\circ = \sigma\varphi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{iii. Είναι } 1980^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 180^\circ, \text{ οπότε } \eta\mu 1980^\circ = \eta\mu(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \eta\mu 180^\circ = 0, \\ \sigma\upsilon\nu 1980^\circ = \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1, \epsilon\varphi 1980^\circ = \epsilon\varphi 180^\circ = 0, \text{ ενώ δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη των } 1980^\circ.$$

$$\text{iv. Είναι } 3600^\circ = 10 \cdot 360^\circ + 0^\circ, \text{ οπότε } \eta\mu 3600^\circ = \eta\mu 0^\circ = 0, \sigma\upsilon\nu 3600^\circ = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1, \\ \epsilon\varphi 3600^\circ = \epsilon\varphi 0^\circ = 0, \text{ ενώ δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη των } 3600^\circ.$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

$$1. \text{ Στο ορθογώνιο τρίγωνο } \Delta\Pi\text{Ν έχουμε } \epsilon\varphi\omega = \frac{h}{(\Pi\Delta)}. \text{ Τότε } (\Pi\Delta) = \frac{h}{\epsilon\varphi\omega}, (1).$$

$$\text{Στο ορθογώνιο τρίγωνο } \Delta\Lambda\text{Ν έχουμε } \epsilon\varphi 70^\circ = \frac{h}{(\Delta\Lambda)}. \text{ Τότε } (\Delta\Lambda) = \frac{h}{\epsilon\varphi 70^\circ}, (2).$$

Επειδή $(\Pi\Lambda) = (\Pi\Delta) + (\Delta\Lambda)$, λόγω των (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{h}{\epsilon\varphi\omega} + \frac{h}{\epsilon\varphi 70^\circ} = 1000 \Leftrightarrow h \cdot \epsilon\varphi 70^\circ + h \cdot \epsilon\varphi\omega = 1000 \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow h(\epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi\omega) = 1000 \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{1000 \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi 70^\circ}{\epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi\omega}, (3).$$

i. Αν $\omega = 30^\circ$, τότε, λόγω της (3), είναι $h = \frac{1000 \cdot \varepsilon\varphi 30^\circ \cdot \varepsilon\varphi 70^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ + \varepsilon\varphi 30^\circ} \approx 478$.

Αν $\omega = 45^\circ$, τότε έχουμε $h = \frac{1000 \cdot \varepsilon\varphi 45^\circ \cdot \varepsilon\varphi 70^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ + \varepsilon\varphi 45^\circ} \approx 733$.

Αν $\omega = 60^\circ$, τότε έχουμε $h = \frac{1000 \cdot \varepsilon\varphi 60^\circ \cdot \varepsilon\varphi 70^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ + \varepsilon\varphi 60^\circ} \approx 1062$.

ii. Αν τώρα $h = 1000$, τότε λόγω της (3), είναι:

$$1000 = \frac{1000 \cdot \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi 70^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ + \varepsilon\varphi\omega} \Leftrightarrow 1 = \frac{\varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi 70^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ + \varepsilon\varphi\omega} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi 70^\circ = \varepsilon\varphi 70^\circ \cdot \varepsilon\varphi\omega$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega(\varepsilon\varphi 70^\circ - 1) = \varepsilon\varphi 70^\circ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi 70^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ - 1} \approx 1,5723$$

και από τους τριγωνομετρικούς πίνακες βρίσκουμε $\omega \approx 58^\circ$.

2. i. Είναι $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και επειδή $\widehat{\Gamma A B} = 45^\circ$ θα είναι $(A\Gamma) = (B\Gamma)$. Έχουμε όμως:

$$\eta\mu 45^\circ = \frac{(A\Gamma)}{(AB)} = \frac{(A\Gamma)}{2}, \text{ οπότε } (A\Gamma) = 2\eta\mu 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

και επειδή $(A\Gamma) = (B\Gamma)$, θα είναι $(B\Gamma) = \sqrt{2}$.

ii. Είναι $\widehat{A\Delta B} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB , οπότε έχουμε:

$$\eta\mu 22,5^\circ = \frac{(B\Delta)}{(AB)} = \frac{(B\Delta)}{2}.$$

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAB και ΔAE είναι ίσα διότι έχουν $A\Delta = A\Delta$ (κοινή) και $\widehat{A B} = \widehat{A E} = 22,5^\circ$, τότε θα έχουν $\Delta B = \Delta E$.

Έτσι $(EB) = 2(B\Delta) = 4\eta\mu 22,5^\circ$.

iii. Από την ισότητα των τριγώνων ΔAB και ΔAE προκύπτει $(AE) = (AB) = 2$.

Άρα $(E\Gamma) = (AE) - (A\Gamma) = 2 - \sqrt{2}$.

iv. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓEB (σχήμα) έχουμε:

$$(EB)^2 = (\Gamma B)^2 + (\Gamma E)^2 = (\sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{2})^2.$$

Άρα $EB = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

$$\text{v. Έχουμε } \eta\mu 22,5^\circ = \frac{(\Delta B)}{2} = \frac{(\widehat{EB})}{2} = \frac{(\widehat{EB})}{4} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

vi. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ημίτονο των γωνιών $\frac{22,5^\circ}{2}$, $\frac{22,5^\circ}{4}$ κ.τ.λ., αρκεί να διχοτομήσουμε τη γωνία $\widehat{B\Delta\Delta}$ κ.τ.λ.

$$3. \bullet \text{ Από το τρίγωνο } AB\Gamma \text{ έχουμε } \eta\mu 30^\circ = \frac{6}{(\widehat{A\Gamma})} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{(\widehat{A\Gamma})} \Leftrightarrow (\widehat{A\Gamma}) = 12 \text{ μονάδες μήκους.}$$

• Από τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ έχουμε $\widehat{B\Delta\Delta} = 30^\circ$. Επομένως:

$$\epsilon\varphi 30^\circ = \frac{(\widehat{B\Delta})}{(\widehat{AB})} \Leftrightarrow \epsilon\varphi 30^\circ = \frac{(\widehat{B\Delta})}{6} \Leftrightarrow (\widehat{B\Delta}) = 6 \cdot \epsilon\varphi 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Άρα $B\Delta = 2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους.

$$\bullet \text{ Από το τρίγωνο } AB\Gamma \text{ έχουμε } \eta\mu 60^\circ = \frac{(\widehat{B\Gamma})}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\widehat{B\Gamma})}{12}.$$

Άρα $(B\Gamma) = 6\sqrt{3}$ μονάδες μήκους.

$$\bullet \text{ Έχουμε } (\widehat{\Gamma\Delta}) = (B\Gamma) - (B\Delta) = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Άρα $(\widehat{\Gamma\Delta}) = (\widehat{\Delta A}) = 4\sqrt{3}$ μονάδες μήκους.

Επομένως, περίμετρος $= 12 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12 + 8\sqrt{3}$ μονάδες μήκους.

$$\text{Εμβαδόν} = \frac{1}{2} (\widehat{\Delta\Gamma}) \cdot (\widehat{AB}) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

4. Όπως είναι ο γνωστό, ο λεπτοδείκτης εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε χρόνο 1 ώρας ή 3600 δευτερολέπτων. Διαγράφει δηλαδή γωνία 2π rad σε 3600 sec.

Επομένως σε 1 sec διαγράφει γωνία $\frac{2\pi}{3600}$ rad.

Αν το μήκος του λεπτοδείκτη είναι ίσο με ρ , τότε σύμφωνα με τον τύπο $S = \alpha \cdot \rho$, το άκρο του λεπτοδείκτη σε 1 sec θα διαγράψει τόξο μήκους $\frac{2\pi}{3600} \cdot \rho$.

$$\text{Για να είναι το μήκος αυτό ίσο με } 1 \text{ mm αρκεί } \frac{2\pi}{3600} \cdot \rho = 1 \text{ mm} \Leftrightarrow \rho = \frac{3600}{2\pi} \text{ mm} \approx 573 \text{ mm.}$$

3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν στην ισότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ αντικαταστήσουμε το $\eta\mu x$ με $\frac{3}{5}$ βρίσκουμε:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Διότι για $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
ισχύει $\sigma\upsilon\nu x < 0$.

Επομένως $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-3}{4}$ και $\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-4}{3}$.

2. Αν στην ισότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ αντικαταστήσουμε το $\sigma\upsilon\nu x$ με $\frac{-2}{3}$ βρίσκουμε:

$$\eta\mu^2 x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \frac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Διότι για $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
ισχύει $\eta\mu x < 0$.

Επομένως $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\sigma\phi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. • $\sigma\phi x = \frac{1}{\epsilon\phi x} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$

• Είναι $\epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sigma\upsilon\nu x, (1).$

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε:

$$\frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 3 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x = 3$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Διότι για $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
ισχύει $\sigma\upsilon\nu x > 0$.

• Από την (1) παίρνουμε $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2}.$

4. • $\epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\phi x} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

• Είναι $\sigma\phi x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \eta\mu x, (1).$

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε:

$$\eta\mu^2 x + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \eta\mu x \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \frac{4}{5} \eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 5$$

$$\Leftrightarrow 9\eta\mu^2 x = 5 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Από την (1), τώρα, παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}.$

5. • Είναι $\sigma\phi x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -2\eta\mu x.$

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε:

$$\eta\mu^2 x + (-2\eta\mu x)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Διότι για $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
ισχύει $\eta\mu x < 0$.

• Από την (1) τώρα παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu x = -2 \cdot \frac{-\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

Επομένως η αριθμητική τιμή της παράστασης $\frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$ ισούται με:

$$\frac{2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}}{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{\cancel{5}}} = -\frac{4}{5+2\sqrt{5}} = \frac{-4(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} = \frac{8\sqrt{5}-20}{5}.$$

6. Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, αν υποθέσουμε ότι:

- i. $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε θα ισχύει $0^2 + 0^2 = 1$, δηλαδή $0 = 1$, που είναι άτοπο.
- ii. $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$, τότε θα ισχύει $1^2 + 1^2 = 1$, δηλαδή $2 = 1$, που είναι άτοπο.
- iii. $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$, τότε $\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 = 1$, που είναι αληθές.

Άρα, υπάρχει τέτοια τιμή του x .

7. Αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση του $M(x, y)$ από την αρχή $O(0, 0)$ είναι ίση με 3.

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι (ΟΜ)} \quad \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{(3\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (3\eta\mu\theta)^2} = \sqrt{9\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9\eta\mu^2\theta} \\ &= \sqrt{9(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta)} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$