ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Any concept that exists in the mind at all exists in some form, among some set of associations.

Gilead, MARILYNNE ROBINSON, σ. 167

Η επίλυση ενός προβλήματος δεν απαιτεί αναγκαστικά την εμπλοκή Μαθηματικών για την εξεύρεση λύσης. Ωστόσο, είναι γεγονός, που μάλιστα μας εκπλήσσει, το πόσο συχνά ένα πρόβλημα μπορεί να λυθεί όταν «μετασχηματίσουμε» την κατάσταση που περιγράφει σε κατάλληλα Μαθηματικά. Το κύριο θέμα όμως αυτού του βιβλίου δεν είναι μια συζήτηση για τη σπουδαιότητα των Μαθηματικών στην επίλυση προβλημάτων. Το βιβλίο εστιάζεται στο πώς θα ενισχύσουμε την ικανότητα των μαθητών και των φοιτητών να κάνουν χρήση των Μαθηματικών όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα που επιδέχονται μαθηματική επεξεργασία. Επομένως, η θεματική του βιβλίου εντάσσεται κυρίως στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται στο βιβλίο ή θα διατυπώνονται άμεσα ως μαθηματικά προβλήματα ή θα εντάσσονται σε ένα φυσικό περιβάλλον που μπορεί σχετικά εύκολα να μετασχηματιστεί σε Μαθηματικά. Με το τελευταίο δεν εννοούμε με κανέναν τρόπο ότι το περιεχόμενο είναι «ρεαλιστικό»· είναι όμως διαμορφωμένο έτσι ώστε η αντιμετώπισή του να εμπλέξει σημαντικές όψεις της μαθηματικής σκέψης. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα που περιέχεται είναι το ακόλουθο: «Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r λιοντάρια σε μια σειρά n κλουβιών χωρίς ποτέ δύο λιοντάρια να βρίσκονται σε γειτονικά κλουβιά;» Προφανώς, αυτό δεν είναι ένα πρόβλημα από την πραγματικότητά μας, αλλά η επίλυσή του εμπλέκει μαθηματικές ιδέες και δεξιότητες που είναι περισσότερο από χρήσιμες.

Ένα εύλογο ερώτημα που ο αναγνώστης μπορεί να προβάλει είναι: «Μα τα Μαθηματικά αυτά καθαυτά πραγματεύονται την επίλυση προβλημάτων. Ποια η ανάγκη να εισαγάγουμε τον όρο *Επίλυση Προβλήματος*;». Μια απάντηση στο ερώτημα αυτό ξεκινά από την αναγκαιότητα να γίνει μια αξιολογική ανασκόπηση της συνήθους διδακτικής πρακτικής στην παραδοσιακή τάξη των Μαθηματικών. Τυπικά, σε μια τέτοια τάξη, ο διδάσκων αρχίζει υπενθυμίζοντας τι διδάχθηκε στο προηγούμενο μάθημα, συνεχίζει με την παρουσίαση κάποιου νέου για την τάξη μαθηματικού θέματος, μετά δίνει κάποια παραδείγματα ασκήσεων/προβλημάτων με τις λύσεις τους για να επεξηγήσει πώς μπορεί κανείς να δουλέψει με τη νέα ύλη και, τέλος, οι μαθητές ή οι φοιτητές καλούνται να λύσουν προβλήματα παρόμοια με αυτά που παρουσιάστηκαν στην τάξη.

Αυτή η πρακτική στην τάξη των Μαθηματικών έχει γίνει αντικείμενο κριτικής από παιδαγωγούς και από ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών που ενδιαφέρονται για την ανάπτυξη της μαθηματικής ωριμότητας των μαθητευομένων. Κρίνουν ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών σε μια τέτοια τάξη παραμένει σε ένα διαδικαστικό επίπεδο και ότι οι μαθητευόμενοι συναντούν δυσκολία ακόμη και στην επίλυση προβλημάτων που, επιφανειακά και μόνο, διαφοροποιούνται από εκείνα που τους παρουσίασε ο διδάσκων. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι η εμπειρία μιας τέτοιας παραδοσιακής τάξης δεν βοηθά πολύ τους μαθητές/φοιτητές να καλλιεργήσουν την ικανότητα να αναπτύσσουν μαθηματικούς συλλογισμούς από μόνοι τους. Είναι σημαντικό, επομένως, να δημιουργήσουμε διδακτικές καταστάσεις που από τη μια ευνοούν την ανάπτυξη τέτοιων συλλογισμών και από την άλλη παρέχουν στους διδάσκοντες το κατάλληλο περιβάλλον για ουσιαστική μαθηματική εκπαίδευση στην τάξη. Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι μαθητευόμενοι διδάσκονται –και μέχρις ενός σημείου αποκτούν– την ικανότητα να επιχειρηματολογούν και να αξιοποιούν την κατάλληλη σε κάθε περίπτωση γνώση για να λύνουν προβλήματα στα Μαθηματικά. Από αυτήν την οπτική, το ενδιαφέρον γι' αυτό καθαυτό το αποτέλεσμα της λύσης είναι δευτερεύον.

Με βάση την παραπάνω αφετηρία, οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών προσδίδουν στον όρο *Επίλυση Προβλήματος* διάφορες μαθησιακές προοπτικές. Μια πρώτη προοπτική είναι στην κατεύθυνση της διαμόρφωσης τέτοιων καταστάσεων-πλαισίων, ώστε η προβλεπόμενη λύση να βοηθήσει στην κατανόηση και δόκιμη χρησιμοποίηση μιας μαθηματικής έννοιας. Στην περίπτωση αυτή, ο συνήθης ρόλος του διδάσκοντα να παρουσιάζει τη νέα ύλη περιορίζεται και ταυτόχρονα αλλάζει χαρακτήρα. Οι μαθητές/φοιτητές καλούνται να αντιμετωπίσουν μια σειρά από τέτοιες καταστάσεις-πλαίσια με την προσδοκία ότι, μέσω αυτής της δραστηριότητας, θα συλλάβουν νέες έννοιες και θα αντιληφθούν τη σημασία της χρήσης τους στα Μαθηματικά. Καθώς αυτές οι καταστάσεις-πλαίσια στοχεύουν στην ανάπτυξη της σε βάθος κατανόησης νέων μαθηματικών εννοιών, δεν είναι τετριμμένες. Επομένως, η προοπτική αυτή προτάσσει προβλήματα που εξυπηρετούν έναν συγκεκριμένο στόχο: να διαφωτίσουν νέες για τους μαθητές/φοιτητές μαθηματικές έννοιες.

Μια άλλη προοπτική επικεντρώνει το ενδιαφέρον τής μαθησιακής διαδικασίας στα Μαθηματικά σε αυτή καθαυτή την επίλυση προβλήματος. Στην προοπτική αυτή αποδίδεται διπλή ερμηνεία. Κατά την πρώτη, η *Επίλυση Προβλήματος* θεωρείται ως εγγενής λειτουργία στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και επομένως, ως γνωστικό πεδίο, πραγματεύεται τις δυσκολίες των μαθητευομένων στην κατανόηση και εφαρμογή μιας νέας γι' αυτούς μαθηματικής θεωρίας. Εδώ, αυτό που προέχει είναι το μαθηματικό περιεχόμενο, και η επίλυση προβλήματος υπηρετεί την εύρεση νέων μαθηματικών αποτελεσμάτων. Αναστρέφοντας τώρα την παραπάνω προβληματική, έχουμε τη δεύτερη ερμηνεία. Τώρα, το μαθηματικό περιεχόμενο καθίσταται ένα λίγο πολύ «συμπτωματικό» περιβάλλον και η προσοχή εστιάζεται στις νοητικές διεργασίες που οδηγούν στη λύση. Το τελικό αποτέλεσμα γίνεται δευτερεύον σε σχέση με τη διαδικασία που οδηγεί σ' αυτό. Συμπερασματικά, έχουμε αναφέρει τρεις προοπτικές για την επίλυση προβλήματος:

α. Επίλυση προβλήματος με στόχο την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.
β. Επίλυση προβλήματος με στόχο την εύρεση νέων αποτελεσμάτων στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας.
γ. Επίλυση προβλήματος για τη μελέτη αυτών καθαυτών των νοητικών διεργασιών που ενέχονται στην επίλυση προβλήματος.

Στο βιβλίο αυτό εστιάζουμε κυρίως στην τρίτη προοπτική και με τον όρο *Επίλυση Προβλήματος* θα εννοούμε αυτήν, εκτός και αν ρητά ανακαλούμε κάποια από τις άλλες δύο.

Επομένως, η *Επίλυση Προβλήματος* περιλαμβάνει τις συνειδητές αποφάσεις στην ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας κατά την αναζήτηση λύσης. Η ιδέα εδώ είναι ότι, αν οι μαθητές/φοιτητές βοηθηθούν ώστε να κάνουν συνειδητά τις επιλογές των βημάτων επίλυσης, τότε ελέγχουν καλύτερα την εξέλιξή της. Αυτή η «συνειδητοποίηση» λειτουργεί σε δύο επίπεδα. Πρώτον, σε γνωστικό επίπεδο. Υπάρχει πάντοτε μια αλληλεπίδραση μεταξύ του συγκεκριμένου μαθηματικού περιβάλλοντος και γενικών στρατηγικών που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά, ανεξάρτητα από το ειδικό θέμα που αντιμετωπίζουμε. Ο ούγγρος μαθηματικός George Polya (1887-1985) ήταν ο πρώτος που κατέγραψε μια σειρά τέτοιων γενικών στρατηγικών, τις λεγόμενες *Ευρετικές*, στις οποίες θα αναφερθούμε λεπτομερώς. Δεύτερον, σε επίπεδο *Μεταγνώσης*. Τι εννοούμε με τον όρο αυτό; Αντί στη διάρκεια της επίλυσης να εστιάζουμε στη γνώση των μαθηματικών ιδιοτήτων του περιβάλλοντος του προβλήματος, επικεντρώνουμε την προσοχή μας στην εκτίμηση και την οργάνωση του πιο επωφελούς δρόμου προς τη λύση. Στο επίπεδο της μεταγνώσης, σημαντικό ρόλο κατέχει ο *Έλεγχος* (executive control) που λειτουργεί ως ένας συνεχής μηχανισμός λήψης αποφάσεων με σκοπό την επιτυχή έκβαση της επίλυσης.

Η λήψη αποφάσεων σε «τοπικό» επίπεδο συμβάλλει στη διαμόρφωση μιας καθολικής στρατηγικής για τη λύση. Χρησιμοποιούμε τη λέξη μεταγνώση αντί της λέξης γνώση, καθώς στην πορεία ανάπτυξης της επιχειρηματολογίας μας μεταστρέφουμε την προσοχή μας από αυτό καθαυτό το μαθηματικό πλαίσιο στις δυνατότητες που μας προσφέρει η κατανόηση της βασικής *Μαθηματικής Δομής*. Λαμβάνοντας υπόψιν τη μαθηματική δομή, παίρνουμε αποστάσεις από το αρχικό περιβάλλον του προβλήματος. Η αναγκαιότητα της ανάπτυξης των μεταγνωστικών λειτουργιών επισημάνθηκε από τον Alan Schoenfeld (University of Berkeley), ο οποίος όμως δεν εξέτασε το ρόλο της κατανόησης της μαθηματικής δομής στην επίλυση προβλήματος.

Η *Επίλυση Προβλήματος* αποτελεί πράγματι ένα ευρύ θέμα και εμπεριέχει και άλλες διαστάσεις πέρα από τις *Ευρετικές*, τον *Έλεγχο* και την αντίληψη της *Μαθηματικής Δομής*. Στο βιβλίο θα αναφερθούμε σε μια σειρά από θέματα όπως τα ακόλουθα: Στο θέμα των *τεχνικών επίλυσης* («Μέθοδοι που θεωρούνται ότι είναι κάτι μεταξύ των αλγορίθμων και των ευρετικών», όπως το έθεσε ο Schoenfeld σε προσωπική μας επικοινωνία). Στο πότε η *νοερή επιχειρηματολογία* είναι επαρκής και πότε είναι αναγκαίο να εκφραστεί στην αυστηρή μαθηματική γλώσσα, τη *γλώσσα της απόδειξης*. Στο πώς ο λύτης θα μεγιστοποιεί τη δυνατότητα να *αντλεί την κατάλληλη μαθηματική γνώση*. Στο ρόλο της *διερεύνησης* και του *πειραματισμού* κατά την επίλυση. Επίσης, καθώς η κύρια προοπτική που υιοθετούμε δίνει έμφαση περισσότερο στην επίλυση παρά στο αποτέλεσμα, θα μας απασχολήσουν θέματα όπως: η *παραγωγή* και η *σύγκριση διαφορετικών λύσεων* για το ίδιο πρόβλημα (ενώ αν εστιάζαμε μόνο στο αποτέλεσμα, μία λύση θα αρκούσε). Καθώς όμως το αποτέλεσμα έχει δευτερεύουσα σημασία, δίνεται η δυνατότητα να ζητήσουμε από τους φοιτητές, αλλά ακόμη και από τους μαθητές, να δημιουργήσουν τα δικά τους προβλήματα (*problem posing*). Τέλος, καθώς πολλές φορές το περιβάλλον των προβλημάτων είναι ψευδορεαλιστικό και απαιτείται η *μαθηματικοποίηση/μοντελοποίησή* του, το θέμα αυτό αποκτά ιδιαίτερη βαρύτητα.

Μέχρι τώρα έχουμε εκθέσει τα κύρια θέματα που συνιστούν το περιεχόμενο του βιβλίου. Όπως συμβαίνει συχνά όταν αντιμετωπίζουμε καινούριες ιδέες, ο αναγνώστης αυτού του εισαγωγικού σημειώματος θα αποκομίσει μόνο μια γενική εντύπωση του πραγματικού χαρακτήρα του βιβλίου. Μόνον όταν μελετήσει το θεωρητικό μέρος και ιδιαίτερα τα προβλήματα/παραδείγματα (που αποτελούν σημαντικό μέρος του περιεχομένου) θα αντιληφθεί την *Ταυτότητα* της Επίλυσης Προβλήματος ως προγραμματική κατεύθυνση στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Το βιβλίο προορίζεται κυρίως ως βασικό σύγγραμμα για φοιτητές που παρακολουθούν ένα μάθημα επίλυσης προβλήματος στα Μαθηματικά, στο πλαίσιο ενός προγράμματος εκπαίδευσης μελλοντικών εκπαιδευτικών. Επίσης, μπορεί να χρησιμεύσει σε έναν εν ενεργεία εκπαιδευτικό που θα ήθελε να μελετήσει το αντικείμενο, για να εμπλουτίσει τη διδασκαλία του. Ελπίζουμε ότι το περιεχόμενο του βιβλίου θα κεντρίσει επίσης το ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών που θέλουν να εξασκήσουν τις δυνατότητές τους ως λύτες, ανεξάρτητα της διδακτικής διάστασης. Συνολικά, το θέμα της ταυτότητας του αντικειμένου θέτει μια σειρά από ερευνητικά ερωτήματα που παρουσιάζονται στο τέλος του βιβλίου, τα οποία προσδοκούμε να κεντρίσουν το ενδιαφέρον νέων ερευνητών του χώρου. Το κεφάλαιο για την Ταυτότητα της Επίλυσης Προβλήματος αποτελεί ελεύθερη απόδοση μιας εργασίας των Mamona-Downs & Downs (2005), με ενσωματωμένα κάποια μεθύστερα ερευνητικά αποτελέσματα που φωτίζουν περαιτέρω συγκεκριμένες θεματικές. Η μορφή του κειμένου εναλλάσσεται μεταξύ του «αντιμετωπίζοντας τον αναγνώστη ως μαθητή» και του «αξιολογώντας τι απαιτείται από το μαθητή για να λύσει ένα πρόβλημα και πώς ο δάσκαλος θα βοηθήσει σ’ αυτό». Πιστεύουμε ότι πράγματι η δυνατότητα επίλυσης αναπτύσσεται με διαρκή προσωπική ενασχόληση λύσης πολλών προβλημάτων, αλλά στο βιβλίο εμβαθύνουμε στο πώς η εμπειρία αυτή στοιχειοθετείται και οργανώνεται, αξιοποιώντας τα αποτελέσματα της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Εάν το βιβλίο χρησιμοποιείται ως βάση ενός προγράμματος εκπαίδευσης εκπαιδευτικών, οι διδάσκοντες μπορούν να επιλέξουν άλλα προβλήματα-παραδείγματα που υπηρετούν τον ίδιο στόχο στα πλαίσια του μαθήματος. Έχει μεγάλη σημασία οι συμμετέχοντες στο μάθημα να είναι ενεργοί λύτες των προβλημάτων και όχι απλά να διαβάζουν παθητικά μία ή περισσότερες λύσεις τους.

Ένα ερώτημα που τίθεται είναι σε ποιο επίπεδο εκπαίδευσης απευθυνόμαστε. Η θέση μας είναι ότι το θέμα της επίλυσης προβλήματος αφορά όλα τα στάδια της μάθησης και ενασχόλησης με τα Μαθηματικά. Για το λόγο αυτό, άλλες φορές φαίνεται το κείμενο να απευθύνεται σε φοιτητές, άλλοτε σε μαθητές και άλλοτε και στους δύο. Η επιλογή αυτή δεν είναι δογματική. Είναι ο κάθε εκπαιδευτικός εκείνος που θα αποφασίσει κατά πόσο ένα μέρος του περιεχομένου αφορά ή όχι την τάξη του. Ένας λόγος γι’ αυτό είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος προαπαιτείται συγκεκριμένη μαθηματική γνώση. Πολλές φορές είναι πράγματι ανέφικτο να αναμένουμε από τα παιδιά να λύσουν ένα πρόβλημα, και μόνο λόγω του ότι δεν έχουν διδαχθεί τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία έως τώρα. Από την άλλη μεριά όμως, είναι ισχνή η δυνατότητα να προσδιορίζουμε επίπεδο δυσκολίας στο κάθε πρόβλημα.

Έτσι, επιλέγοντας προβλήματα που βάζουν τους μαθητές/φοιτητές να εργαστούν μέσα σε ένα πλούσιο μαθηματικό περιβάλλον, σεβόμαστε το συνεχές του φάσματος των δυνατοτήτων τους, λαμβάνοντας υπόψιν και εκείνους που θεωρούνται «προικισμένοι» στα Μαθηματικά. Ακόμη και αν δεχθούμε ότι είναι απίθανο να γεφυρώσουμε το χάσμα μεταξύ προικισμένων και μέσων μαθητών/φοιτητών, ως δάσκαλοι έχουμε χρέος να το μικρύνουμε όσο μπορούμε. Αυτό φυσικά θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ο κύριος στόχος όλης της μαθηματικής παιδείας· η προοπτική της *Επίλυσης Προβλήματος* όμως προεξέχει ιδιαίτερα στην οργάνωση της δημιουργίας στρατηγικής, χωρίς την οποία το μαθηματικό έργο σύντομα καθίσταται ανενεργό. Η πραγματιστική προοπτική που έχει υιοθετήσει η παράδοση της *Επίλυσης Προβλήματος* είναι αφενός ελκυστική, και αφετέρου έχει αποδειχτεί ότι προάγει την ικανότητα των λυτών να επιχειρηματολογούν στα Μαθηματικά.

1

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1.1 Τι είναι πρόβλημα

Στη γενικότητά του, ο όρος «πρόβλημα» πιστεύουμε ότι οριοθετείται καλά από τους Newell and Simon (1972, σ. 72), που έγραψαν: «[Θεωρούμε ότι] *κάποιος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα όταν θέλει κάτι και δεν γνωρίζει άμεσα τη σειρά των ενεργειών που μπορεί να ακολουθήσει ώστε να το επιτύχει»*. Ειδικότερα, για να αποκαλέσουμε ένα πρόβλημα *μαθηματικό*, θα πρέπει στην αναζήτηση της απάντησης να εμπλέκονται μαθηματικές έννοιες και αρχές. Άλλωστε, τα μαθηματικά προβλήματα είναι αυτά που καθορίζουν την επιστήμη των Μαθηματικών: όλα τα Μαθηματικά δημιουργούνται μέσα από τη διαδικασία δημιουργίας και επίλυσης προβλημάτων. Ο Polya (1945) αναφέρει: *«Ένα συνηθισμένο πρόβλημα είναι η εύρεση του δρόμου που οδηγεί σε ένα προκαθορισμένο σημείο μέσω κάποιας όχι και τόσο γνωστής περιοχής* [. . .] *τα προβλήματα μας φαίνονται ως προβλήματα εύρεσης ενός δρόμου: εκείνου που θα μας βγάλει από μια δυσκολία ή εκείνου που παρακάμπτει ένα εμπόδιο»*. Επομένως, ένας βαθμός δυσκολίας θεωρείται εγγενής στην έννοια του μαθηματικού προβλήματος. Ο Schoenfeld (1985) επισημαίνει ότι η δυσκολία με τον ορισμό του όρου «πρόβλημα» είναι ότι εν τέλει η επίλυση προβλήματος είναι κάτι σχετικό. Δηλαδή, το ίδιο μαθηματικό εγχείρημα (task) που μπορεί για κάποιον να απαιτεί σημαντική προσπάθεια, αποτελεί ταυτόχρονα μια τυπική άσκηση για κάποιον άλλο. Έτσι, θα λέγαμε ότι είναι περισσότερο η συγκεκριμένη σχέση μεταξύ του λύτη και του εγχειρήματος εκείνη που το καθιστά ή όχι πρόβλημα για το συγκεκριμένο πρόσωπο. Στο παρόν βιβλίο υιοθετούμε για τον όρο «πρόβλημα» την προοπτική που το θεωρεί ως κάτι σχετικό, ως ένα εγχείρημα που παρουσιάζει δυσκολίες σε εκείνον που προσπαθεί να το λύσει.

Ευρύτερα, στο πλαίσιο της έρευνας της μαθηματικής παιδείας, υπάρχουν και άλλες προοπτικές όπως: (α) η παιδαγωγική προοπτική ή προοπτική του αναλυτικού προγράμματος, που εστιάζει στο τι σημαίνει για τη διδασκαλία ένα μαθηματικό πρόβλημα [Kilpatrick (1985)], και (β) η κοινωνικο-ανθρωπολογική προοπτική, κατά την οποία το πρόβλημα προσφέρεται και λαμβάνεται μέσω μιας συνδιαλλαγής στο κοινωνικό σκηνικό της τάξης των Μαθηματικών [Mehan (1978)].

Η μαθηματική ενασχόληση σε όλα τα επίπεδα επικεντρώνεται κυρίως στην επίλυση προβλημάτων και στην κατανόηση της θεωρίας ή στο κτίσιμο νέων μαθηματικών θεωριών. Καθώς το ενδιαφέρον στο βιβλίο αυτό εστιάζεται στα πλαίσια της μαθηματικής παιδείας, ας φανταστούμε έναν μαθητή ή φοιτητή που αντιμετωπίζει κάποιο νέο γι' αυτόν πρόβλημα στα Μαθηματικά. Πρόκειται για έναν μέσο μαθητή/φοιτητή που ήδη έχει εμπειρία επίλυσης προβλημάτων σε διάφορα μαθηματικά περιβάλλοντα. Αφού αρχικά διαβάσει το προτεινόμενο πρόβλημα, πιθανόν να διατυπώσει το ερώτημα: «Τι μας ζητά το πρόβλημα;». Η καλή κατανόηση του ζητουμένου του προβλήματος συνιστά μια στέρεα βάση για την προσέγγιση της επίλυσης. Αν ο μαθητής/φοιτητής είναι σε θέση να συσχετίσει το προτεινόμενο πρόβλημα με άλλα που έχει επιλύσει στο συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα, μπορεί να ανακαλέσει, για παράδειγμα, κάποια μέθοδο που ενδείκνυται γι' αυτό. Τα πιο πάνω συγκλίνουν στο ότι το πρόβλημα πρέπει να θεωρηθεί ως τέτοιο από τον ίδιο το λύτη. Αν δεν είναι μια πρόκληση που θα την αποδεχθεί, τότε (και για τη συγκεκριμένη στιγμή) δεν είναι γι' αυτόν πρόβλημα. Καταλήγουμε στο ότι ένα πρόβλημα πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο της *αποδοχής*, δηλαδή ότι ο μαθητής/φοιτητής αποδέχεται το πρόβλημα και εμπλέκεται προσωπικά είτε από εσωτερικό είτε από εξωτερικό κίνητρο (όπως π.χ. γνήσιο μαθηματικό ενδιαφέρον, ευχαρίστηση από την εμπειρία της επίλυσης, εκπαιδευτικό/κοινωνικό περιβάλλον).

1.2 Είδη προβλημάτων

Ο Polya, ακολουθώντας μια παράδοση που φτάνει πίσω στον Ευκλείδη, διακρίνει τα προβλήματα σε δύο πολύ γενικούς τύπους: προβλήματα που ζητούν από το λύτη *«να βρει»* (προβλήματα εύρεσης) και προβλήματα που ζητούν από το λύτη *«να αποδείξει»* (προβλήματα απόδειξης).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΥΡΕΣΗΣ Σε ένα πρόβλημα εύρεσης, σκοπός μας είναι να βρούμε το άγνωστο αντικείμενο του προβλήματος, το ζητούμενο, που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος όπως αυτές διαμορφώνονται από τα δεδομένα του. Ένα καλοδιατυπωμένο πρόβλημα πρέπει με σαφήνεια να προσδιορίζει τη φύση του **αγνώστου**. Πρέπει να γνωρίζουμε από την αρχή τι είδους άγνωστο πρέπει να βρούμε: ένα γεωμετρικό αντικείμενο, έναν αριθμό, μια σχέση; Η λύση στα προβλήματα εύρεσης αποτελείται από ένα σύνολο μαθηματικών αντικειμένων που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Όταν αυτό το σύνολο περιέχει ένα και μόνο ένα αντικείμενο τότε η λύση είναι μοναδική. Αν δεν περιέχει κανένα αντικείμενο, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ Σε ένα πρόβλημα απόδειξης, μας ζητείται να αποφασίσουμε αν ένας συγκεκριμένος ισχυρισμός είναι αληθής ή όχι. Σκοπός μας, δηλαδή, είναι να άρουμε την αμφιβολία σχετικά με τον διατυπωμένο μαθηματικό ισχυρισμό/πρόταση. Πρέπει, λοιπόν, να απαντήσουμε στην εξής ερώτηση: Αληθεύει ή όχι αυτός ο ισχυρισμός; Και πρέπει να απαντήσουμε οριστικά, είτε αποδεικνύοντας ότι ο ισχυρισμός ισχύει, είτε αποδεικνύοντας ότι δεν ισχύει.

1.3 Μέρη προβλήματος

Ο Polya προτείνει ότι σε κάθε πρόβλημα μπορούμε να αναγνωρίσουμε τα «βασικά μέρη», τα οποία έχουν διακριτούς ρόλους στην επίλυσή του.

α. Τα βασικά μέρη ενός προβλήματος εύρεσης είναι το ζητούμενο, τα δεδομένα και η συνθήκη.
Αν έχουμε, για παράδειγμα, να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πεντάγωνο με πλευρές μήκους 1, το ζητούμενο είναι ένα κανονικό πεντάγωνο και τα δεδομένα είναι τα μήκη των πλευρών του. (Στην περίπτωση αυτή, το ζητούμενο σχήμα έχει γωνίες 108 μοιρών.) Αν όμως ζητείται η κατασκευή ισόπλευρων πενταγώνων με πλευρές μήκους 1 αλλά με γωνίες που το μέτρο τους σε μοίρες είναι ακέραιοι αριθμοί διάφοροι του 108, τότε τα ζητούμενα γεωμετρικά σχήματα είναι ισόπλευρα πεντάγωνα με τις γωνίες τους να έχουν άνοιγμα διαφορετικό των 108 μοιρών [Poulos (2016)].

β. Σε ένα πρόβλημα απόδειξης, τα βασικά μέρη είναι η υπόθεση και το συμπέρασμα που πρέπει να αποδειχθεί ή να απορριφθεί.
Ας δούμε, για παράδειγμα, τη φράση: «Αν A, B, Γ και Δ είναι τα μέσα των διαδοχικών πλευρών οποιουδήποτε τετραπλεύρου, τότε οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο μέσο τους». Το δεύτερο μέρος της φράσης –που αρχίζει με τη λέξη **τότε**– είναι το συμπέρασμα, ενώ το πρώτο μέρος της φράσης –που αρχίζει με το **αν**– είναι η υπόθεση.

Η αναγνώριση των βασικών μερών ενός προβλήματος είναι σημαντικό να γίνει από το λύτη στο στάδιο της εξοικείωσης (βλ. Κεφ. 2). Επίσης, η αλλαγή των βασικών μερών ή η επαναδιατύπωσή τους μπορεί να συμβάλλει στην εύρεση μιας κατάλληλης στρατηγικής για την επίλυση του προβλήματος. Αυτά θα κατανοηθούν καλύτερα όταν θα πραγματευτούμε εκτενέστερα τα στάδια επίλυσης και τις ευρετικές (Κεφ. 2).

1.4 Ασκήσεις έναντι προβλημάτων

Είναι απαραίτητο να κάνουμε μια γενική διάκριση ανάμεσα στους όρους **άσκηση** και **πρόβλημα**. Η άσκηση είναι ένα ερώτημα για το οποίο κανείς γνωρίζει, ίσως άμεσα, πώς να το προσεγγίσει. Το κατά πόσο το αντιμετωπίζει σωστά ή όχι εξαρτάται από το πόσο επιδέξια εφαρμόζει συγκεκριμένες γνώριμες μεθόδους, όμως δεν προβληματίζεται για το ποιες μεθόδους θα χρησιμοποιήσει. Αντίθετα, ένα πρόβλημα απαιτεί αρκετή σκέψη και επάρκεια διαθέσιμων πόρων πριν βρεθεί η κατάλληλη προσέγγιση. Υπό αυτήν την προοπτική, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η άσκηση είναι μια μαθηματική κατάσταση που εμπλέκει πρακτική και εκγύμναση (drill-and-practice), προκειμένου να ενδυναμώσει μια προγενέστερη μαθηματική γνώση όπως π.χ. συγκεκριμένους αλγορίθμους [Schoenfeld (1992)]. Από την άλλη, το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως μια μαθηματική κατάσταση που για να λυθεί απαιτεί ανάκληση προϋπάρχουσας γνώσης (η οποία μάλιστα πολλές φορές παραμένει αδρανής), καθώς και αναλυτικές και συνθετικές δυνατότητες διαχείρισης της γνώσης αυτής στο πλαίσιο της συγκεκριμένης κατάστασης [Mamona-Downs (2002)]. Ο Schoenfeld (1985) επισημαίνει ότι, αν κάποιος έχει έτοιμη πρόσβαση σε μια προσέγγιση επίλυσης ενός μαθηματικού εγχειρήματος, τότε αυτό αποτελεί άσκηση και όχι πρόβλημα. Χαρακτηρίζει τις ασκήσεις ως εγχειρήματα σχεδιασμένα να καταδεικνύουν την πολύ καλή γνώση σχετικά μικρών τμημάτων του γνωστικού αντικειμένου και που για την ολοκλήρωσή τους απαιτούν ένα σύντομο χρονικό διάστημα [Schoenfeld (1988)].

Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι μια άσκηση.

Παράδειγμα 1: Να υπολογίσετε το 3847^4 χωρίς χρήση αριθμομηχανής.

Δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία για το πώς θα προχωρήσουμε – απλά πολλαπλασιάζουμε, προσεκτικά. Η επόμενη ερώτηση είναι πιο απαιτητική.

Παράδειγμα 2: Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ορθογώνιου παραλληλογράμμου που μεγιστοποιούν το εμβαδόν του, όταν η περίμετρός του παραμένει σταθερή και ίση με $400\,\mathrm{m}$.

Κι εδώ, η γνώση που έχει ο λύτης καθιστά το παραπάνω άσκηση ή πρόβλημα. Αν ο λύτης έχει κάποια σχετική εμπειρία στην εύρεση ακροτάτων (εδώ π.χ. μεγιστοποίηση) με χρήση του Λογισμού (όπως η χρήση παραγώγων μιας συνάρτησης και κάποια βασικά θεωρήματα), τότε αυτό που έχει να αντιμετωπίσει είναι μια άσκηση. Εύκολα θα καταστρώσει τις εξισώσεις $E = xy$ και $P = 400 = 2x + 2y$ και, αντικαθιστώντας από τη δεύτερη το $y = 200 - x$ στην πρώτη, θα οδηγηθεί στη συνάρτηση $E(x) = -x^2 + 200x$. Για να βρει την τιμή του x που καθιστά μέγιστο το εμβαδόν E, θα υπολογίσει την πρώτη παράγωγο

$$\frac{dE}{dx} = -2x + 200.$$

Η μέγιστη τιμή του E επιτυγχάνεται για x για τα οποία ισχύει $dE/dx = 0$, δηλαδή για $x = 100$.

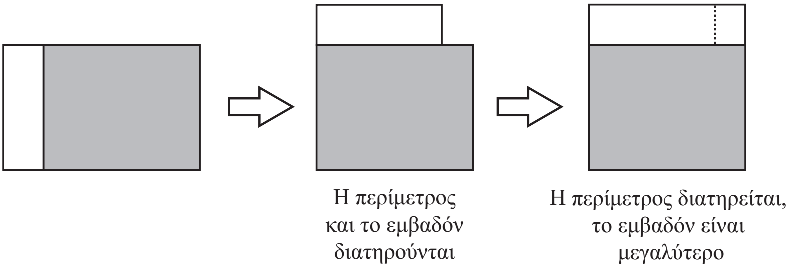
Η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2E}{dx^2} = -2$$

είναι αρνητική, οπότε με βάση το σχετικό θεώρημα για τη χρήση πρώτης και δεύτερης παραγώγου στον προσδιορισμό των ακροτάτων, το ορθογώνιο με μήκος $x = 100\,\mathrm{m}$ και πλάτος $y = 200 - 100 = 100\,\mathrm{m}$ (δηλαδή το τετράγωνο), είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο $400\,\mathrm{m}$. Αν, όμως, ο λύτης δεν είναι εξοικειωμένος με τη συγκεκριμένη μαθηματική γνώση και μέθοδο, τότε το ζητούμενο εγχείρημα αποτελεί γι' αυτόν πρόβλημα.

Στη γενίκευσή του, το παραπάνω εγχείρημα (task) έχει μια ενδιαφέρουσα διαισθητική προσέγγιση. Δίνεται παρακάτω μια δραστηριότητα, όπου η «μεταφορά» από το επίπεδο προβλήματος «εύρεσης» σ' αυτό της «απόδειξης» είναι σχετικά εύκολη:

Σε μια τάξη, ο δάσκαλος σχεδιάζει την παρακάτω ακολουθία σχημάτων (χωρίς φυσικά τις λεζάντες).



Σχημα 1.1

Μετά θέτει τα εξής ερωτήματα:

α. Ποιο είναι το μαθηματικό θέμα/πρόβλημα που υπέβαλε τη σχεδίαση αυτών των σχημάτων;
β. Ποιο είναι το επιχείρημα που προτείνεται από το σχήμα για την επίλυση του προβλήματος;
γ. Πώς γράφεται το ίδιο επιχείρημα αυστηρά με σύμβολα;

Το επόμενο είναι επίσης ένα παράδειγμα το οποίο για κάποιους είναι άσκηση, για τους περισσότερους όμως είναι πρόβλημα [Zeitz (2007), σ. 2].

Παράδειγμα 3: Κατά την απογραφή του πληθυσμού, ο απογραφέας ρωτά την κυρία του σπιτιού πόσα παιδιά έχει και ποιες είναι οι ηλικίες τους.

– Έχω τρεις κόρες, οι ηλικίες τους είναι φυσικοί αριθμοί, και το γινόμενο των ηλικιών τους είναι 36, είπε η μητέρα.
– Αυτό δεν μου αρκεί, απάντησε ο απογραφέας.
– Θα μπορούσα να σας πω το άθροισμα των ηλικιών τους, όμως και αυτό δεν θα σας διευκόλυνε.
– Θα ήθελα κάτι περισσότερο.
– Εντάξει. Στη μεγαλύτερη κόρη μου, την Άννα, αρέσουν τα σκυλιά.

Ποιες είναι οι ηλικίες των τριών κοριτσιών;

Μετά την πρώτη ανάγνωση, το πρόβλημα φαίνεται άλυτο – δεν υπάρχει αρκετή πληροφορία για να προσδιορίσουμε τις ηλικίες. Να γιατί πρόκειται για πρόβλημα και μάλιστα διασκεδαστικό. Καταγράφουμε αναλυτικά τα δεδομένα. Το γινόμενο των ηλικιών είναι 36, επομένως υπάρχουν πολύ συγκεκριμένες πιθανές τριάδες ηλικιών. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται αυτές οι τριάδες όπως επίσης και το άθροισμα των σχετικών ηλικιών.

(1, 1, 36)	(1, 2, 18)	(1, 3, 12)	(1, 4, 9)	(1, 6, 6)	(2, 2, 9)	(2, 3, 6)	(3, 3, 4)
38	**21**	**16**	**14**	**13**	**13**	**11**	**10**

Παρατηρούμε ότι τη δεύτερη φορά που μιλά η μητέρα («Θα μπορούσα να σας πω το άθροισμα των ηλικιών τους, όμως και αυτό δεν θα σας διευκόλυνε») φαίνεται να μας δίνει μια σημαντική πληροφορία. Σύμφωνα με τον πίνακα, η περίπτωση να δώσει το άθροισμα και ο απογραφέας να μην είναι και πάλι σε θέση να προσδιορίσει τις ηλικίες είναι οι δύο τριάδες $(1, 6, 6)$ και $(2, 2, 9)$, που δίνουν το ίδιο άθροισμα, δηλ. 13. Αυτό που δίνει την τελική λύση είναι όμως η τρίτη πρόταση της μητέρας όπου λέει ότι υπάρχει μια κόρη που είναι η μεγαλύτερη, και έτσι αυτό βγάζει από το παιχνίδι την τριάδα $(1, 6, 6)$. Επομένως, οι τρεις κόρες έχουν ηλικίες $2, 2$, και 9.

Ένα καλό πρόβλημα παρουσιάζει «μυστήριο» και ενδιαφέρον. Μυστήριο διότι πρώτ' απ' όλα δεν γνωρίζεις πώς να το λύσεις. Αν από την άλλη δεν είναι ενδιαφέρον, δεν θα θελήσεις να διαθέσεις χρόνο και προσπάθεια στο να το καταλάβεις και να προσπαθήσεις να το επιλύσεις. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αυτό που αρχικά δίνεται είναι ένα «εύρος» από πιθανά αποτελέσματα. Στη συνέχεια δίνονται (επιπλέον) συνθήκες προκειμένου να προσδιοριστεί το μοναδικό αποτέλεσμα. Η εμφάνιση των συνθηκών τείνει να κάνει την κατάσταση πιο πολύπλοκη και όχι τόσο ξεκάθαρη ως προς τη λύση της. Ο ρόλος των συνθηκών είναι καίριος στην επίλυση προβλήματος και ειδικότερα στη δημιουργία προβλήματος (βλ. Κεφ. 10).

1.5 Κλειστά – ανοικτά προβλήματα

Στην κοινότητα των ερευνητών, σε αυτά καθαυτά τα Μαθηματικά, **ανοικτό πρόβλημα** σημαίνει ένα πρόβλημα το οποίο δεν έχει ακόμη επιλυθεί, δηλαδή είναι ανοικτό γιατί ακόμη δεν έχει «κλείσει», π.χ. η εικασία του Goldbach. Η αρχική της διατύπωση από τον Goldbach (1742) έλεγε: «Φαίνεται ότι κάθε αριθμός μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών» (ο Goldbach θεωρούσε τον αριθμό 1 ως πρώτο, κάτι που δεν δεχόμαστε σήμερα). Ο Euler επαναδιατύπωσε την ισοδύναμη εικασία, που αποκαλείται τώρα «ισχυρή» εικασία Goldbach, ως εξής: «όλοι οι θετικοί άρτιοι αριθμοί $\geqslant 4$ μπορούν να εκφραστούν ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών». Η εικασία αυτή δεν έχει αποδειχτεί μέχρι τώρα.

Κατ' αναλογία, στο σχολικό επίπεδο, ένα πρόβλημα μπορεί να θεωρείται κλειστό για μερικούς μαθητές και ανοικτό για άλλους, π.χ. το πρόβλημα «να βρείτε τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + c$ με $a, b, c \in \mathbb{R}$» είναι κλειστό για παιδιά 15 ετών, αλλά ανοικτό για παιδιά 12 ετών.

Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια, στο πλαίσιο της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών, προσδίνουμε στον όρο ανοικτό πρόβλημα μία από τις ακόλουθες σημασίες:

α. Ανοικτό ως προς την ερμηνεία της κατάστασης που περιγράφει

Ένα απλό τέτοιο πρόβλημα μπορεί να είναι το «πώς μπορείς πιο αποτελεσματικά να γεμίσεις ένα κουτί με αντικείμενα του ίδιου σχήματος;». Εδώ οι μαθητές θα φτάσουν σε διαφορετικές λύσεις ανάλογα με το πώς θα ερμηνεύσουν:

1. Τον όρο «κουτί»: Τι σχήμα θα του προσδώσουν.
2. Τον όρο «γεμίσεις»: Θα εννοήσουν ότι σημαίνει να μην αφήσουν κανένα κενό στο κουτί; Να μην επιτρέψουν την τοποθέτηση αντικειμένων των οποίων το πάνω μέρος θα εξέχει του χείλους του κουτιού ή το κάτω μέρος θα βρίσκεται στο χείλος;
3. Τον όρο «αποτελεσματικά»: Θα εννοήσουν ότι σημαίνει να χρησιμοποιήσουν τον μικρότερο αριθμό αντικειμένων ή να αφεθεί όσο το δυνατόν μικρότερος χώρος άδειος στο κουτί;

β. Ανοικτό ως προς τις διαφορετικές προσεγγίσεις που θα υιοθετηθούν για την επίλυσή του

Για παράδειγμα: «δοθέντος ενός κύκλου να προσδιοριστεί το κέντρο του». Εδώ οι μαθητές μπορεί να βρουν το κέντρο του κύκλου:

1. Διπλώνοντας το χαρτί προκειμένου να δημιουργήσουν δύο άξονες συμμετρίας του κύκλου.

2. Φέρνοντας δύο, μη παράλληλες, χορδές και τις μεσοκαθέτους τους.
3. Εγγράφοντας ορθές γωνίες.
4. Σχεδιάζοντας ένα περιγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο και συνδέοντας τα σημεία επαφής των πλευρών του (εφαπτόμενων στον κύκλο) με τις απέναντι κορυφές.

γ. Ανοικτό ως προς τις διαφορετικές λύσεις που επιδέχεται

Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι: «σχεδιάστε ένα μη κανονικό πεντάγωνο με περίμετρο 25 cm». Είναι ένα πρόβλημα που επιτρέπει διαφορετικές απαντήσεις αφού ζητά μόνο το σχεδιασμό ενός πενταγώνου με περίμετρο γνωστού μήκους. Αρχικά, μπορεί να δημιουργηθεί η εντύπωση ότι είναι δυνατόν με απλές δοκιμές να δοθούν αυθαίρετες απαντήσεις. Ωστόσο, η σχεδίαση ενός τέτοιου πενταγώνου απαιτεί κατάλληλη γεωμετρική κατασκευή.

Οι Silver & Adams (1987) όρισαν το ανοικτό πρόβλημα ως εκείνο που καλεί το μαθητή να του προσδώσει *δομή*. Τα παραπάνω παραδείγματα διευκρινίζουν την έννοια του «ανοικτού», και ο αναγνώστης μπορεί να διακρίνει ότι προσφέρονται για να ενθαρρύνουν τη δημιουργία νέων προβλημάτων. Οι Silver & Mamona (1990) ισχυρίζονται μάλιστα ότι η δημιουργία προβλημάτων μπορεί να αρχίσει με τη μετατροπή κλειστών προβλημάτων σε ανοικτά. Αναφέρουν ως παράδειγμα το ακόλουθο: Αντί να τεθεί στους μαθητές το πρόβλημα «Θεωρήστε ότι στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου υπάρχει ένα σημείο P με αποστάσεις 3, 4 και 5 cm από τις πλευρές. Να βρείτε το μήκος του ύψους του τριγώνου» να τους δοθεί το «Θεωρήστε ότι στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου υπάρχει ένα σημείο P με αποστάσεις 3, 4 και 5 cm από τις πλευρές. Φτιάξτε και λύστε όσα προβλήματα μπορείτε με βάση αυτήν την κατάσταση».

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι, στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών, το ανοικτό πρόβλημα ενέχει την έννοια της πολλαπλότητας που μπορεί να συνδέεται είτε με την ερμηνεία των όρων του προβλήματος, είτε με τις προσεγγίσεις στην επίλυση, είτε με αυτήν καθαυτή τη λύση του προβλήματος. Από την άλλη μεριά, όταν το περιβάλλον των συμφραζομένων (context) είναι σαφώς οριοθετημένο και οδηγεί σε προβλήματα που επιδέχονται μόνο μία προσέγγιση επίλυσης, η οποία αποφέρει μία μοναδική λύση, τότε μιλάμε για κλειστά προβλήματα.

Πλήθος ερευνητικών ευρημάτων της Διδακτικής των Μαθηματικών επιβεβαιώνουν την παραδοχή ότι τα ανοικτά προβλήματα, όπως τα ορίσαμε παραπάνω, συμβάλλουν ιδιαίτερα στην εμπλοκή των μαθητών σε μια παραγωγική διερεύνηση και ενισχύουν την αίσθηση ελέγχου (βλ. Κεφ. 4) που έχει ο λύτης με το να τον ενθαρρύνουν να αναζητεί σχέσεις που ισχύουν και μοτίβα, να κάνει γενικεύσεις, να παίρνει συνειδητές αποφάσεις σε κάθε στιγμή στην πορεία της επίλυσης.

Εντούτοις, δεν είναι απλό να τραβήξουμε μια διαχωριστική γραμμή μεταξύ κλειστών και ανοικτών προβλημάτων. Αυτό πάντοτε εξαρτάται καταρχήν, όπως σημειώσαμε πιο πάνω, από τις γνώσεις του συγκεκριμένου λύτη/λυτών στους οποίους τίθεται το πρόβλημα. Ένα πρόβλημα μπορεί να φαίνεται ότι ζητά κάτι πολύ συγκεκριμένο, αλλά στην πορεία επίλυσής του να εμφανίζονται όψεις επιχειρηματολογίας που είναι πολύ γενικότερες και δεν περιορίζονται στην προσέγγιση της λύσης μόνο του συγκεκριμένου προβλήματος. Το πρόβλημα μπορεί να μοιάζει κλειστό, αλλά να συμβαίνει να είναι τόσο πολύπλοκο ώστε οι λύτες να είναι σε θέση να ασχοληθούν μόνο με κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Το πρόβλημα μπορεί να χρειάζεται κάποια δεδομένα που λείπουν από την εκφώνηση, και έτσι οι λύτες να πρέπει είτε να επιλέξουν πεδία τιμών είτε να εξαγάγουν την πληροφορία που λείπει μέσα από τη χρήση μεταβλητών. Τέλος, ένα πρόβλημα μπορεί να υπόκειται σε διαφορετικές «ερμηνείες» λόγω απουσίας σαφών ορισμών των αντικειμένων που εμπλέκονται στην εκφώνησή του.

1.6 Το τρίγωνο του Pascal

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο/σχολιασμό για τη φύση της έννοιας «μαθηματικό πρόβλημα», παραθέτοντας ένα πλούσιο περιβάλλον που μπορεί να αποτελέσει τη βάση για δημιουργία προβλημάτων: αυτό του τριγώνου του Pascal (σταθερή αξία!). Αρχικά παρουσιάζουμε το τρίγωνο του Pascal για να εντοπίσουμε σε αυτό μια σειρά από ενδιαφέρουσες σχέσεις και στη συνέχεια διατυπώνουμε μια σειρά από προβλήματα που απορρέουν από αυτές τις σχέσεις.

Ας δούμε μερικές από τις πρώτες σειρές του τριγώνου του Pascal.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

Σχημα 1.2: Το τρίγωνο του Pascal.

Τα στοιχεία σε κάθε σειρά προκύπτουν από το άθροισμα των ζευγών των προσκείμενων αριθμών στην από πάνω προηγούμενη σειρά. Για παράδειγμα, $10 = 4 + 6$, $4 = 3 + 1$. Σύμφωνα με αυτόν τον κανόνα, η επόμενη σειρά στο τρίγωνο θα αποτελείται από τους αριθμούς

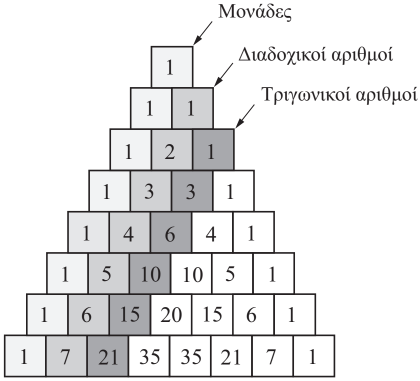
$$1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Πριν συνεχίσετε να διαβάζετε το υπόλοιπο κείμενο που αναφέρεται στο τρίγωνο του Pascal, αφιερώστε λίγο χρόνο στο να το παρατηρήσετε προσεκτικά. «Χαρτογραφώντας» το περιβάλλον αυτό, ανακαλύψτε όσα μοτίβα και σχέσεις μπορείτε.

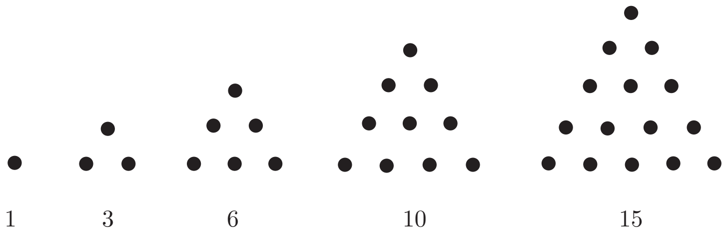
Η παραπάνω υπόδειξη αφήνει να διαφανεί και ένας τρόπος αξιοποίησης τέτοιων περιβαλλόντων. Ουσιαστικά, τοποθετούμε τους μαθητές σε μια κατάσταση προς διερεύνηση. Ξεκινώντας με τη διαδικασία του εντοπισμού ακολουθιών αριθμών, που θα αποτελούν κάθε φορά την επόμενη σειρά στο τρίγωνο του Pascal, οι μαθητές αρχίζουν να αναζητούν σχέσεις που εμφανίζονται μεταξύ των όρων του τριγώνου ή (σε πιο προχωρημένο επίπεδο) συνδέσεις με άλλα μαθηματικά αντικείμενα ή θέματα (π.χ. διωνυμικούς συντελεστές, επιλογή r αντικειμένων από n). Έτσι, ως τώρα δεν γίνεται αναφορά σε συγκεκριμένα προβλήματα αλλά μάλλον αφήνεται στο μαθητή να αναλάβει την πρωτοβουλία να εγείρει θέματα ή ερωτήματα, καθιστώντας την όλη προσέγγιση πολύ κοντά στη δημιουργία προβλήματος (problem posing) (βλ. Κεφ. 10).

Καταγράφουμε μια σειρά από επιμέρους αριθμητικά μοτίβα που εντοπίζουμε στο τρίγωνο και που μπορεί να αποτελέσουν τη βάση για δραστηριότητα στην τάξη.

Διαγώνιες



Σχημα 1.3

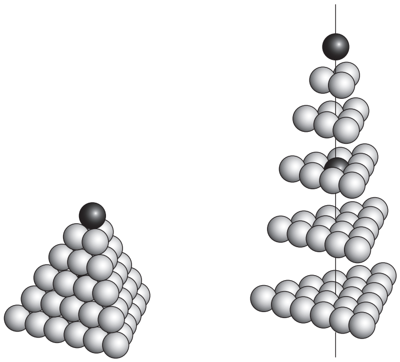


Σχημα 1.4

Η *πρώτη* διαγώνιος $(1, 1, 1, \dots)$ αποτελείται μόνο από μονάδες.
Η *δεύτερη* διαγώνιος $(1, 2, 3, \dots)$ αποτελεί τη διαδοχή των φυσικών αριθμών.
Η *τρίτη* διαγώνιος $(1, 3, 6, \dots)$ αποτελείται από τους τριγωνικούς αριθμούς. Πρόκειται για μια ακολουθία αριθμών που παράγεται από μια διάταξη τελειών που σχηματίζουν ισόπλευρα τρίγωνα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4. Στην ουσία, πρόκειται για ακολουθία αριθμών όπου ο καθένας είναι το μερικό άθροισμα n διαδοχικών φυσικών αριθμών με πρώτον πάντα το 1:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Η *τέταρτη* διαγώνιος περιλαμβάνει τους αριθμούς $1, 4, 10, 20, \dots$ που είναι γνωστοί ως τετραεδρικοί αριθμοί. Για να κατανοήσουμε την προέλευση του όρου δείχνουμε το σχήμα 1.5.



Σχημα 1.5

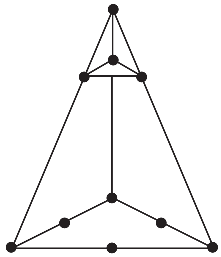
Πρόκειται για ένα τετράεδρο. Ας μετρήσουμε πόσες σφαίρες χρειαζόμαστε, ανάλογα με το ύψος του τετραέδρου.

1 στρώση χρειάζεται **1** σφαίρα,

2 στρώσεις χρειάζονται $3 + 1 = \mathbf{4}$ σφαίρες,

3 στρώσεις χρειάζονται $1 + 3 + 6 = \mathbf{10}$ σφαίρες.

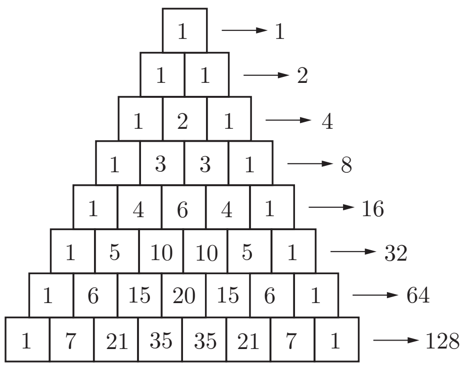
Οι διαδοχικοί τετραεδρικοί αριθμοί δεν είναι παρά μερικά αθροίσματα διαδοχικών τριγωνικών αριθμών. Την ύπαρξή τους γνωρίζουμε ήδη από την εποχή του Θέωνα και του Νικομάχου στις αρχές του 2ου αι. π.Χ. Αναπαριστώνται γεωμετρικά με μια πυραμίδα που έχει τριγωνική βάση και κάθε της επίπεδο αναπαριστά έναν τριγωνικό αριθμό (Σχ. 1.6).



Σχημα 1.6

Έτσι, ο τετραεδρικός αριθμός 10 (τρίτος στην σειρά των τετραεδρικών αριθμών) προκύπτει από το άθροισμα των τριγωνικών αριθμών 1, 3, και 6 (των πρώτων τριών τριγωνικών αριθμών) και η γεωμετρική του αναπαράσταση είναι αυτή του τετραέδρου του σχήματος 1.6. Γενικά, ο n-οστός τετραεδρικός αριθμός στην ακολουθία προκύπτει από το άθροισμα των πρώτων n τριγωνικών αριθμών. Ο αλγεβρικός τύπος που δίνει την ακολουθία των τετραεδρικών αριθμών είναι $T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, τους βρίσκουμε πάντα στην τέταρτη θέση από τα αριστερά προς τα δεξιά στο τρίγωνο του Pascal, και αποτελούν τους συντελεστές του x^3 στο ανάπτυγμα του $(1+x)^{n+2}$ για $n = 1, 2, 3, \dots$

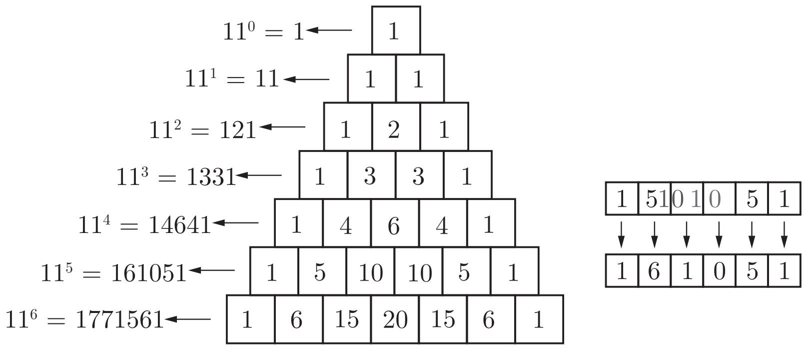
Οριζόντια αθροίσματα



Σχημα 1.7

Παρατηρούμε τα οριζόντια αθροίσματα στο σχήμα 1.7. Διαπιστώνουμε ότι σε κάθε σειρά το άθροισμα είναι διπλάσιο από εκείνο της προηγούμενης σειράς, ή αλλιώς ότι πρόκειται για τη σειρά των δυνάμεων του 2 αφού $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3, \ldots$

Δυνάμεις του 11



Σχημα 1.8

Σε κάθε σειρά, ο αριθμός που σχηματίζεται από τους επιμέρους αριθμούς της σειράς (και με εύλογο χειρισμό όσων από αυτούς είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 10, όπως φαίνεται στο δεξιό μέρος του σχήματος 1.8) αποτελεί μια δύναμη του 11. Είναι χαρακτηριστικό μάλιστα ότι ο δεύτερος αριθμός κάθε σειράς αποτελεί τον εκθέτη της δύναμης του 11.

Ακολουθία αριθμών Fibonacci

Η ακολουθία των αριθμών Fibonacci ξεκινά με τους αριθμούς 1 και 1 και κάθε επόμενος προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγουμένων του.

1
1
$2 = 1 + 1$
$3 = 2 + 1$
$5 = 3 + 2$
$\ldots\ldots$

Από το τρίγωνο του Pascal μπορούμε να βρούμε τους αριθμούς της ακολουθίας Fibonacci με διάφορους τρόπους. Ένας εύκολος τρόπος είναι να προσθέσουμε τους αριθμούς που βρίσκονται στις νοητές διαγωνίους όπως φαίνεται στο σχήμα 1.9.