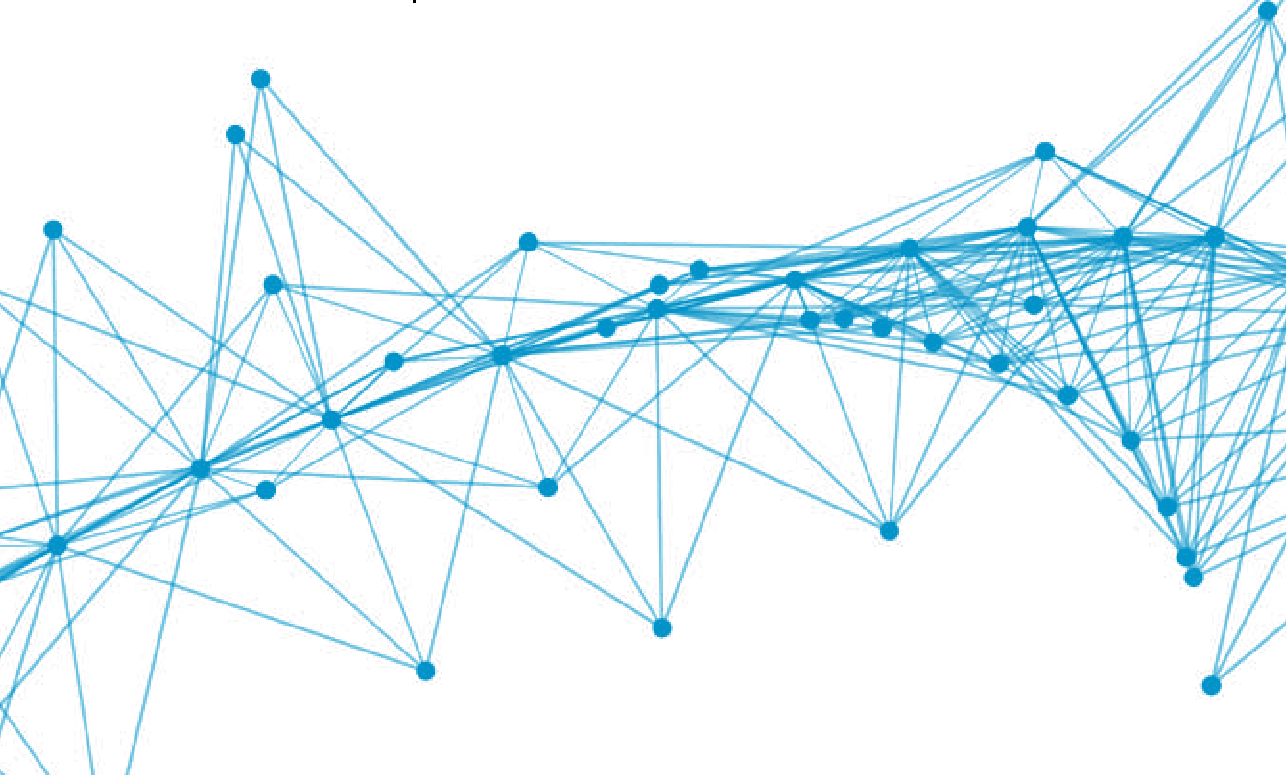
Θοδωρής Πενέσης – Διονύσης Συνοδινός



ΦΥΣΙΚΗ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών

Α΄ ΤΟΜΟΣ

ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΚΥΜΑΤΑ -
ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ

Εκπαιδευτικά βιβλία για το Λύκειο

Θοδωρής Πενέσης - Διονύσης Συνοδινός

Φυσική Γ΄ Λυκείου - Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών

Α΄ Τόμος

ISBN: 978-960-563-120-8

Επιμέλεια έκδοσης:
Γιώτα Γκότση

Γραφιστική επιμέλεια και σελιδοποίηση:
DTP Ελληνοεκδοτικής, Λαέρτης Βίλα

Ηλεκτρονική σχεδίαση σχημάτων:
Θοδωρής Πενέσης - Διονύσης Συνοδινός - Λαέρτης Βίλα

Σχεδίαση εξωφύλλου:
DTP Ελληνοεκδοτικής, Λαέρτης Βίλα

Πρώτη έκδοση: Ιούνιος 2016
Παρούσα έκδοση: Ιούνιος 2016, Κ.Ε.ΕΛ: 23/16

Κεντρική διάθεση:

Δ.Β. ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ Α.Ε.Ε.Ε.
ΑΝΩΝΥΜΗ ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Ιπποκράτους 82, Αθήνα, 106 80
Τηλ. & Fax: 210 3613676 – 210 3640632
www.ellinoekdotiki.gr, e-mail: info@ellinoekdotiki.gr

Επικοινωνία με συγγραφείς:
Θοδωρής Πενέσης - penessis@otenet.gr | Διονύσης Συνοδινός - spydenn@yahoo.gr

Πρόλογος

Με το έργο αυτό απευθυνόμαστε στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου οι οποίοι ακολουθούν την Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών.

Βασική μας επιδίωξη είναι να προσφέρουμε στους μαθητές την κατάλληλη θεωρητική υποστήριξη για τη βαθύτερη κατανόηση της εξεταστέας ύλης του μαθήματος, συμβάλλοντας με τον τρόπο αυτό ουσιαστικά στην επιτυχία τους στις Πανελλαδικές εξετάσεις. Με γνώμονα την παραπάνω επιδίωξη, σχεδιάσαμε τη δομή και οργανώσαμε την ύλη του Α΄ τόμου, ώστε να αποτελεί εργαλείο για μια ολοκληρωμένη και αποδοτική μελέτη.

Ο **Α΄ τόμος** περιλαμβάνει τα κεφάλαια: **Κρούσεις**, **Μηχανικές ταλαντώσεις**, **Κύματα** και οργανώνεται σε ενότητες. Κάθε ενότητα περιλαμβάνει:

- Θεωρία
- Μεθοδολογία επίλυσης ασκήσεων και παραδείγματα εφαρμογής
- Λυμένες ασκήσεις
- Θέματα για απάντηση (Θέματα πολλαπλής επιλογής, Θέματα του τύπου Σωστό/Λάθος, Θέματα πολλαπλής επιλογής με αιτιολόγηση)
- Ασκήσεις προς λύση
- Προβλήματα προς λύση

Ο Α΄ τόμος συνοδεύεται από **Βιβλίο λύσεων** το οποίο περιλαμβάνει τις αναλυτικές απαντήσεις – λύσεις των θεμάτων, των ασκήσεων και των προβλημάτων του κυρίως βιβλίου και προσφέρεται δωρεάν.

Έχουμε την πεποίθηση ότι το βιβλίο αυτό ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις τόσο των μαθητών/-τριών για μια ολοκληρωμένη μελέτη και προετοιμασία όσο και των συναδέλφων καθηγητών για την αποτελεσματικότερη οργάνωση της διδασκαλίας τους.

Ιούνιος 2016

Οι συγγραφείς
Θοδωρής Πενέσης
Διονύσης Συνοδινός
Καθηγητές Φυσικής

Περιεχόμενα

Ενότητα 4η: Ειδικότερα θέματα στην απλή αρμονική ταλάντωση

Ενότητα 5η: Απλή αρμονική ταλάντωση - Κρούσεις

Ενότητα 6η: Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις

Ενότητα 7η: Εξαναγκασμένες μηχανικές ταλαντώσεις

Ενότητα 8η: Σύνθεση ταλαντώσεων – Α΄ είδος σύνθεσης

Ενότητα 9η: Σύνθεση ταλαντώσεων – Β΄ είδος σύνθεσης

Κεφάλαιο 3ο: Κύματα

Ενότητα 10η: Μηχανικά κύματα

Ενότητα 11η: Συμβολή δύο κυμάτων στην επιφάνεια υγρού

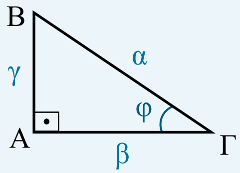
Ενότητα 12η: Στάσιμα κύματα

Εισαγωγικό ένθετο

Μαθηματικό συμπλήρωμα

1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας φ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{A} = 90^{o}\right)$ με πλευρές α, β και γ ισχύουν οι σχέσεις:



$$\etaμφ = \frac{γ}{α} \qquad συνφ = \frac{β}{α} \qquad εφφ = \frac{γ}{β} \qquad σφφ = \frac{β}{γ}$$

2. Στον πίνακα 1 αναγράφονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ορισμένων βασικών γωνιών.

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
ημφ	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνφ	1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφφ	0		0		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
σφφ		0		0		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Πίνακας 1

3. Στον πίνακα 2, για $\kappa \in Z$, αναγράφονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί χαρακτηριστικών γωνιών.

φ	$2\kappa\pi$	$2\kappa\pi+\pi$	$2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$	$2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}$ ή $\left(2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\right)$
ημφ	0	0	1	–1
συνφ	1	–1	0	0
εφφ	0	0	–	–
σφφ	–	–	0	0

Πίνακας 2

4. Στον πίνακα 3 αναγράφονται οι λύσεις βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων.

Τριγωνομετρική εξίσωση	Λύση
$\eta\mu\phi=\eta\mu\theta$	$\phi=2\kappa\pi+\theta$ ή $\phi=2\kappa\pi+\pi-\theta,\ \ \kappa\in Z$
$\sigma\upsilon\nu\phi=\sigma\upsilon\nu\theta$	$\phi=2\kappa\pi+\theta$ ή $\phi=2\kappa\pi-\theta,\ \ \kappa\in Z$
$\varepsilon\phi\phi=\varepsilon\phi\theta$	$\phi=\kappa\pi+\theta,\ \ \kappa\in Z$

Πίνακας 3

5. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

- Όταν στη γωνία ενός τριγωνομετρικού αριθμού υπάρχει $2\kappa\pi$, με $\kappa \in Z$, τότε παραλείπουμε το $2\kappa\pi$ και γράφουμε την απλή γωνία, χωρίς να αλλάξουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό. Στη συνέχεια, ελέγχουμε το πρόσημο με βάση τον τριγωνομετρικό κύκλο.
- Όταν στη γωνία ενός τριγωνομετρικού αριθμού υπάρχει $\kappa\pi/2$, όπου κ περιττός αριθμός, τότε παραλείπουμε το $\kappa\pi/2$ και γράφουμε την απλή γωνία, αλλάζοντας τον τριγωνομετρικό αριθμό. Στη συνέχεια, ελέγχουμε το πρόσημο με βάση τον τριγωνομετρικό κύκλο.

Στον πίνακα 4 αναγράφονται παραδείγματα αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο.

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=\sigma\upsilon\nu\phi$	$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)=\sigma\upsilon\nu\phi$	$\eta\mu(\pi-\phi)=\eta\mu\phi$
$\eta\mu(\pi+\phi)=-\eta\mu\phi$	$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\phi\right)=-\sigma\upsilon\nu\phi$	$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\phi\right)=-\sigma\upsilon\nu\phi$
$\eta\mu(2\pi-\phi)=-\eta\mu\phi$	$\eta\mu(2\pi+\phi)=\eta\mu\phi$	
$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=\eta\mu\phi$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)=-\eta\mu\phi$	$\sigma\upsilon\nu(\pi-\phi)=-\sigma\upsilon\nu\phi$
$\sigma\upsilon\nu(\pi+\phi)=-\sigma\upsilon\nu\phi$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\phi\right)=-\eta\mu\phi$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\phi\right)=\eta\mu\phi$
$\sigma\upsilon\nu(2\pi-\phi)=\sigma\upsilon\nu\phi$	$\sigma\upsilon\nu(2\pi+\phi)=\sigma\upsilon\nu\phi$	

Πίνακας 4

6. Στον πίνακα 5 αναγράφονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α.

$ημ2α = 2ημα \cdot συνα$	$συν2α = 1 - 2ημ^2α$	$εφ2α = \dfrac{2εφα}{1-εφ^2α}$

Πίνακας 5

7. Στον πίνακα 6 αναγράφονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του αθροίσματος και της διαφοράς των γωνιών α και β.

$συν(α+β) = συνα \cdot συνβ - ημα \cdot ημβ$	$ημ(α+β) = ημα \cdot συνβ + συνα \cdot ημβ$
$συν(α-β) = συνα \cdot συνβ + ημα \cdot ημβ$	$ημ(α-β) = ημα \cdot συνβ - συνα \cdot ημβ$

Πίνακας 6

8. Στον πίνακα 7 αναγράφονται οι τύποι μετασχηματισμού του αθροίσματος σε γινόμενο.

$συνα + συνβ = 2συν\dfrac{α+β}{2}συν\dfrac{α-β}{2}$	$ημα + ημβ = 2ημ\dfrac{α+β}{2}συν\dfrac{α-β}{2}$
$συνα - συνβ = -2ημ\dfrac{α-β}{2}συν\dfrac{α+β}{2}$	$ημα - ημβ = 2ημ\dfrac{α-β}{2}συν\dfrac{α+β}{2}$

Πίνακας 7

Κεφάλαιο 1ο: Κρούσεις

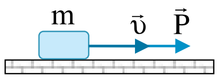
Εισαγωγικό ένθετο
Προαπαιτούμενες γνώσεις

Α. Ορμή σώματος $\left(\vec{P}\right)$

Η ορμή $\vec{P}$ ενός σώματος είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}$$

όπου m η μάζα και $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σώματος. Όπως γίνεται φανερό από την προηγούμενη διανυσματική εξίσωση, η ορμή του σώματος έχει μέτρο $P = m\upsilon$ και κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα



Η μονάδα μέτρησης της ορμής στο S.I. είναι το 1 kg·m/s.

Β. Σχέση κινητικής ενέργειας και ορμής $\left(K = f(P)\right)$

Η κινητική ενέργεια K και το μέτρο P της ορμής ενός σώματος μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \text{και} \quad P = m\upsilon$$

Η πρώτη σχέση γράφεται:

$$K = \frac{(m\upsilon)^2}{2m} \quad \text{ή, λόγω της δεύτερης σχέσης,} \quad K = \frac{P^2}{2m}$$

Γ. Ορμή συστήματος σωμάτων $\left(\vec{P}_{ολ}\right)$

Η ορμή $\vec{P}_{ολ}$ ενός συστήματος σωμάτων ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα.

Έτσι, η ορμή ενός συστήματος το οποίο αποτελείται από ν σώματα με ορμές $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$,..., $\vec{P}_ν$ αντίστοιχα, είναι:

$$\vec{P}_{ολ} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_ν$$

1η περίπτωση: Οι ορμές των σωμάτων του συστήματος έχουν ίδια διεύθυνση

Για να βρίσκουμε την ορμή ενός συστήματος σωμάτων των οποίων οι ορμές έχουν ίδια διεύθυνση, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1ο βήμα: Κατασκευάζουμε σχήμα στο οποίο απεικονίζονται τα διανύσματα των ορμών των σωμάτων του συστήματος.

2ο βήμα: Ορίζουμε αυθαίρετα θετική φορά επάνω στην κοινή διεύθυνση των ορμών των σωμάτων του συστήματος.

3ο βήμα: Με βάση το σχήμα, μετατρέπουμε τη διανυσματική εξίσωση

$$\vec{P}_{ολ} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_ν$$

σε αλγεβρική

$$P_{ολ} = P_1 + P_2 + \ldots + P_ν$$

και, στη συνέχεια, αντικαθιστούμε τις αλγεβρικές τιμές των ορμών των σωμάτων του συστήματος.

Κατά την αντικατάσταση αυτή, λαμβάνουμε θετικές τις ορμές των σωμάτων που έχουν φορά όμοια με αυτήν που έχουμε ορίσει ως θετική και αρνητικές τις ορμές των σωμάτων που έχουν αντίθετη φορά.

Εάν η αλγεβρική τιμή της ορμής του συστήματος προκύψει θετική, τότε η ορμή του συστήματος έχει φορά όμοια με αυτήν που έχουμε ορίσει ως θετική.

Αντίθετα, εάν η αλγεβρική τιμή της ορμής του συστήματος προκύψει αρνητική, τότε η ορμή του συστήματος έχει φορά αντίθετη από αυτήν που έχουμε ορίσει ως θετική.

Παράδειγμα 1

Δύο σώματα, με μάζες $m_1 = 2$ kg και $m_2 = 1$ kg και ταχύτητες με μέτρα $\upsilon_1 = 3$ m/s και $\upsilon_2 = 10$ m/s αντίστοιχα, κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις επάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Να υπολογίσετε την ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων.

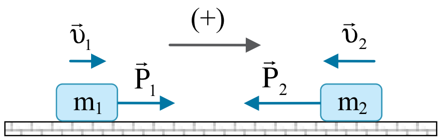
Λύση

Επειδή οι ορμές των σωμάτων έχουν ίδια διεύθυνση, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα, η διανυσματική εξίσωση

$$\vec{P}_{ολ} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

μετατρέπεται σε αλγεβρική. Έχουμε:

$$P_{ολ} = P_1 + P_2 = m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 \quad ή \quad \mathbf{P_{ολ} = -4\ kg{\cdot}m/s}$$



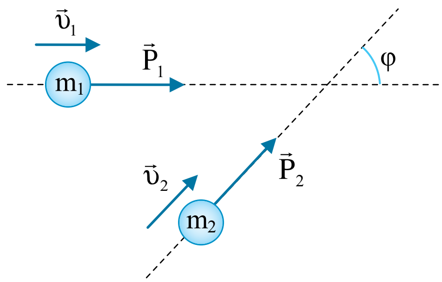
Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, η ορμή του συστήματος έχει μέτρο 4 kg·m/s και φορά αντίθετη από αυτήν που έχουμε ορίσει ως θετική.

2η περίπτωση: Οι ορμές των σωμάτων του συστήματος έχουν διαφορετική διεύθυνση

Για να βρίσκουμε την ορμή ενός συστήματος σωμάτων των οποίων οι ορμές έχουν διαφορετική διεύθυνση: είτε συνθέτουμε διανυσματικά σύμφωνα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, είτε αναλύουμε τις ορμές των σωμάτων του συστήματος σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, προσδιορίζουμε τη συνισταμένη ορμή σε κάθε άξονα και στη συνέχεια συνθέτουμε διανυσματικά σύμφωνα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου.

Παράδειγμα 2

Δύο σώματα, με μάζες $m_1 = 2$ kg και $m_2 = 1$ kg και ταχύτητες με μέτρα $υ_1 = 3$ m/s και $υ_2 = 6$ m/s αντίστοιχα, κινούνται σε οριζόντιο δάπεδο σε διευθύνσεις που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $φ = 60^o$, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Να υπολογίσετε την ορμή του συστήματος.

Λύση

1ος τρόπος

Το μέτρο της ορμής του πρώτου και του δεύτερου σώματος είναι αντίστοιχα:

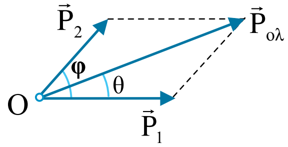
$$P_1 = m_1υ_1 = 6 \text{ kg·m/s} \quad \text{και} \quad P_2 = m_2υ_2 = 6 \text{ kg·m/s}$$

Το μέτρο της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων δίνεται από τη σχέση:

$$P_{ολ} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2συν60^o} = \sqrt{6^2 + 6^2 + 2\cdot 6\cdot 6\cdot (1/2)} \text{ kg·m/s}$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{P_{ολ} = 6\sqrt{3} \text{ kg·m/s}}$$

Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα, η γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{P}_{ολ}$ με τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{P}_1$ δίνεται από τη σχέση:



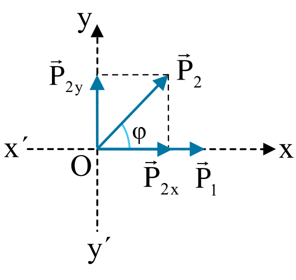
$$εφθ = \frac{P_2 ημφ}{P_1 + P_2 συνφ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1+1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ή \quad θ = 30^o$$

Σημείωση

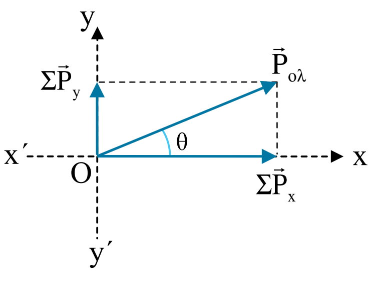
Στη συγκεκριμένη περίπτωση, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη γωνία θ και με τον εξής απλό τρόπο: Επειδή είναι $P_1 = P_2$, το τετράπλευρο του σχήματος είναι ρόμβος (οι διαδοχικές πλευρές είναι ίσες και οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες). Επομένως, η διαγώνιος $\vec{P}_{ολ}$ του ρόμβου διχοτομεί τη γωνία φ, δηλαδή είναι $θ = 30^o$.

2ος τρόπος

Αναλύουμε την ορμή $\vec{P}_2$ σε δύο συνιστώσες: την $\vec{P}_{2x}$ και την $\vec{P}_{2y}$, όπως απεικονίζεται στο σχήμα α.



(α)



(β)

Η συνισταμένη ορμή στον άξονα x′x είναι:

$$ΣP_x = P_1 + P_{2x} = P_1 + P_2 συνφ = (6 + 6 \cdot 0{,}5)\ kg \cdot m/s = 9\ kg \cdot m/s$$

Η συνισταμένη ορμή στον άξονα y′y είναι:

$$\Sigma P_y = P_{2y} = P_2 \eta\mu\varphi = 6\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{kg·m/s} = 3\sqrt{3}\ \text{kg·m/s}$$

Το μέτρο της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων δίνεται από τη σχέση:

$$P_{o\lambda} = \sqrt{\left(\Sigma P_x\right)^2 + \left(\Sigma P_y\right)^2} = \sqrt{81+27}\ \text{kg·m/s} \quad \text{ή} \quad \mathbf{P_{o\lambda} = 6\sqrt{3}\ kg·m/s}$$

Σύμφωνα με το σχήμα β, η γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{P}_{o\lambda}$ με την οριζόντια διεύθυνση δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\Sigma P_y}{\Sigma P_x} = \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \theta = 30^{o}$$

Δ. Αρχή διατήρησης ορμής (Α.Δ.Ο.)

Εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων ονομάζουμε τις δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν τα σώματα του συστήματος.

Εξωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων ονομάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος από σώματα τα οποία δεν ανήκουν στο σύστημα.

Μονωμένο σύστημα ονομάζουμε το σύστημα σωμάτων επάνω στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή, εάν ασκούνται, έχουν συνισταμένη ίση με μηδέν.

Η αρχή διατήρησης της ορμής διατυπώνεται ως εξής:

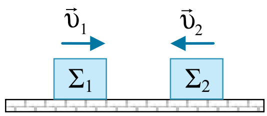
Η ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρείται.

Η διανυσματική εξίσωση η οποία εκφράζει την προηγούμενη αρχή είναι η ακόλουθη:

$$\vec{P}^{o\lambda}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}^{o\lambda}_{\tau\varepsilon\lambda}$$

Παράδειγμα 3

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του ακόλουθου σχήματος, με μάζες $m_1 = 1$ kg και $m_2 = 4$ kg, κινούνται επάνω στο ίδιο λείο οριζόντιο δάπεδο και συγκρούονται μετωπικά έχοντας ακριβώς πριν από την κρούση ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ αντίθετης φοράς, με μέτρα 3 m/s και 5 m/s αντίστοιχα.

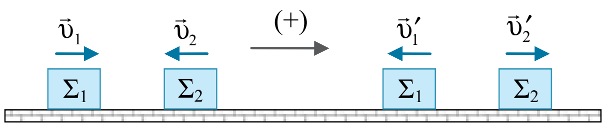


Το σώμα Σ_1, αμέσως μετά τη σύγκρουσή του με το σώμα Σ_2, αποκτά ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1'$ μέτρου 1 m/s και αντίθετης φοράς από την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$.

Θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά της ταχύτητας του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση, να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2.

Λύση

Έστω ότι το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2'$ και κινείται προς τη θετική φορά, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Πριν από την κρούση Μετά την κρούση

Επειδή το σύστημα είναι μονωμένο, ισχύει:

$$\vec{P}^{\,\text{ολ}}_{\text{πριν}} = \vec{P}^{\,\text{ολ}}_{\text{μετά}}$$

ή, επειδή οι ορμές των σωμάτων πριν και μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση,

$$P^{\text{ολ}}_{\text{πριν}} = P^{\text{ολ}}_{\text{μετά}} \quad \text{ή} \quad m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = -m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$$

$$\text{ή} \quad \upsilon_2' = \frac{m_1(\upsilon_1' + \upsilon_1) - m_2\upsilon_2}{m_2} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\upsilon_2' = -4\ m/s}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι μετά την κρούση το σώμα Σ_2 κινείται αντίθετα από τη φορά που έχουμε θεωρήσει ως θετική.

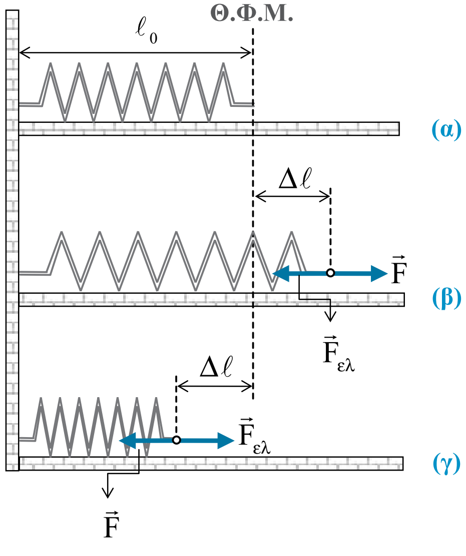
Ε. Νόμος ελαστικότητας (Νόμος Hooke)

Ο νόμος της ελαστικότητας διατυπώνεται ως εξής:

Οι ελαστικές παραμορφώσεις των σωμάτων είναι ανάλογες των δυνάμεων που τις προκαλούν.

Η παραμόρφωση ενός σώματος είναι ελαστική, όταν το σώμα επανέρχεται στην αρχική του μορφή μόλις σταματήσει να ενεργεί σε αυτό η δύναμη που προκάλεσε την παραμόρφωσή του.

Για παράδειγμα, το ελατήριο του ακόλουθου σχήματος με τη βοήθεια της δύναμης $\vec{F}$ που του ασκούμε υφίσταται ελαστική παραμόρφωση.



Η παραμόρφωση $\Delta\ell$ του ελατηρίου μπορεί να είναι είτε επιμήκυνση (βλ. σχήμα β) είτε συσπείρωση (βλ. σχήμα γ) και μετριέται πάντοτε από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (Θ.Φ.Μ.).

Η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι η θέση του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0.

Η μαθηματική έκφραση του νόμου της ελαστικότητας για τα ελατήρια είναι:

$$F = K\Delta\ell$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας **Κ** ονομάζεται **σταθερά του ελατηρίου** και είναι χαρακτηριστική για κάθε ελατήριο.

Η σταθερά του ελατηρίου εξαρτάται:

- από το υλικό κατασκευής του ελατηρίου
- και από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του (μήκος, διατομή σύρματος, διάμετρο και απόσταση σπειρών).

Μονάδα μέτρησης της σταθεράς του ελατηρίου στο S.I. είναι το **1 N/m**.

Η δύναμη του ελατηρίου $\left(\vec{F}_{ελ}\right)$

Επειδή ασκούμε στο ελατήριο δύναμη $\vec{F}$, το ελατήριο ασκεί σε εμάς, λόγω δράσης-αντίδρασης, δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ αντίθετης κατεύθυνσης με μέτρο:

$$F_{ελ} = F \quad ή \quad F_{ελ} = K\Delta\ell$$

Η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ που ασκεί ένα ελατήριο σε σώμα το οποίο είναι προσδεδεμένο στο ελεύθερο άκρο του έχει πάντοτε κατεύθυνση προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Για τον λόγο αυτόν, η αλγεβρική τιμή της μπορεί να γραφτεί: $F_{ελ} = -K\Delta\ell$.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου $(U_{ελ})$

Η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο εξαιτίας της παραμόρφωσής του κατά $\Delta\ell$ δίνεται από τη σχέση:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}K\Delta\ell^2$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου ($W_{F\varepsilon\lambda}$)

Επειδή η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική (το έργο μιας συντηρητικής δύναμης κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής ισούται με μηδέν), το έργο που παράγει ή καταναλώνει κατά τη μεταφορά του σημείου εφαρμογής της από μια θέση Α σε μια θέση Β ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου. Δηλαδή, είναι:

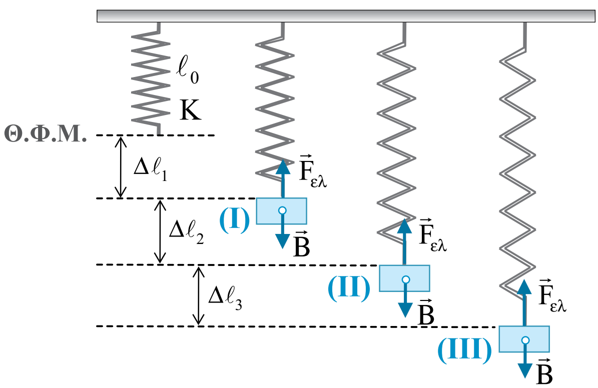
$$W_{F\varepsilon\lambda}^{A\to B} = -\Delta U_{AB} \quad \text{ή} \quad W_{F\varepsilon\lambda}^{A\to B} = -(U_B - U_A) \quad \text{ή, πιο απλά,} \quad \boxed{W_{F\varepsilon\lambda}^{A\to B} = U_A - U_B}$$

Παράδειγμα 4

Το σώμα του ακόλουθου σχήματος ταλαντώνεται σε κατακόρυφο επίπεδο, προσδεδεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K = 200$ N/m. Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση (Ι), το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1 = 0{,}1$ m. Η θέση (ΙΙ) απέχει από τη θέση (Ι) απόσταση $\Delta\ell_2 = 0{,}1$ m και η θέση (ΙΙΙ) απέχει από τη θέση (ΙΙ) απόσταση $\Delta\ell_3 = 0{,}1$ m. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του ελατηρίου για τη μετάβαση του σώματος:

α. Από τη θέση Ι στη θέση ΙΙ.

β. Από τη θέση ΙΙ στη θέση ΙΙΙ.



Λύση

α. Το ζητούμενο έργο υπολογίζεται αφαιρώντας από την αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου την τελική. Δηλαδή είναι:

$$W_{F\varepsilon\lambda}^{(I)\to(II)} = U_{(I)} - U_{(II)} = \frac{1}{2}K\Delta\ell_1^2 - \frac{1}{2}K\left(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2\right)^2 = -\,\mathbf{3\ J}$$

β. Το ζητούμενο έργο είναι:

$$W_{F\varepsilon\lambda}^{(II)\to(III)} = U_{(II)} - U_{(III)} = \frac{1}{2}K\left(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2\right)^2 - \frac{1}{2}K\left(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3\right)^2 = -\,\mathbf{5\ J}$$

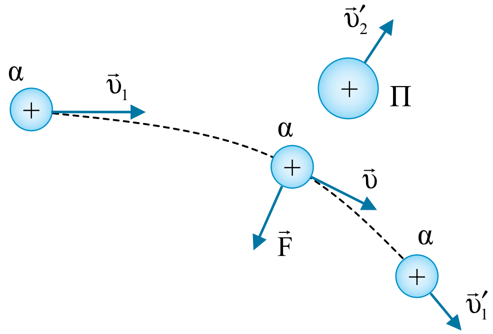
Θεωρία

Γενικά περί κρούσης

Κρούση στη Μηχανική ονομάζουμε το φαινόμενο κατά το οποίο δύο σώματα συγκρούονται. Η κινητική κατάσταση των συγκρουόμενων σωμάτων ή, τουλάχιστον, ενός από αυτά, μεταβάλλεται απότομα, εξαιτίας ισχυρών δυνάμεων που αναπτύσσονται ανάμεσα στα σώματα στη διάρκεια της επαφής τους.

Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται **ωστικές δυνάμεις** ή **δυνάμεις κρούσης**, είναι πολύπλοκες και η ακριβής περιγραφή τους στις περισσότερες περιπτώσεις είναι αδύνατη. Κατά κύριο λόγο, οι μεταβολές στην κινητική κατάσταση των συγκρουόμενων σωμάτων οφείλονται στις ωστικές δυνάμεις. Άλλες δυνάμεις που πιθανόν να δρουν στα σώματα στη διάρκεια της σύγκρουσής τους, όπως τα βάρη τους ή οι τριβές, προκαλούν ασήμαντες μεταβολές στην κινητική κατάσταση των σωμάτων.

Η έννοια της κρούσης επεκτείνεται και στον μικρόκοσμο, συμπεριλαμβάνοντας κάθε φαινόμενο όπου τα «συγκρουόμενα» σωμάτια δεν έρχονται σε επαφή μεταξύ τους, αλλά αλληλεπιδρούν με ισχυρές δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα.



Για παράδειγμα, όταν ένας πυρήνας ηλίου (σωμάτιο α) κινείται προς έναν άλλο πυρήνα Π (βλ. παραπάνω σχήμα), οι απωστικές δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν οι δύο πυρήνες, όταν βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, είναι ασθενείς και, όταν πλησιάζουν, είναι ισχυρότατες, με συνέπεια η κινητική κατάσταση των δύο πυρήνων να μεταβάλλεται απότομα.

Στη σύγχρονη Φυσική, το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **σκέδαση**.

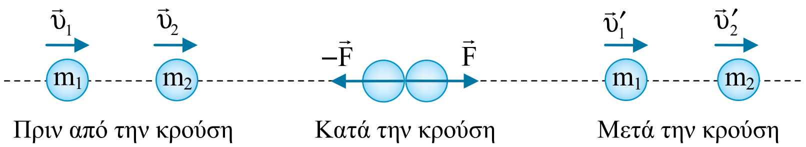
Α. Ταξινόμηση κρούσεων

Α1. 1ο κριτήριο ταξινόμησης: διεύθυνση κίνησης σωμάτων πριν από τη σύγκρουση

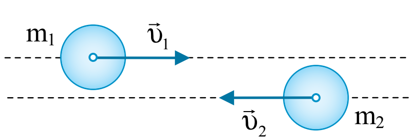
Με κριτήριο τη διεύθυνση στην οποία κινούνται τα σώματα πριν συγκρουστούν, οι κρούσεις διακρίνονται σε κεντρικές (ή μετωπικές), έκκεντρες και πλάγιες.

α. **Κεντρική** ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται **βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία**.

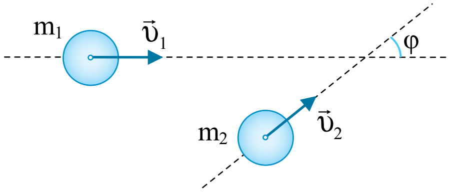
Όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα, στην ιδιαίτερη περίπτωση της κεντρικής κρούσης δύο σφαιρών, τα διανύσματα των ταχυτήτων τους θα βρίσκονται, τόσο πριν όσο και μετά την κρούση, επάνω στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας των δύο σφαιρών – διάκεντρος σφαιρών.



β. **Έκκεντρη** ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι **παράλληλα**, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



γ. **Πλάγια** ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται έχουν **τυχαίες διευθύνσεις**, όπως δείχνει το ακόλουθο σχήμα.



Α2. 2ο κριτήριο ταξινόμησης: διατήρηση κινητικής ενέργειας του συστήματος σωμάτων που συγκρούονται

Με κριτήριο τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται, οι κρούσεις διακρίνονται σε ελαστικές και ανελαστικές.

α. **Ελαστική** ονομάζεται η κρούση κατά την οποία η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται διατηρείται.

β. **Ανελαστική** ονομάζεται η κρούση κατά την οποία ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται μετατρέπεται σε θερμότητα και εκλύεται στο περιβάλλον.

> **Ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης** αποτελεί η **πλαστική κρούση** ή **τελείως ανελαστική** κρούση. Μια τέτοια κρούση οδηγεί πάντοτε στη συγκόλληση των σωμάτων που συγκρούονται, δηλαδή οδηγεί στη δημιουργία συσσωματώματος.

Β. Η διατήρηση της ορμής στις κρούσεις

Επειδή, γενικά, η κρούση είναι φαινόμενο το οποίο διαρκεί ελάχιστο χρονικό διάστημα, οι ωθήσεις των εξωτερικών δυνάμεων, εάν υπάρχουν, είναι αμελητέες στη διάρκειά της.

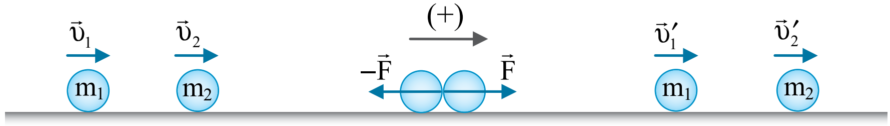
Επομένως, το σύστημα των σωμάτων που συγκρούονται μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο και κατά συνέπεια η ορμή του συστήματος διατηρείται σε όλη τη διάρκεια της κρούσης.

Εάν $\vec{P}_{πριν}$ είναι η ορμή του συστήματος αμέσως πριν από την κρούση και $\vec{P}_{μετά}$ η ορμή του συστήματος αμέσως μετά την κρούση, ισχύει:

$$\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά}$$

Γ. Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών

Οι σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ του ακόλουθου σχήματος έχουν μάζες m_1 και m_2 και κινούνται επάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\vec{υ}_1$ και $\vec{υ}_2$ αντίστοιχα. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά την κρούση αποκτούν ταχύτητες $\vec{υ}_1'$ και $\vec{υ}_2'$ αντίστοιχα.



Εάν γνωρίζουμε τις μάζες των δύο σφαιρών και τις ταχύτητές τους πριν από την κρούση, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής, έχουμε:

$$\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά} \quad ή \quad P_{πριν} = P_{μετά} \quad ή \quad m_1υ_1 + m_2υ_2 = m_1υ_1' + m_2υ_2'$$

$$ή \quad m_1(υ_1 - υ_1') = m_2(υ_2' - υ_2) \quad \mathbf{(1)}$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας παίρνουμε:

$$K_{πριν} = K_{μετά} \quad ή \quad \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2'^2 \quad ή$$

$$m_1\left(υ_1^2 - υ_1'^2\right) = m_2\left(υ_2'^2 - υ_2^2\right) \quad ή \quad m_1\left(υ_1 - υ_1'\right)\left(υ_1 + υ_1'\right) = m_2\left(υ_2' - υ_2\right)\left(υ_2' + υ_2\right) \quad \mathbf{(2)}$$

Κάθε σφαίρα δέχθηκε τη δράση ωστικής δύναμης, με συνέπεια να μεταβληθεί η κινητική της κατάσταση. Επομένως, είναι:

$$\upsilon_1 \neq \upsilon_1' \quad \text{και} \quad \upsilon_2 \neq \upsilon_2'$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει:

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2' + \upsilon_2 \quad \text{ή} \quad \upsilon_2' = \upsilon_1 + \upsilon_1' - \upsilon_2 \qquad \textbf{(3)}$$

Η σχέση (1), λόγω της σχέσης (3), γράφεται:

$$m_1\left(\upsilon_1 - \upsilon_1'\right) = m_2\left(\upsilon_1' + \upsilon_1 - 2\upsilon_2\right) \quad \text{ή} \quad \upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \qquad \textbf{(4)}$$

Η σχέση (3) με τη βοήθεια της σχέσης (4) γράφεται:

$$\upsilon_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \qquad \textbf{(5)}$$

Οι σχέσεις (4) και (5) είναι αλγεβρικές και οι ταχύτητες των σφαιρών, ανάλογα με τη θετική φορά που έχουμε επιλέξει, αντικαθίστανται με το πρόσημό τους.

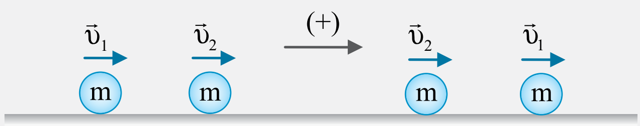
Εάν η τιμή της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1'$ προκύψει αρνητική, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η σφαίρα Σ_1, μετά την κρούση, αντιστρέφει τη φορά κίνησής της.

Ειδικές περιπτώσεις στην κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών

α. Εάν οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες ($\mathbf{m_1 = m_2 = m}$), τότε από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει:

$$\upsilon_1' = \upsilon_2 \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \upsilon_1$$

δηλαδή οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες (βλ. ακόλουθο σχήμα):

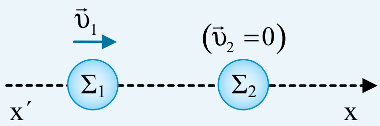


Πριν από την κρούση Μετά την κρούση

β. Εάν η σφαίρα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητη ($\upsilon_2 = 0$), τότε από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad \textbf{(6)} \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad \textbf{(7)}$$

Ερώτηση κατανόησης 1: Η σφαίρα Σ_1, μάζας m, κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x΄x και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2, μάζας 3m, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Ο λόγος υ_1'/υ_2' των αλγεβρικών τιμών των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση είναι: **α.** 1, **β.** – 1, **γ.** – 2.

Δ. Ελαστική κρούση σώματος με άλλο ακίνητο πολύ μεγαλύτερης μάζας

Εάν η σφαίρα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητη ($\upsilon_2 = 0$) και έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη σφαίρα Σ_1, δηλαδή είναι:

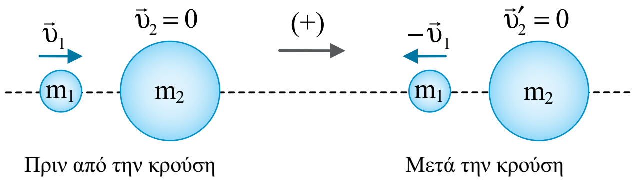
$$m_1 << m_2 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} << 1 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} \cong 0 ,$$

τότε διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρανομαστή των σχέσεων (6) και (7) με τη μάζα m_2, προκύπτει:

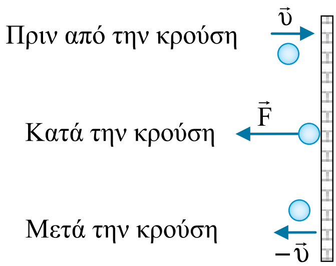
$$\upsilon_1' = \frac{(m_1/m_2) - 1}{(m_1/m_2) + 1}\upsilon_1 \cong \frac{0-1}{0+1}\upsilon_1 \quad \text{ή} \quad \boxed{\upsilon_1' \cong -\upsilon_1}$$

$$\text{και } \upsilon_2' = \frac{2(m_1/m_2)}{(m_1/m_2)+1}\,\upsilon_1 \cong \frac{2\cdot 0}{0+1}\,\upsilon_1 \quad \text{ή} \quad \boxed{\upsilon_2' \cong 0}$$

Δηλαδή η σφαίρα Σ_1 ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτήν που είχε πριν από την κρούση και η σφαίρα Σ_2 παραμένει, πρακτικά, ακίνητη (βλ. ακόλουθο σχήμα).



Εφαρμογή της παραπάνω περίπτωσης αποτελεί η ελαστική κρούση μιας σφαίρας μικρής μάζας που προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια κατακόρυφου τοίχου, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:

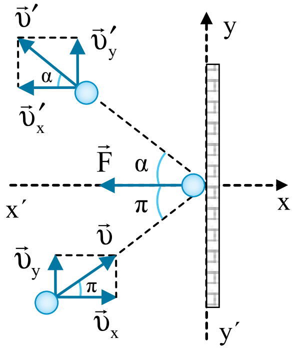


Ερώτηση κατανόησης 2: Υποθέστε ότι η σφαίρα του προηγούμενου σχήματος έχει μάζα 0,1 kg και προσπίπτει στον τοίχο με ταχύτητα μέτρου 5 m/s. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας εξαιτίας της πρόσκρουσής της στον τοίχο είναι: **α.** 1 kg·m/s. **β.** 0. **γ.** 0,5 kg·m/s.

Ε. Πλάγια ελαστική κρούση σφαίρας σε λεία επιφάνεια

Η σφαίρα μικρής μάζας του ακόλουθου σχήματος προσκρούει πλάγια και ελαστικά με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε κατακόρυφη λεία επιφάνεια.

Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε δύο συνιστώσες: τη $\vec{\upsilon}_x$ κάθετη στην επιφάνεια και τη $\vec{\upsilon}_y$ παράλληλη στην επιφάνεια.



Για την κάθετη στην επιφάνεια συνιστώσα της ταχύτητας, μετά την κρούση, ισχύει:

$$\upsilon'_x = -\upsilon_x$$

Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στη σφαίρα από την επιφάνεια είναι κάθετη στην επιφάνεια (θεωρούμε την επιφάνεια λεία), η παράλληλη προς την επιφάνεια συνιστώσα της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται. Επομένως, ισχύει:

$$\upsilon'_y = \upsilon_y$$

Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας μετά την κρούση είναι:

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon'^2_x + \upsilon'^2_y} = \sqrt{\upsilon^2_x + \upsilon^2_y} = \sqrt{\upsilon^2_x + \upsilon^2_y} \quad \text{ή} \quad \boxed{\upsilon' = \upsilon}$$

Εάν π και α είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\upsilon}'$ με την κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο πρόσπτωσης (γωνία πρόπτωσης και γωνία ανάκλασης αντίστοιχα), σύμφωνα με το προηγούμενο σχήμα ισχύει:

$$ημπ = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \quad ή \quad ημπ = \frac{\upsilon'_y}{\upsilon'} \quad ή \quad ημπ = ημα \quad ή \quad \boxed{π = α}$$

Δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης π της σφαίρας είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης α.

Βασική Μεθοδολογία Ι – Παραδείγματα εφαρμογής

Α. Γενικά περί κρούσης

Κρούση ονομάζουμε τη σύγκρουση δύο σωμάτων τα οποία βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους.

α. Επειδή η χρονική διάρκεια μιας κρούσης είναι αμελητέα, αρχίζει και τελειώνει στην ίδια θέση, με συνέπεια να μη μεταβάλλεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια των σωμάτων.

β. Στη διάρκεια της κρούσης, οι δυνάμεις επαφής που αναπτύσσονται μεταξύ των σωμάτων που συγκρούονται έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης.

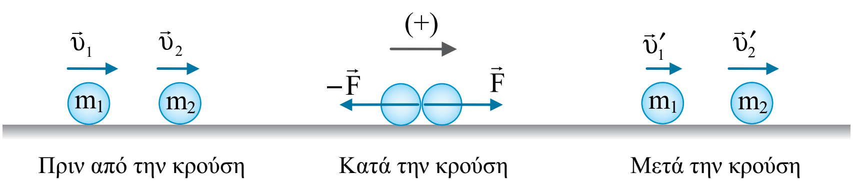
Επίσης, τα μέτρα των δυνάμεων επαφής είναι μεταβλητά και η μέση τιμή τους, γενικά, είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από τα μέτρα άλλων εξωτερικών δυνάμεων που πιθανόν να ασκούνται στα σώματα για το χρονικό διάστημα που διαρκεί η κρούση. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το ότι το φαινόμενο διαρκεί αμελητέο χρόνο, μάς επιτρέπει να περιγράφουμε, χωρίς μεγάλο σφάλμα, όλες τις κρούσεις μέσω της **αρχής διατήρησης της ορμής**.

Η αρχή διατήρησης της ορμής εφαρμόζεται ακόμη και στην περίπτωση όπου η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα του συστήματος στη διάρκεια της κρούσης είναι διαφορετική του μηδενός.

Β. Κεντρική κρούση

Β1. Κεντρική ελαστική κρούση

Οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 του ακόλουθου σχήματος, έχουν μάζες m_1 και m_2 και κινούνται επάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ αντίστοιχα.



Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά τη σύγκρουσή τους αποκτούν ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$.

α. Για την κεντρική ελαστική κρούση των δύο σφαιρών ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Η **αρχή διατήρησης της ορμής**:

$$P_{ολ(πριν)} = P_{ολ(μετά)} \quad ή \quad m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \quad \mathbf{(1)}$$

Η σχέση (1) είναι αλγεβρική και οι ταχύτητες των σφαιρών αντικαθίστανται με το πρόσημό τους, ανάλογα με τη θετική φορά που έχουμε ορίσει.

ii. Η **κινητική ενέργεια** του συστήματος των δύο σφαιρών **διατηρείται**:

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετά)} \quad ή \quad \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \quad \mathbf{(2)}$$

Με κατάλληλη επεξεργασία των σχέσεων (1) και (2) οδηγούμαστε στα εξής συμπεράσματα:

Συμπέρασμα 1ο: Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών πριν και μετά την κρούση συνδέονται με τη σχέση:

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'$$

ή τις σχέσεις:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad και \quad \upsilon_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

Η σχέση $\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'$ είναι σημαντική, διότι συνδέει τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών πριν και μετά την κρούση χωρίς να υπεισέρχονται σε αυτήν οι μάζες των δύο σφαιρών.

Επίσης, η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = -(\upsilon_1' - \upsilon_2')$$

Δηλαδή, οι διαφορές των ταχυτήτων των σφαιρών πριν και μετά την κρούση είναι αντίθετες.

Με άλλα λόγια, η σχετική ταχύτητα με την οποία πλησιάζουν οι δύο σφαίρες πριν από την κρούση ισούται με το αντίθετο της σχετικής ταχύτητας με την οποία απομακρύνονται μετά την κρούση.

Συμπέρασμα 2ο: Οι μεταβολές των ορμών των δύο σφαιρών είναι αντίθετες.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$P_{ολ(πριν)} = P_{ολ(μετά)} \quad ή \quad P_1 + P_2 = P_1' + P_2' \quad ή \quad P_1' - P_1 = -(P_2' - P_2)$$

δηλαδή:

$$\boxed{\Delta P_1 = -\Delta P_2} \quad ή,\ επιπλέον, \quad \boxed{\Delta P_1 + \Delta P_2 = 0} \quad ή \quad \boxed{\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = -1}$$

Συμπέρασμα 3ο: Οι μεταβολές των κινητικών ενεργειών των δύο σφαιρών είναι αντίθετες.

Επειδή η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται, έχουμε:

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετά)} \quad ή \quad K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \quad ή \quad K_1' - K_1 = -(K_2' - K_2)$$

δηλαδή:

$$\boxed{\Delta K_1 = -\Delta K_2} \quad ή,\ επιπλέον, \quad \boxed{\Delta K_1 + \Delta K_2 = 0} \quad ή \quad \boxed{\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = -1}$$

Συμπέρασμα 4ο: Εάν η σφαίρα $Σ_2$ είναι αρχικά ακίνητη ($υ_2 = 0$) και έχει μάζα πολύ μικρότερη από τη μάζα της σφαίρας $Σ_1$, δηλαδή είναι:

$$m_2 << m_1 \quad ή \quad \frac{m_2}{m_1} << 1 \quad ή \quad \frac{m_2}{m_1} \cong 0 ,$$

τότε οι σχέσεις

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1 \quad και \quad υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1$$

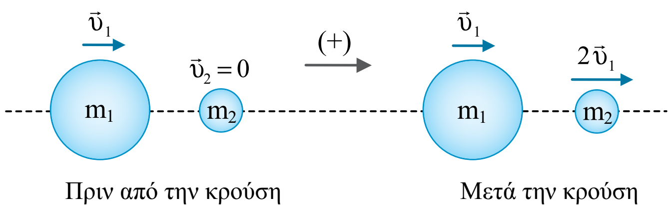
γράφονται:

$$υ_1' = \frac{1-(m_2/m_1)}{1+(m_2/m_1)} υ_1 \cong \frac{1-0}{1+0} υ_1 \quad ή \quad υ_1' \cong υ_1$$

και

$$υ_2' = \frac{2(m_1/m_1)}{1+(m_2/m_1)} υ_1 \cong \frac{2 \cdot 1}{1+0} υ_1 \quad ή \quad υ_2' \cong 2υ_1$$

Δηλαδή η σφαίρα $Σ_1$ συνεχίζει ασυγκράτητη να κινείται με την ίδια ταχύτητα, ενώ η σφαίρα $Σ_2$ εκτινάσσεται με διπλάσια ταχύτητα από την ταχύτητα της σφαίρας $Σ_1$ (βλ. ακόλουθο σχήμα).



β. Στον ακόλουθο πίνακα αναγράφονται ορισμένες ειδικές περιπτώσεις που συναντάμε συχνά στην κεντρική ελαστική κρούση.

Συνθήκες	Σχέσεις ταχυτήτων	Παρατηρήσεις
$m_1 = m_2$	$\upsilon_1' = \upsilon_2$ και $\upsilon_2' = \upsilon_1$	Οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.
$\upsilon_2 = 0$	$\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$ και $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$	
$m_1 = m_2$ και $\upsilon_2 = 0$	$\upsilon_1' = 0$ και $\upsilon_2' = \upsilon_1$	Οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.
$m_1 > m_2$ και $\upsilon_2 = 0$	$\upsilon_1' > 0$ και $\upsilon_2' > 0$	Η φορά κίνησης της σφαίρας Σ_1 δεν μεταβάλλεται.
$m_1 < m_2$ και $\upsilon_2 = 0$	$\upsilon_1' < 0$ και $\upsilon_2' > 0$	Η σφαίρα Σ_1, μετά την κρούση, κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση.
$m_1 \ll m_2$ και $\upsilon_2 = 0$	$\upsilon_1' \cong -\upsilon_1$ και $\upsilon_2' \cong 0$	
$m_2 \ll m_1$ και $\upsilon_2 = 0$	$\upsilon_1' \cong \upsilon_1$ και $\upsilon_2' \cong 2\upsilon_1$	

γ. Μέση τιμή της δύναμης επαφής

Η μέση τιμή της δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί η σφαίρα Σ_1 στη σφαίρα Σ_2 κατά την κρούση υπολογίζεται εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, στη γενικότερη μορφή του, για τη σφαίρα Σ_2. Δηλαδή, ισχύει:

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta t} = \Sigma F \quad ή \quad \frac{P_2' - P_2}{\Delta t} = F \quad ή \quad \boxed{F = \frac{m_2\upsilon_2' - m_2\upsilon_2}{\Delta t}} \quad \text{(αλγεβρικά)}$$

όπου Δt ο χρόνος που διαρκεί η κρούση.

Η μέση τιμή της δύναμης $\vec{F}'$ που ασκεί η σφαίρα Σ_2 στη σφαίρα Σ_1 κατά την κρούση είναι αντίθετη από τη μέση τιμή της δύναμης $\vec{F}$.

δ. Ποσοστό μεταβιβαζόμενης κινητικής ενέργειας

Στη διάρκεια της κρούσης, η σφαίρα $Σ_1$ μεταβιβάζει κινητική ενέργεια στη σφαίρα $Σ_2$ η οποία ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας $Σ_2$ ή, ακόμη, ισούται με την απώλεια της κινητικής ενέργειας της σφαίρας $Σ_1$.
Δηλαδή, ισχύει:

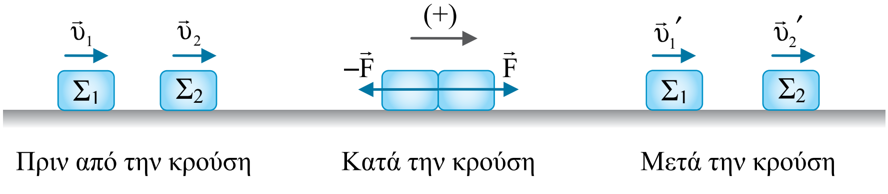
$$K_{μετ.} = K_2' - K_2 = K_1 - K_1'$$

Επομένως, το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας $Σ_1$ που μεταβιβάζεται στη σφαίρα $Σ_2$ στη διάρκεια της κρούσης δίνεται από τη σχέση:

$$π\% = \frac{K_{μετ.}}{K_1} 100\% = \frac{K_2' - K_2}{K_1} 100\% = \frac{K_1 - K_1'}{K_1} 100\%$$

B2. Κεντρική ανελαστική κρούση

Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ του ακόλουθου σχήματος έχουν μάζες m_1 και m_2 και κινούνται επάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\vec{υ}_1$ και $\vec{υ}_2$ αντίστοιχα.
Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά ανελαστικά και μετά την κρούση αποκτούν ταχύτητες $\vec{υ}_1'$ και $\vec{υ}_2'$ αντίστοιχα.



Για την κεντρική ανελαστική κρούση των δύο σωμάτων ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$P_{ολ(πριν)} = P_{ολ(μετά)} \quad ή \quad m_1υ_1 + m_2υ_2 = m_1υ_1' + m_2υ_2'$$

Η προηγούμενη σχέση είναι αλγεβρική και οι ταχύτητες των σωμάτων αντικαθίστανται με το πρόσημό τους, ανάλογα με τη θετική φορά που έχουμε ορίσει.

ii. Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων ισούται με τη θερμική ενέργεια που παράγεται κατά την κρούση και υπολογίζεται από τη διαφορά:

$$E_{απ.} = Q = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)} = \left(\frac{1}{2}m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2 υ_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1 υ_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 υ_2'^2\right)$$

iii. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος που μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$π\% = \frac{Q}{K_{ολ(πριν)}}100\% = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}}100\% = \left(1 - \frac{K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}}\right)100\%$$

iv. Οι μεταβολές των ορμών των σωμάτων είναι αντίθετες ή το πηλίκο τους ισούται με – 1.

Η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται. Επομένως, η μεταβολή της ορμής του συστήματος ισούται με μηδέν. Έχουμε:

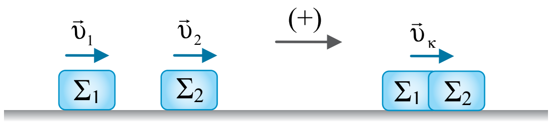
$$ΔP_{ολ.} = 0 \quad ή \quad ΔP_1 + ΔP_2 = 0 \quad ή \quad ΔP_1 = -ΔP_2 \quad ή \quad \frac{ΔP_1}{ΔP_2} = -1$$

Β3. Κεντρική πλαστική κρούση

Ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης αποτελεί η πλαστική κρούση, ακριβώς μετά την οποία δημιουργείται συσσωμάτωμα.

Λέγοντας συσσωμάτωμα εννοούμε ότι τα σώματα του συστήματος **μετά την κρούση** έχουν την ίδια ταχύτητα κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά.

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του ακόλουθου σχήματος έχουν μάζες m_1 και m_2 και κινούνται επάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ αντίστοιχα.



Πριν από την κρούση Μετά την κρούση

Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά πλαστικά και το συσσωμάτωμα που δημιουργείται έχει αμέσως μετά την κρούση ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\kappa$.

Για την κεντρική πλαστική κρούση των δύο σωμάτων ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$P_{\text{ολ(πριν)}} = P_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa$$

Η προηγούμενη σχέση είναι αλγεβρική και οι ταχύτητες των σωμάτων αντικαθίστανται με το πρόσημό τους, ανάλογα με τη θετική φορά που έχουμε ορίσει.

ii. Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων, η οποία ισούται με τη θερμική ενέργεια που παράγεται κατά την κρούση, υπολογίζεται από τη διαφορά:

$$E_{\text{απ.}} = Q = K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2$$

iii. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος που μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια στη διάρκεια της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi\% = \frac{Q}{K_{\text{ολ(πριν)}}}100\% = \frac{K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}}}{K_{\text{ολ(πριν)}}}100\% = \left(1 - \frac{K_{\text{ολ(μετά)}}}{K_{\text{ολ(πριν)}}}\right)100\%$$

iv. Οι μεταβολές των ορμών των σωμάτων είναι αντίθετες ή το πηλίκο τους ισούται με – 1. Δηλαδή, ισχύει:

$$\Delta P_1 = -\Delta P_2 \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = -1$$

Γ. Προσδιορισμός του είδους μιας κρούσης

Εάν δύο σώματα συγκρούονται και ζητείται να προσδιορίσουμε το είδος της πραγματοποιούμενης κρούσης, τότε πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα ακόλουθα:

α. Η κρούση, μεταξύ άλλων, είναι **ελαστική**, όταν:

- **i.** Η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων διατηρείται, δηλαδή ισχύει: $\mathbf{K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετά)}}$.
- **ii.** Το αλγεβρικό άθροισμα των ταχυτήτων του πρώτου σώματος πριν και μετά την κρούση ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ταχυτήτων του δεύτερου σώματος πριν και μετά την κρούση, δηλαδή ισχύει: $\boldsymbol{\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'}$.
- **iii.** Τα σώματα έχουν **ίσες μάζες** και **ανταλλάσσουν ταχύτητες**.

β. Η κρούση είναι **ανελαστική**, όταν:

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων πριν από την κρούση είναι μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων μετά την κρούση, δηλαδή ισχύει: $\mathbf{K_{ολ(πριν)} > K_{ολ(μετά)}}$.

γ. Η κρούση είναι **πλαστική**, όταν:

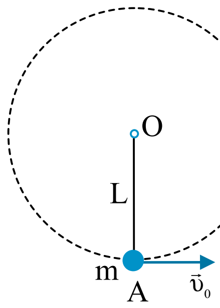
- **i.** Δημιουργείται **συσσωμάτωμα** αμέσως μετά την κρούση.
- **ii.** Οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση είναι ίσες κατά **μέτρο** και έχουν την ίδια **κατεύθυνση**.

Δ. Κίνηση σώματος μικρών διαστάσεων σε κατακόρυφο επίπεδο

Δ1. Κυκλική κίνηση σφαιριδίου προσδεδεμένου στην άκρη αβαρούς νήματος

Το σφαιρίδιο του ακόλουθου σχήματος έχει αμελητέες διαστάσεις, μάζα m και είναι προσδεδεμένο στην άκρη αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους L, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο O.

Εκτοξεύουμε οριζόντια το σφαιρίδιο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ από την κατακόρυφη θέση A, οπότε αυτό αρχίζει να κινείται κυκλικά σε κατακόρυφο επίπεδο.



α. Να προσδιορίσετε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της τάσης $\vec{T}$ του νήματος σε συνάρτηση με τη γωνία θ που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφη διεύθυνση.

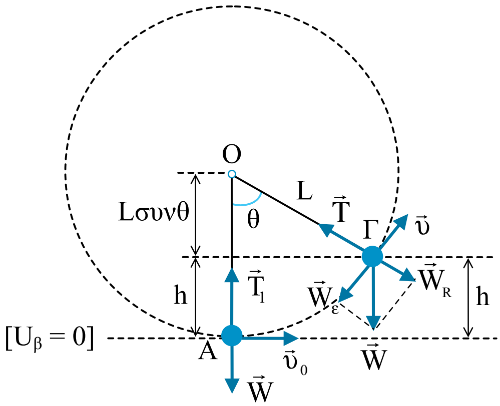
β. Με βάση τη σχέση $T = f(\theta)$ που καταλήξατε στο προηγούμενο ερώτημα, να προσδιορίσετε τις τιμές της τάσης του νήματος για τις γωνίες $\theta = 0^o$ και $\theta = 90^o$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$.

Απάντηση

α. Όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα, σε τυχαία θέση Γ της κυκλικής τροχιάς του σφαιριδίου, οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό είναι:

Το βάρος του $\vec{W}$, με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα κάτω και η τάση $\vec{T}$ του νήματος, με διεύθυνση τη διεύθυνση του νήματος και φορά προς το σημείο εξάρτησης O του νήματος.



Αναλύουμε το βάρος του σφαιριδίου σε δύο συνιστώσες δυνάμεις, την $\vec{W}_\varepsilon$ η οποία έχει διεύθυνση εφαπτόμενη της τροχιάς στο σημείο Γ και την $\vec{W}_R$ η οποία έχει διεύθυνση την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σφαιριδίου στο σημείο Γ.

Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το σφαιρίδιο στη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς του λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη. Είναι:

$$\Sigma F_{(R)} = m\alpha_\kappa \quad \acute{\eta} \quad T - W_R = m\frac{\upsilon^2}{L} \quad \acute{\eta} \quad T - mg\sigma\upsilon\nu\theta = m\frac{\upsilon^2}{L}$$

$$\acute{\eta} \quad T = m\left(\frac{\upsilon^2}{L} + g\sigma\upsilon\nu\theta\right) \quad \textbf{(1)}$$

όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου στη θέση Γ.

Το βάρος $\vec{W}$ του σφαιριδίου είναι συντηρητική δύναμη και η τάση $\vec{T}$ του νήματος δεν παράγει έργο, επειδή είναι διαρκώς κάθετη στη μετατόπιση.

Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τις θέσεις Α και Γ του σφαιριδίου. Έχουμε:

$$E_{M\eta\chi.(A)} = E_{M\eta\chi.(\Gamma)} \quad \acute{\eta} \quad K_{(A)} + U_{(A)} = K_{(\Gamma)} + U_{(\Gamma)} \quad \acute{\eta} \quad \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh$$

$$\acute{\eta} \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh} = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2g(L - L\sigma\upsilon\nu\theta)} \quad \acute{\eta} \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gL(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)} \quad \textbf{(2)}$$

Η σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), γράφεται:

$$T = m\left(\frac{\upsilon_0^2 - 2gL(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{L} + g\sigma\upsilon\nu\theta\right) \quad ή \quad \boxed{T = m\left(\frac{\upsilon_0^2}{L} - 2g + 3g\sigma\upsilon\nu\theta\right)}$$

β. Από την προηγούμενη σχέση:

Για $\theta = 0^o$ προκύπτει:

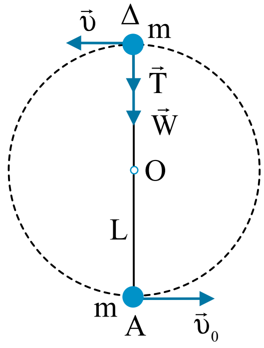
$$\boxed{T = m\left(\frac{\upsilon_0^2}{L} + g\right)}$$

και για $\theta = 90^o$ προκύπτει:

$$\boxed{T = m\left(\frac{\upsilon_0^2}{L} - 2g\right)}$$

Ανακύκλωση

Θα υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας που πρέπει να έχει το σφαιρίδιο στην ανώτερη θέση της τροχιάς του, για να εκτελέσει ανακύκλωση.



Προκειμένου το σφαιρίδιο να εκτελέσει ανακύκλωση, δηλαδή να κατορθώσει να διέλθει από το ανώτερο σημείο Δ της τροχιάς του (βλ. παραπάνω σχήμα), πρέπει η τάση που δέχεται από το νήμα στο σημείο αυτό να ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$T \geq 0 \quad \textbf{(3)}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το σφαιρίδιο στη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς του στο σημείο Δ ισούται με την κεντρομόλο δύναμη.

Δηλαδή είναι:

$$\Sigma F_{(R)} = m\alpha_{\kappa} \quad \text{ή} \quad T + W = m\frac{\upsilon^2}{L} \quad \text{ή} \quad T = m\left(\frac{\upsilon^2}{L} - g\right) \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (3),}$$

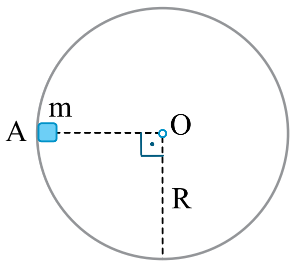
$$m\left(\frac{\upsilon^2}{L} - g\right) \geq 0 \quad \text{ή, επειδή είναι πάντοτε } m > 0, \quad \frac{\upsilon^2}{L} - g \geq 0 \quad \text{ή} \quad \upsilon \geq \sqrt{gL}$$

Δηλαδή, η ελάχιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας που θα πρέπει να έχει το σφαιρίδιο στην ανώτερη θέση Δ της τροχιάς του για να εκτελέσει ανακύκλωση είναι:

$$\upsilon_{min} = \sqrt{gL}$$

Δ2. Κίνηση σώματος μικρών διαστάσεων στο εσωτερικό κυκλικού οδηγού

Το σώμα μικρών διαστάσεων του ακόλουθου σχήματος έχει μάζα m και αφήνεται ελεύθερο από το σημείο Α κατακόρυφου κυκλικού οδηγού ακτίνας R. Το σώμα ολισθαίνει χωρίς τριβές στο εσωτερικό του οδηγού.



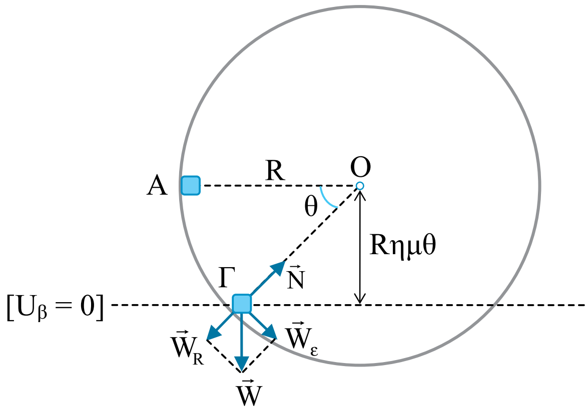
α. Να προσδιορίσετε τη σχέση η οποία συνδέει το μέτρο της κάθετης αντίδρασης $\vec{N}$ που δέχεται το σώμα από τον κυκλικό οδηγό σε συνάρτηση με τη γωνία θ που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα που παρακολουθεί το σώμα στην κίνησή του με την οριζόντια διεύθυνση.

β. Με βάση τη σχέση $N = f(\theta)$ που καταλήξατε στο προηγούμενο ερώτημα, να προσδιορίσετε τις τιμές της κάθετης αντίδρασης για τις γωνίες $\theta = 0^o$ και $\theta = 90^o$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$.

Απάντηση

α. Όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα, σε τυχαία θέση Γ της τροχιάς του, το σώμα δέχεται τις εξής δυνάμεις: Το βάρος του $\vec{W}$, με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα κάτω, και την κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από την επιφάνεια του κυκλικού οδηγού, με ακτινική διεύθυνση και φορά προς το κέντρο Ο του οδηγού.



Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το σώμα στη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς του (κεντρομόλος δύναμη) είναι:

$$\Sigma F_{(R)} = m\alpha_\kappa \quad \text{ή} \quad N - W_R = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \text{ή} \quad N - mg\eta\mu\theta = m\frac{\upsilon^2}{R}$$

$$\text{ή} \quad N = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} + g\eta\mu\theta\right) \quad \textbf{(1)}$$

όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση Γ.

Το βάρος $\vec{W}$ του σώματος είναι συντηρητική δύναμη και η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ του κυκλικού οδηγού δεν παράγει έργο, επειδή είναι διαρκώς κάθετη στη μετατόπιση. Επομένως, η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται. Έχουμε:

$$E_{Μηχ.(Α)} = E_{Μηχ.(Γ)} \quad ή \quad K_{(A)} + U_{(A)} = K_{(Γ)} + U_{(Γ)} \quad ή \quad 0 + mgRημθ = \frac{1}{2}mυ^2 + 0$$

$$ή \quad υ = \sqrt{2gRημθ} \quad \mathbf{(2)}$$

Η σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), γράφεται:

$$N = m(2gημθ + gημθ) \quad ή \quad \boxed{N = 3mgημθ}$$

β. Σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση:

Για θ = 0° είναι:

$$\boxed{N = 0}$$

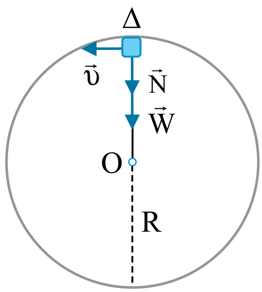
και για θ = 90° είναι:

$$\boxed{N = 3mg}$$

Ανακύκλωση

Θα υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας που πρέπει να έχει το σώμα στην ανώτερη θέση της τροχιάς του, για να εκτελέσει ανακύκλωση.

Προκειμένου το σώμα να εκτελέσει **ανακύκλωση**, δηλαδή να κατορθώσει να διέλθει από το ανώτερο σημείο Δ της τροχιάς του (βλ. ακόλουθο σχήμα), πρέπει η κάθετη αντίδραση που δέχεται από τον κυκλικό οδηγό στο σημείο αυτό να ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:



$$N \geq 0 \quad \mathbf{(3)}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το σώμα στη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς του στο σημείο Δ (κεντρομόλος δύναμη) είναι:

$$\Sigma F_{(R)} = m\alpha_\kappa \quad \acute{\eta} \quad N + W = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \acute{\eta} \quad N = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} - g\right)$$

ή, λόγω της σχέσης (3), $\quad m\left(\dfrac{\upsilon^2}{R} - g\right) \geq 0 \quad$ ή, επειδή είναι πάντοτε $m > 0$,

$$\frac{\upsilon^2}{R} - g \geq 0 \quad \acute{\eta} \quad \upsilon \geq \sqrt{gR}$$

Δηλαδή, η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας που πρέπει να έχει το σώμα στην ανώτερη θέση της τροχιάς του, προκειμένου να εκτελέσει ανακύκλωση, είναι:

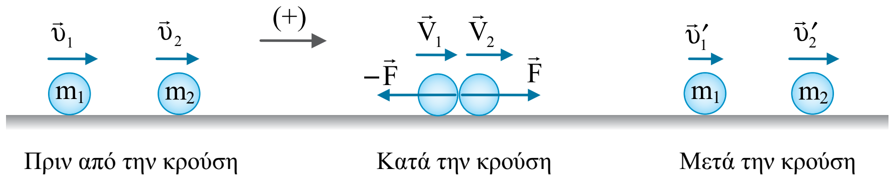
$$\boxed{\upsilon_{min} = \sqrt{gR}}$$

Μεθοδολογία ΙΙ

Α. Κεντρική ελαστική κρούση

Ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης

Οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 του ακόλουθου σχήματος είναι τελείως ελαστικές, έχουν μάζες m_1 και m_2 και κινούνται επάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ αντίστοιχα.



Κατά την κρούση οι σφαίρες παραμορφώνονται, με συνέπεια μέρος της κινητικής τους ενέργειας να εμφανίζεται ως ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης.

Οι παραμορφώσεις των σφαιρών διαρκούν ελάχιστο χρονικό διάστημα και οι σφαίρες παίρνουν πάλι το αρχικό τους σχήμα πολύ σύντομα. Έτσι, η ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης μετατρέπεται εξολοκλήρου σε κινητική και δεν συντελείται μετατροπή κάποιου μέρους της σε θερμική.

Τέτοιες κρούσεις συμβαίνουν μεταξύ χαλύβδινων σφαιρών ή σφαιρών οι οποίες είναι κατασκευασμένες από ελεφαντοστό (μπάλες μπιλιάρδου).

Έστω $\vec{V}_1$ και $\vec{V}_2$ οι ταχύτητες των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα μια χρονική στιγμή t στη διάρκεια της κρούσης.

Η αρχή διατήρησης της ορμής γράφεται:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1V_1 + m_2V_2$$

Εάν συμβολίσουμε με U την ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης την παραπάνω χρονική στιγμή, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 + U$$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m_1V_1^2 - \frac{1}{2}m_2V_2^2$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών ελαττώνεται από την έναρξη της κρούσης έως τη χρονική στιγμή κατά την οποία η παραμόρφωση των δύο σφαιρών μεγιστοποιείται.

Η μέγιστη παραμόρφωση των σφαιρών εμφανίζεται τη χρονική στιγμή κατά την οποία η σχετική τους ταχύτητα ισούται με μηδέν. Με άλλα λόγια, τη χρονική στιγμή κατά την οποία οι σφαίρες αποκτούν (διανυσματικά) ίσες ταχύτητες. Δηλαδή:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \vec{V}$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1V + m_2V \quad \text{ή} \quad V = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

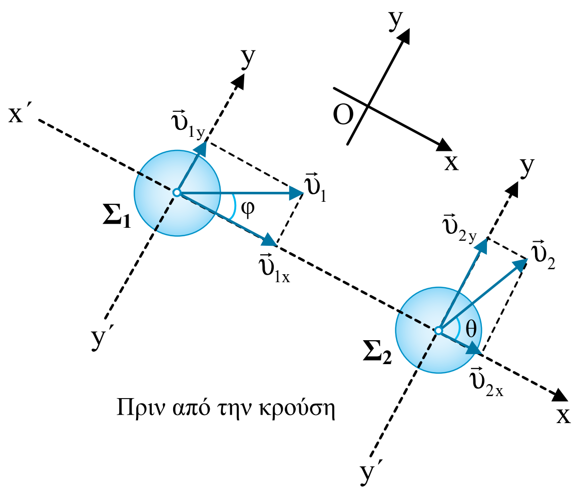
Εάν συμβολίσουμε με U_{max} τη μέγιστη ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_2V^2 + U_{max}$$

$$\text{ή} \quad U_{max} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$$

Β. Έκκεντρη – Πλάγια ελαστική κρούση

Οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 του ακόλουθου σχήματος έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, κινούνται επάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ και συγκρούονται πλάγια και ελαστικά.



Πριν από την κρούση

Για να υπολογίσουμε τις ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση εργαζόμαστε ως εξής:

1ο βήμα: Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, όπου ο άξονας xx΄ έχει τη διεύθυνση της διακέντρου των δύο σφαιρών.

2ο βήμα: Αναλύουμε τις ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ στους άξονες xx΄ και yy΄. Έτσι, προκύπτουν οι συνιστώσες των ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_{1x}$, $\vec{\upsilon}_{1y}$ και $\vec{\upsilon}_{2x}$, $\vec{\upsilon}_{2y}$.

3ο βήμα: Στον άξονα xx΄ η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική και ελαστική. Επομένως, οι συνιστώσες των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση στον άξονα xx΄ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{1x} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{2x} \quad \text{και} \quad \upsilon'_{2x} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_{2x} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_{1x}$$

$$\text{ή} \quad \upsilon'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \text{συν}\phi + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \text{συν}\theta$$

$$\text{και} \quad \upsilon'_{2x} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \text{συν}\theta + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \text{συν}\phi$$

όπου φ και θ οι γωνίες που σχηματίζουν οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ με τη διεύθυνση της διακέντρου των δύο σφαιρών.

4ο βήμα: Στον άξονα yy΄ οι συνιστώσες $\vec{\upsilon}_{1y}$ και $\vec{\upsilon}_{2y}$ δεν μεταβάλλονται. Επομένως, οι συνιστώσες των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση στον άξονα yy΄ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon'_{1y} = \upsilon_{1y} \quad \text{ή} \quad \upsilon'_{1y} = \upsilon_1 \text{ημ}\phi \quad \text{και} \quad \upsilon'_{2y} = \upsilon_{2y} \quad \text{ή} \quad \upsilon'_{2y} = \upsilon_2 \text{ημ}\theta$$

5ο βήμα: Τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζονται από τις σχέσεις:

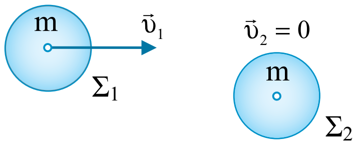
$$\upsilon'_1 = \sqrt{\upsilon'^2_{1x} + \upsilon'^2_{1y}} \quad \text{και} \quad \upsilon'_2 = \sqrt{\upsilon'^2_{2x} + \upsilon'^2_{2y}}$$

6ο βήμα: Για τον προσδιορισμό των διευθύνσεων των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση, υπολογίζουμε τις οξείες γωνίες φ΄ και θ΄ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\upsilon}'_1$ και $\vec{\upsilon}'_2$ με τον άξονα xx΄ μέσω των σχέσεων:

$$\text{εφ}\phi' = \frac{\upsilon'_{1y}}{\upsilon'_{1x}} \quad \text{και} \quad \text{εφ}\theta' = \frac{\upsilon'_{2y}}{\upsilon'_{2x}}$$

Παράδειγμα

Σφαίρα Σ_1 μάζας m κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και συγκρούεται ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 ίδιας μάζας m, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Πριν από την κρούση

Να δείξετε ότι οι δύο σφαίρες μετά τη σύγκρουσή τους θα κινηθούν σε κάθετες διευθύνσεις μεταξύ τους.

Απάντηση

1ος τρόπος

Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, όπου ο άξονας xx΄ έχει τη διεύθυνση της διακέντρου των δύο σφαιρών. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ στους άξονες xx΄ και yy΄ και έτσι προκύπτουν οι συνιστώσες $\vec{\upsilon}_{1x}$ και $\vec{\upsilon}_{1y}$.

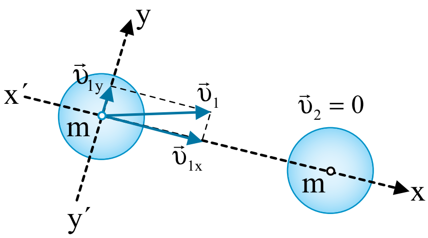
Στον άξονα xx΄ η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική και ελαστική. Επιπλέον, οι δύο σφαίρες έχουν ίσες μάζες, με συνέπεια να ανταλλάσσουν ταχύτητες. Έτσι, στον άξονα xx΄ οι ταχύτητες των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση θα είναι:

$$\upsilon'_{1x} = 0 \quad \text{και} \quad \upsilon'_{2x} = \upsilon_{1x}$$

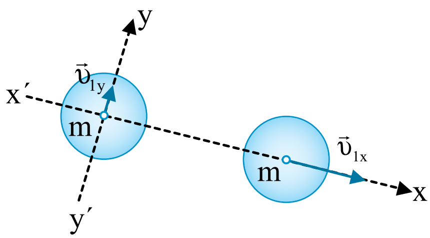
Στον άξονα yy΄ οι συνιστώσες $\vec{\upsilon}_{1y}$ και $\vec{\upsilon}_{2y}$ δεν μεταβάλλονται. Συνεπώς, για τις συνιστώσες των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση στον άξονα yy΄ ισχύει:

$$\upsilon'_{1y} = \upsilon_{1y} \quad \text{και} \quad \upsilon'_{2y} = 0$$

Τελικά, μετά την κρούση, η σφαίρα Σ_1 έχει ταχύτητα με διεύθυνση τον άξονα yy΄ $\left(\vec{\upsilon}'_1 = \vec{\upsilon}'_{1y} = \vec{\upsilon}_{1y}\right)$ και η σφαίρα Σ_2 έχει ταχύτητα με διεύθυνση τον άξονα xx΄ $\left(\vec{\upsilon}'_2 = \vec{\upsilon}'_{2x} = \vec{\upsilon}_{1x}\right)$, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Πριν από την κρούση



Μετά την κρούση

Επομένως, οι δύο σφαίρες μετά τη σύγκρουσή τους θα κινηθούν σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

2ος τρόπος

Θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής, αξιοποιώντας συγχρόνως το δεδομένο ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται.

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\vec{P}_{ολ.πριν} = \vec{P}_{ολ.μετά} \quad ή \quad \vec{P}_1 + 0 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \quad ή \quad m\vec{\upsilon}_1 + 0 = m\vec{\upsilon}_1' + m\vec{\upsilon}_2'$$

$$ή \quad \vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_1' + \vec{\upsilon}_2' \quad ή \quad \upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 + 2\upsilon_1'\upsilon_2'συνφ \quad \mathbf{(1)}$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα μετά την κρούση.

Επίσης, ισχύει:

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετά)} \quad ή \quad K_1 + 0 = K_1' + K_2' \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2'^2$$

$$ή \quad \upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 \quad \mathbf{(2)}$$

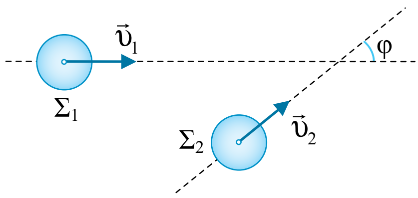
Η σχέση (1), μέσω της σχέσης (2), γράφεται:

$$2\upsilon_1'\upsilon_2'συνφ = 0 \quad ή \quad συνφ = 0 \quad ή \quad φ = 90^o$$

Επομένως, οι δύο σφαίρες μετά τη σύγκρουσή τους θα κινηθούν σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

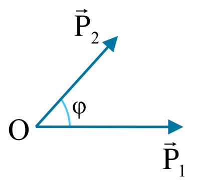
Γ. Πλάγια πλαστική κρούση

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του ακόλουθου σχήματος έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, κινούνται επάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ και συγκρούονται πλάγια και πλαστικά.



Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος που προκύπτει αμέσως μετά τη σύγκρουση των δύο σωμάτων εργαζόμαστε ως εξής:

1ο βήμα: Κατασκευάζουμε σχήμα στο οποίο απεικονίζονται με κοινή αρχή Ο τα διανύσματα των ορμών των σωμάτων του συστήματος καθώς και η γωνία που σχηματίζουν οι φορείς τους.



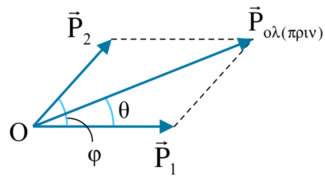
2ο βήμα: Υπολογίζουμε τα μέτρα των ορμών των σωμάτων του συστήματος ακριβώς πριν από τη σύγκρουσή τους από τους τύπους:

$$P_1 = m_1\upsilon_1 \quad \text{και} \quad P_2 = m_2\upsilon_2$$

3ο βήμα: Συνθέτουμε διανυσματικά, σύμφωνα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, και υπολογίζουμε το μέτρο της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων ακριβώς πριν από τη σύγκρουσή τους από τον τύπο:

$$P_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\text{συν}\phi}$$

4ο βήμα: Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής, υπολογίζουμε την ορμή του συσσωματώματος (ολική ορμή του συστήματος μετά την κρούση). Είναι:



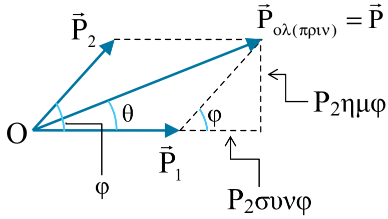
$$\vec{P} = \vec{P}_{ολ(πριν)} \quad ή \quad P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2συνφ}$$

5ο βήμα: Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος από τη σχέση:

$$P = (m_1 + m_2)υ_κ \quad ή \quad υ_κ = \frac{P}{m_1 + m_2}$$

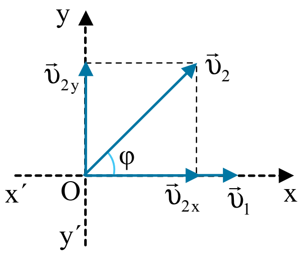
6ο βήμα: Υπολογίζουμε τη γωνία θ η οποία καθορίζει τη διεύθυνση της ορμής του συσσωματώματος και, κατ' επέκταση, τη διεύθυνση της ταχύτητας του συσσωματώματος, μέσω της σχέσης:

$$εφθ = \frac{P_2ημφ}{P_1 + P_2συνφ}$$

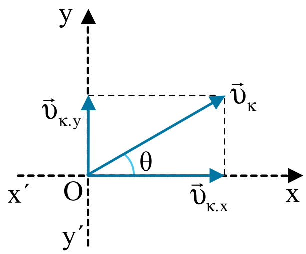


Εναλλακτικά, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

1ο βήμα: Αναλύουμε τις ταχύτητες $\vec{υ}_1$ και $\vec{υ}_2$ με τις οποίες κινούνται τα δύο σώματα πριν από τη σύγκρουσή τους σε άξονες x΄Οx και y΄Οy, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Πριν από την κρούση



Μετά την κρούση

2ο βήμα: Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων στον άξονα x΄Ox. Εάν $\upsilon_{κ.x}$ είναι η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση στον άξονα x΄Ox έχουμε:

$$P_{ολ,πριν.x} = P_{ολ,μετά.x} \quad ή \quad m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 συνφ = (m_1 + m_2)\upsilon_{κ.x}$$

$$ή \quad \upsilon_{κ.x} = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 συνφ}{m_1 + m_2}$$

3ο βήμα: Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων στον άξονα y΄Oy. Εάν $\upsilon_{κ.y}$ είναι η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση στον άξονα y΄Oy έχουμε:

$$P_{ολ,πριν.y} = P_{ολ,μετά.y} \quad ή \quad 0 + m_2\upsilon_2 ημφ = (m_1 + m_2)\upsilon_{κ.y} \quad ή \quad \upsilon_{κ.y} = \frac{m_2\upsilon_2 ημφ}{m_1 + m_2}$$

4ο βήμα: Το μέτρο $\upsilon_κ$ της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\upsilon_κ = \sqrt{\upsilon_{κ.x}^2 + \upsilon_{κ.y}^2}$$

5ο βήμα: Η διεύθυνση της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση προσδιορίζεται μέσω της γωνίας θ που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_κ$ με τον άξονα x΄Ox. Είναι:

$$εφθ = \frac{\upsilon_{κ.y}}{\upsilon_{κ.x}}$$

Λυμένες ασκήσεις

Κεντρική κρούση

Α. Κεντρική ελαστική κρούση

Άσκηση 1

Σφαίρα Σ_1 μάζας $m_1 = 1$ kg κινείται επάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο στη διεύθυνση του άξονα x΄x με ταχύτητα $\upsilon_1 = +6$ m/s και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 2$ kg.

Η κρούση διαρκεί αμελητέο χρονικό διάστημα και οι τιμές των (ωστικών) δυνάμεων που αναπτύσσονται στη διάρκειά της θεωρούνται σταθερές.

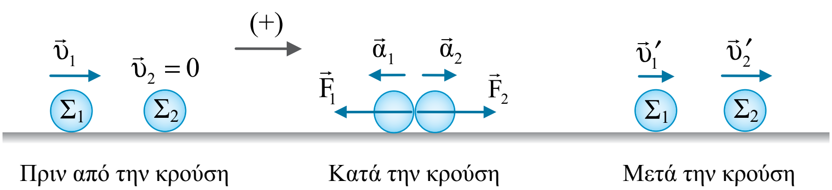
α. Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σφαιρών αμέσως μετά την κρούση.

β. Να υπολογίσετε τον λόγο των επιταχύνσεων των δύο σφαιρών στη διάρκεια της κρούσης.

γ. Να παραστήσετε γραφικά, στο ίδιο σύστημα βαθμολογημένων αξόνων, τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σφαιρών για χρονική διάρκεια 1 s πριν και 1 s μετά την κρούση.

Λύση

α. Έστω $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$ οι ταχύτητες των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση.



Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$ υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{1-2}{1+2}\,6\ \text{m/s} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\upsilon_1' = -\,2\ m/s}$$

$$\text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 1}{1+2}\,6\ \text{m/s} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\upsilon_2' = +\,4\ m/s}$$

β. Σε όλη τη διάρκεια της κρούσης οι δύο σφαίρες αλληλεπιδρούν μέσω των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, οι οποίες έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης $\left(\vec{F}_1 = -\vec{F}_2\right)$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα, έχουμε:

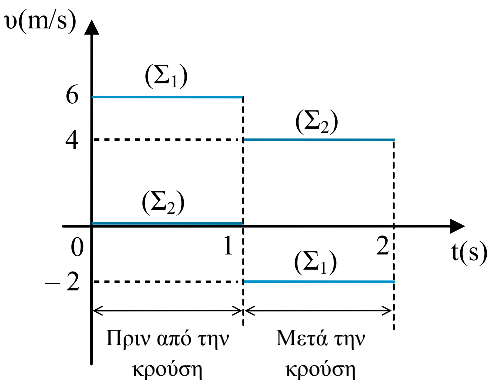
$$F_1 = m_1 \cdot \alpha_1 \quad \text{και} \quad F_2 = m_2 \cdot \alpha_2$$

όπου α_1 και α_2 οι αλγεβρικές τιμές των επιταχύνσεων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα στη διάρκεια της κρούσης.

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες εξισώσεις, προκύπτει:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 \cdot \alpha_1}{m_2 \cdot \alpha_2} \quad \text{ή} \quad -1 = \frac{m_1 \cdot \alpha_1}{m_2 \cdot \alpha_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{m_2}{m_1} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -2}$$

γ. Οι ταχύτητες των δύο σφαιρών τόσο πριν από την κρούση όσο και μετά αυτήν είναι σταθερές. Η ζητούμενη γραφική παράσταση απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Άσκηση 2

Σφαίρα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 1$ kg κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $\vec{υ}_1$, μέτρου 4 m/s, και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 3$ kg, η οποία κινείται με ταχύτητα $\vec{υ}_2$, μέτρου 3 m/s, σε αντίθετη κατεύθυνση σχετικά με την πρώτη. Η κρούση διαρκεί αμελητέο χρονικό διάστημα. Να υπολογίσετε:

α. Τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση.

β. Την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής κάθε σφαίρας εξαιτίας της κρούσης.

γ. Την απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών 2 s μετά την κρούση.

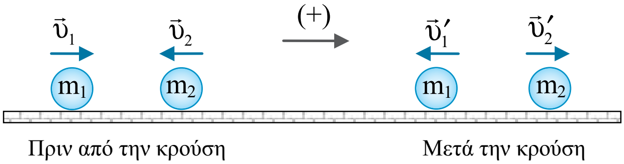
δ. Την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας που θα έπρεπε να είχε η σφαίρα $Σ_1$ πριν από την κρούση, ώστε η σφαίρα $Σ_2$ μετά την κρούση να ακινητοποιείται.

Θεωρήστε ως θετική τη φορά της ταχύτητας που έχει η σφαίρα $Σ_1$ πριν την κρούση.

Λύση

α. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση υπολογίζονται με τις σχέσεις:

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}υ_2 \quad \textbf{(1)} \quad \text{και} \quad υ_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}υ_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 \quad \textbf{(2)}$$



Σύμφωνα με το προηγούμενο σχήμα, αντικαθιστώντας τις τιμές των μαζών και των ταχυτήτων των δύο σφαιρών στις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$υ_1' = \left[\frac{1-3}{1+3}4 + \frac{2 \cdot 3}{1+3}(-3)\right] \text{ m/s} \quad ή \quad \mathbf{υ_1' = -\,6{,}5\ m/s}$$

$$\text{και} \quad υ_2' = \left[\frac{3-1}{1+3}(-3) + \frac{2 \cdot 1}{1+3}4\right] \text{ m/s} \quad ή \quad \mathbf{υ_2' = +\,0{,}5\ m/s}$$

β. Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 είναι:

$$\Delta P_1 = P_1' - P_1 = m_1(\upsilon_1' - \upsilon_1) \quad \text{ή} \quad \mathbf{\Delta P_1 = -10{,}5\ kg{\cdot}m/s}$$

Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται, οπότε ισχύει:

$$\Delta P_{ολ} = 0 \quad \text{ή} \quad \Delta P_1 + \Delta P_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \Delta P_2 = -\Delta P_1$$

Επομένως, η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_2 είναι:

$$\mathbf{\Delta P_2 = 10{,}5\ kg{\cdot}m/s}$$

γ. Μετά την κρούση, κάθε σφαίρα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Η σφαίρα Σ_1 κινείται προς τα αριστερά και σε χρόνο $\Delta t = 2$ s μετατοπίζεται κατά:

$$s_1 = |\upsilon_1'|\cdot\Delta t \quad \text{ή} \quad s_1 = 13\ \text{m}$$

ενώ η σφαίρα Σ_2 κινείται προς τα δεξιά και στον ίδιο χρόνο μετατοπίζεται κατά:

$$s_2 = \upsilon_2'\cdot\Delta t \quad \text{ή} \quad s_2 = 1\ \text{m}$$

Επομένως, η ζητούμενη απόσταση είναι:

$$s = s_1 + s_2 \quad \text{ή} \quad \mathbf{s = 14\ m}$$

δ. Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$0 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad \text{ή} \quad \upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}\upsilon_2 = \frac{1-3}{2\cdot 1}(-3)\ \text{m/s}$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{\upsilon_1 = +3\ m/s}$$