1

Εισαγωγή

Η κλασική μηχανική είναι μία από τις πιο γνωστές επιστημονικές θεωρίες. Οι βασικές της έννοιες –η μάζα, η επιτάχυνση, η δύναμη κ.ο.κ.– έχουν γίνει πλέον τόσο αναπόσπαστο μέρος του καθημερινού μας τρόπου σκέψης, ώστε η φυσική τους σημασία να μοιάζει περισσότερο προφανής από ό,τι πραγματικά είναι. Ακριβώς γι' αυτό, ένα μεγάλο μέρος του εισαγωγικού αυτού κεφαλαίου θα αφιερωθεί σε μια κριτική εξέταση των θεμελιωδών εννοιών και αρχών της μηχανικής.

Κάθε επιστημονική θεωρία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων, οι οποίες υποδεικνύονται από τις παρατηρήσεις μας αλλά αποτελούν μια εξιδανίκευσή τους. Στη συνέχεια η θεωρία υπόκειται σε πειραματικό έλεγχο των προβλέψεων που οι υποθέσεις αυτές συνεπάγονται. Αν προκύπτουν συστηματικές διαφορές, προσπαθούμε να τροποποιήσουμε τις υποθέσεις ώστε να αποκατασταθεί η συμφωνία με τις παρατηρήσεις. Αν μετά από επανειλημμένους ελέγχους δεν προκύπτει σοβαρή διαφωνία, τότε οι υποθέσεις βαθμιαία αποκτούν την υπόσταση «φυσικών νόμων». Όταν εμφανίζονται αποτελέσματα που αντιφάσκουν με καταξιωμένους πλέον νόμους, όπως συμβαίνει συχνά, έχουμε την τάση να αναζητούμε άλλες δυνατές ερμηνείες – ότι απλουστευτικές υποθέσεις που είχαμε προτείνει ίσως είναι εσφαλμένες ή ότι παραγνωρίσαμε φαινόμενα που ίσως είναι σημαντικά.

Πρέπει ωστόσο να έχουμε κατά νου ότι όσο εντυπωσιακή και αν είναι η πειραματική μαρτυρία, δεν μπορούμε ποτέ να ισχυριστούμε ότι οι νόμοι αυτοί έχουν καθολική ισχύ. Μπορούμε μόνο να υποστηρίξουμε ότι προσφέρουν καλή περιγραφή για εκείνη την κατηγορία φαινομένων για την οποία οι προβλέψεις τους έχουν επαρκώς ελεγχθεί. Ένα από τα παλαιότερα παραδείγματα το προσφέρουν τα αξιώματα του Ευκλείδη. Δεν χωρεί αμφιβολία ότι τα αξιώματα αυτά ισχύουν στις συνηθισμένες κλίμακες, ωστόσο δεν δικαιούμαστε να υποθέσουμε ότι πρέπει οπωσδήποτε να εφαρμόζονται είτε στην κοσμολογική είτε στη μικροσκοπική κλίμακα. Πράγματι, η θεωρία της βαρύτητας του Einstein («η γενική σχετικότητα») τα έχει τροποποιήσει.

Οι νόμοι της κλασικής μηχανικής δεν αποτελούν εξαίρεση. Αν και η περιοχή ισχύος τους έχει διευρυνθεί πάρα πολύ από τότε που πρωτοδιατυπώθηκαν από τον Γαλιλαίο και τον Νεύτωνα στο έργο του *Principia*, έχει ωστόσο διαπιστωθεί η ανεπάρκειά τους σε δύο κατευθύνσεις. Για την περιγραφή των φαινομένων μικρής κλίμακας, όπως της ατομικής και πυρηνικής φυσικής, η κλασική μηχανική έχει υπερκερασθεί από την κβαντομηχανική, ενώ για φαινόμενα με ταχύτητες που πλησιάζουν αυτήν του φωτός, από τη σχετικότητα.

Αυτό δεν σημαίνει ότι η κλασική μηχανική έχει χάσει την αξία της. Πράγματι, τόσο η κβαντομηχανική όσο και η ειδική και η γενική θεωρία της σχετικότητας αποτελούν προεκτάσεις της κλασικής μηχανικής, με την έννοια ότι αναπαράγουν τα πορίσματά της στις ενδεδειγμένες οριακές περιπτώσεις. Έτσι το γεγονός ότι αυτές οι θεωρίες έχουν επιβεβαιωθεί, ενισχύει ουσιαστικά την πίστη μας για την ορθότητα της κλασικής μηχανικής στη δική της ευρύτατη περιοχή ισχύος. Πράγματι, η κλασική μηχανική είναι μια εξαιρετικά επιτυχής θεωρία, η οποία παρέχει μια συνεκτική και ικανοποιητική περιγραφή φαινομένων τόσο διαφορετικών όπως είναι οι πλανητικές τροχιές, οι παλίρροιες και η κίνηση του γυροσκοπίου. Επιπρόσθετα, πολλά από τα πορίσματα της κλασικής μηχανικής παραμένουν σε εφαρμογή ακόμη και πέραν της περιοχής ισχύος της. Ειδικότερα, οι νόμοι διατήρησης της ενέργειας, της ορμής και της στροφορμής είναι, όσο γνωρίζουμε, καθολικής εμβέλειας.

1.1 Χώρος και χρόνος

Οι πιο θεμελιακές υποθέσεις της φυσικής είναι αυτές που αναφέρονται στις έννοιες του χώρου και του χρόνου. Υποθέτουμε ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι συνεχείς, ότι έχει νόημα να λέμε ότι ένα γεγονός συνέβη σε ορισμένο σημείο στο χώρο και σε ορισμένη στιγμή στο χρόνο, και ότι υπάρχουν παγκόσμια μέτρα μήκους και χρόνου (με την έννοια ότι παρατηρητές σε διαφορετικούς τόπους και σε διαφορετικούς χρόνους μπορούν να προβούν σε αξιόπιστες συγκρίσεις των μετρήσεών τους). Οι υποθέσεις αυτές είναι κοινές σε ολόκληρη τη φυσική και, παρόλον ότι κατά καιρούς έχουν αμφισβητηθεί, δεν υπάρχει πειστική μαρτυρία ότι έχουμε πλησιάσει τα όρια της περιοχής όπου ισχύουν.

Στην «κλασική» φυσική υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει μια παγκόσμια κλίμακα χρόνου (με την έννοια ότι δύο παρατηρητές που έχουν συγχρονίσει τα ρολόγια τους, θα συμφωνούν πάντα για το χρόνο οποιουδήποτε συμβάντος), ότι η γεωμετρία του χώρου είναι Ευκλείδεια, και ακόμη ότι δεν υπάρχει καταρχήν όριο στην ακρίβεια με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε κάθε θέση και ταχύτητα. Οι υποθέσεις αυτές έχουν κάπως τροποποιηθεί στην κβαντομηχανική και στη σχετικότητα. Εδώ, ωστόσο, θα τις θεωρήσουμε ως δεδομένες και θα εστιάσουμε την προσοχή μας στις πιο ειδικές υποθέσεις της κλασικής μηχανικής.

Η αρχή της σχετικότητας

Στην αριστοτελική κοσμοθεώρηση, το γεγονός ότι τα βαριά σώματα πέφτουν εξηγούνταν με την υπόθεση ότι κάθε στοιχείο (γη, αέρας, φωτιά, νερό) διαθέτει τη δική του προκαθορισμένη σφαίρα, προς την οποία τείνει να επιστρέψει εκτός και αν εμποδιστεί με τη βία. Το στοιχείο *γη*, ειδικότερα, τείνει να πλησιάσει όσο πιο πολύ γίνεται το κέντρο του Σύμπαντος και έτσι σχηματίζει μια σφαίρα γύρω του. Σε αυτό το είδος ερμηνείας, το κεντρικό σημείο κατέχει έναν ιδιαίτερο, προνομιακό ρόλο και η θέση στο χώρο έχει απόλυτη σημασία.

Στη νευτώνεια μηχανική, από την άλλη μεριά, τα σώματα πέφτουν επειδή έλκονται από τη *Γη* αντί από κάποιο σταθερό σημείο στο χώρο. Έτσι η θέση έχει νόημα μόνο σε σχέση με τη Γη ή κάποιο άλλο σώμα. Για τον ίδιο ακριβώς λόγο η ταχύτητα έχει σχετική μόνο σημασία. Αν δύο σώματα κινούνται το καθένα ως προς το άλλο με σταθερή ταχύτητα, είναι για λόγους αρχής αδύνατο να αποφανθεί κανείς ποιο από αυτά ηρεμεί και ποιο κινείται. Αυτή η θεμελιακής σημασίας πρόταση είναι η *αρχή της σχετικότητας*.

Η επιτάχυνση, ωστόσο, διατηρεί ακόμη απόλυτη σημασία, καθώς είναι δυνατό πειραματικά να γίνει διάκριση μεταξύ μιας κίνησης με ομαλή (δηλ. σταθερή σε μέγεθος και φορά) ταχύτητα και μιας επιταχυνόμενης κίνησης. Όταν βρισκόμαστε στο εσωτερικό ενός αεροσκάφους μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την επιτάχυνσή του, δεν μπορούμε όμως να μετρήσουμε την ταχύτητά του – αν και κοιτάζοντας έξω μπορούμε να εκτιμήσουμε τη *σχετική* ταχύτητά του ως προς τα εξωτερικά αντικείμενα. (Στη γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein ακόμη και η επιτάχυνση γίνεται σχετική έννοια, σε μικρή τουλάχιστον κλίμακα. Αυτό γίνεται δυνατό χάρις στο γεγονός ότι ένας παρατηρητής περιορισμένος σε μια μικρή περιοχή του χώρου δεν μπορεί να διακρίνει πειραματικά αν επιταχύνεται ή αν βρίσκεται σε ένα πεδίο βαρύτητας.)

Αν δύο μη επιταχυνόμενοι παρατηρητές κάνουν το ίδιο πείραμα, σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας πρέπει να καταλήξουν στα ίδια αποτελέσματα. Δεν κάνει διαφορά αν το πείραμα γίνεται στο έδαφος ή σε ένα ομαλά κινούμενο όχημα. Ωστόσο, ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής που διεξάγει το ίδιο πείραμα, θα πάρει εν γένει διαφορετική απάντηση. Η αρχή της σχετικότητας υποστηρίζει ότι όλοι οι μη επιταχυνόμενοι παρατηρητές είναι ισοδύναμοι, ενώ δεν κάνει καμιά αναφορά για επιταχυνόμενους παρατηρητές.

Αδρανειακά πλαίσια

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε την έννοια του πλαισίου αναφοράς. Για να προσδιορίσει θέσεις και χρόνους, κάθε παρατηρητής μπορεί να επιλέξει το μηδέν της χρονικής κλίμακας, μιαν αρχή στο χώρο, και ένα σύστημα τριών καρτεσιανών αξόνων. Όλα αυτά θα τα ονομάζουμε συλλογικά ένα *πλαίσιο* (ή *σύστημα*) *αναφοράς*. Η θέση και ο χρόνος κάθε συμβάντος μπορούν τότε να καθορίζονται ως προς αυτό το πλαίσιο από τις τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z και το χρόνο t. Αν βρισκόμαστε πάνω σε κάποιο στερεό σώμα, όπως η Γη, μπορούμε, για παράδειγμα, να επιλέξουμε κάποιο σημείο του σώματος ως αρχή και τους άξονες να είναι στερεωμένοι στο σώμα (αν και, όπως θα συζητήσουμε αργότερα, αυτό το πλαίσιο δεν είναι ακριβώς μη επιταχυνόμενο).

Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας, τα πλαίσια αναφοράς που χρησιμοποιούνται από διαφορετικούς μη επιταχυνόμενους παρατηρητές είναι τελείως ισοδύναμα. Οι νόμοι της φυσικής εκφρασμένοι σε συντεταγμένες x, y, z, t ενός τέτοιου πλαισίου αναφοράς πρέπει να έχουν την ίδια μορφή όταν εκφραστούν σε συντεταγμένες x', y', z', t' ενός άλλου ομοειδούς πλαισίου. Αυτό, ωστόσο, δεν συμβαίνει όταν οι νόμοι εκφράζονται σε συντεταγμένες που χρησιμοποιεί κάποιος επιταχυνόμενος παρατηρητής. Τα πλαίσια που χρησιμοποιούνται από μη επιταχυνόμενους παρατηρητές ονομάζονται *αδρανειακά* πλαίσια.

Δεν έχουμε πει ακόμη τίποτε σχετικά με το πώς μπορεί να διαπιστωθεί αν ένας παρατηρητής επιταχύνεται. Χρειαζόμαστε κάποιο κριτήριο, που να επιτρέπει τη διάκριση ανάμεσα σε αδρανειακά και μη αδρανειακά πλαίσια. Ένα αδρανειακό πλαίσιο μπορεί τυπικά να οριστεί σαν ένα πλαίσιο αναφοράς ως προς το οποίο κάθε απομονωμένο σώμα, απομακρυσμένο απεριόριστα από όλη την υπόλοιπη ύλη, θα κινούνταν με ομαλή ταχύτητα. Βέβαια ο ορισμός αυτός αποτελεί εξιδανίκευση, αφού πρακτικά είναι αδύνατο να απομακρυνθούμε απεριόριστα από την υπόλοιπη ύλη. Με επαρκή ακρίβεια για όλες τις εφαρμογές, αδρανειακό είναι ένα πλαίσιο του οποίου ο προσανατολισμός σε σχέση με τους «απλανείς» αστέρες είναι σταθερός, και ως προς το οποίο ο Ήλιος (ή, ακριβέστερα, το κέντρο μάζας του ηλιακού συστήματος) κινείται με ομαλή ταχύτητα. Αποτελεί βασική υπόθεση της κλασικής μηχανικής ότι τέτοια πλαίσια αναφοράς υπάρχουν. Πράγματι, η υπόθεση αυτή (μαζί με τον ορισμό των αδρανειακών πλαισίων) συνιστά το φυσικό περιεχόμενο του *πρώτου νόμου του Νεύτωνα* (σώμα στο οποίο δεν επιδρούν δυνάμεις κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα).

Είναι γενικά βολικό να χρησιμοποιεί κανείς μόνο αδρανειακά πλαίσια, χωρίς όμως να είναι και αναγκαίο. Μερικές φορές μας διευκολύνει να χρησιμοποιούμε μη αδρανειακά (ειδικότερα, περιστρεφόμενα) πλαίσια ως προς τα οποία οι νόμοι της μηχανικής αποκτούν πολυπλοκότερη μορφή. Για παράδειγμα, στο Κεφάλαιο 5 θα συζητήσουμε τη χρήση ενός πλαισίου σταθερά προσαρτημένου στην περιστρεφόμενη Γη.

Διανύσματα

Είναι συχνά βολικό να χρησιμοποιούμε έναν συμβολισμό που δεν αναφέρεται σε κάποιο σύστημα αξόνων. Αντί να χρησιμοποιούμε καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z, μπορούμε να ορίσουμε τη θέση ενός σημείου P, ως προς ορισμένη αφετηρία O, με το μήκος και την κατεύθυνση του ευθύγραμμου τμήματος OP. Μια ποσότητα που ορίζεται με ένα μέγεθος και μία κατεύθυνση ονομάζεται *διάνυσμα*· σε αυτή την περίπτωση ορίσαμε το *διάνυσμα θέσης* $\boldsymbol{r}$ του P ως προς το O. Πολλά άλλα φυσικά μεγέθη είναι επίσης διανύσματα: δύο παραδείγματα είναι η ταχύτητα και η δύναμη. Θα πρέπει να γίνεται διάκριση ανάμεσα στα διανύσματα και τα *βαθμωτά* –όπως η μάζα και η ενέργεια– που καθορίζονται τελείως μόνο από ένα μέγεθος.

Υποθέτουμε ότι οι αναγνώστες είναι εξοικειωμένοι με τις ιδέες της διανυσματικής άλγεβρας. Διαφορετικά, ας ανατρέξουν στο Παράρτημα Α, που περιλαμβάνει όλα τα αποτελέσματα που θα χρειαστούμε.

Στο βιβλίο αυτό τα διανύσματα θα συμβολίζονται με παχιά γράμματα (όπως $\boldsymbol{a}$). Το μέγεθος ενός διανύσματος θα συμβολίζεται με το αντίστοιχο σύνηθες λεπτό γράμμα (a), ή με τη χρήση κατακόρυφων γραμμών ($|\boldsymbol{a}|$). Το βαθμωτό και το διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ θα γράφονται $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιούμε το $\hat{\boldsymbol{r}}$ για να συμβολίσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του $\boldsymbol{r}$, $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$. Τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x, y, z θα συμβολίζονται με $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, έτσι ώστε

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Για τη διατύπωση των βασικών νόμων της μηχανικής θα χρησιμοποιούμε τον διανυσματικό συμβολισμό, τόσο λόγω της μαθηματικής απλότητας που επιφέρει, όσο και επειδή πολλές φυσικές ιδέες που περιέχονται στον μαθηματικό φορμαλισμό γίνονται πιο σαφείς όταν εκφράζονται διανυσματικά.

1.2 Οι νόμοι του Νεύτωνα

Η κλασική μηχανική περιγράφει την κίνηση φυσικών αντικειμένων, πώς μεταβάλλεται η θέση τους με το χρόνο. Οι βασικοί της νόμοι μπορούν να εφαρμοστούν σε αντικείμενα κάθε μεγέθους (πάνω από το ατομικό επίπεδο), σχήματος και εσωτερικής δομής, και επίσης σε υγρά, στην κλασική υδροδυναμική. Ωστόσο, δεν είναι προφανές τι εννοείται με τη «θέση» ενός μεγάλου σώματος πολύπλοκου σχήματος. Μόνο στην εξιδανικευμένη περίπτωση σημειακών σωματιδίων (που δεν υπάρχουν στη φύση) έχει η έννοια αυτή διαισθητικά προφανή σημασία. Για το λόγο αυτό, θα εξετάσουμε αρχικά μικρά μόνο σώματα που μπορεί εύλογα να προσεγγιστούν ως σημειακά, έτσι ώστε η θέση του καθενός τους σε χρόνο t να μπορεί να καθοριστεί με ένα διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}(t)$.

Όταν φθάσουμε να ασχοληθούμε με μεγάλα εκτεταμένα σώματα στο Κεφάλαιο 8, θα κάνουμε την επιπρόσθετη υπόθεση ότι κάθε τέτοιο σώμα μπορεί να διαιρεθεί σε μεγάλο αριθμό πολύ μικρών σωμάτων, που το καθένα τους μπορεί να θεωρηθεί ως σημειακό σωμάτιο (θα χρειαστεί επίσης να προβούμε σε κάποιες υποθέσεις για τη φύση των εσωτερικών δυνάμεων ανάμεσα σε αυτά τα σωμάτια). Θα δούμε τότε ότι αν μας ενδιαφέρει η συνολική κίνηση ακόμη και ενός πολύ μεγάλου αντικειμένου, όπως ενός πλανήτη, μπορούμε συχνά να το θεωρήσουμε νόμιμα ως ένα σημειακό σωμάτιο εντοπισμένο στο *κέντρο μάζας* του σώματος. Οι ίδιοι οι νόμοι καθορίζουν τι σημαίνει «θέση» ενός εκτεταμένου σώματος.

Θα ξεκινήσουμε διατυπώνοντας απλά τους νόμους του Νεύτωνα, αφήνοντας για την επόμενη παράγραφο την εξέταση της φυσικής σημασίας των συναφών εννοιών, ειδικότερα της *μάζας* και της *δύναμης*.

Ας θεωρήσουμε ένα απομονωμένο σύστημα αποτελούμενο από N σώματα, τα οποία διακρίνουμε με ένα δείκτη $i = 1, 2, \ldots, N$. Λέγοντας ότι το σύστημα είναι *απομονωμένο*, εννοούμε ότι όλα τα υπόλοιπα σώματα είναι αρκετά μακριά ώστε η επίδρασή τους να είναι αμελητέα. Υποθέτουμε ότι το καθένα από τα N σώματα είναι αρκετά μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως σημειακό σωμάτιο. Η θέση του i-στού σώματος ως προς ένα δεδομένο αδρανειακό πλαίσιο θα δηλώνεται ως $\boldsymbol{r}_i(t)$. Η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του είναι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_i(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}_i(t),\\ \boldsymbol{a}_i(t) &= \dot{\boldsymbol{v}}_i(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}_i(t),\end{aligned}$$

όπου οι τελείες δηλώνουν παραγώγιση ως προς το χρόνο t. Για παράδειγμα,

$$\dot{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Κάθε σώμα χαρακτηρίζεται από μια βαθμωτή σταθερά, τη *μάζα* του m_i. Η ορμή του $\boldsymbol{p}_i$ ορίζεται ως μάζα $\times$ ταχύτητα:

$$\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i.$$

Η εξίσωση κίνησης, που καθορίζει πώς θα κινείται το σώμα, είναι ο *δεύτερος νόμος του*

Νεύτωνα (μάζα $\times$ επιτάχυνση = δύναμη):

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i, \tag{1.1}$$

όπου $\boldsymbol{F}_i$ είναι η ολική δύναμη που ασκείται στο σώμα. Η δύναμη αυτή είναι το άθροισμα των δυνάμεων που προέρχεται από το καθένα από τα υπόλοιπα σώματα του συστήματος. Αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{F}_{ij}$ τη δύναμη *στο* i-στό σώμα που προκαλείται *από* το j-οστό σώμα, τότε

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_{i1} + \boldsymbol{F}_{i2} + \cdots + \boldsymbol{F}_{iN} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij}, \tag{1.2}$$

όπου βέβαια $\boldsymbol{F}_{ii} = \mathbf{0}$, αφού το i-οστό σώμα δεν ασκεί δύναμη στον ίδιο του τον εαυτό. Ας σημειωθεί ότι, επειδή το άθροισμα στο δεξιό μέλος της (1.2) είναι διανυσματικό άθροισμα, η εξίσωση αυτή εμπεριέχει το «νόμο του παραλληλογράμμου» για τη σύνθεση δυνάμεων.

Οι ανά δύο σώματα ή διμερείς δυνάμεις $\boldsymbol{F}_{ij}$ πρέπει να ικανοποιούν τον *τρίτο νόμο του Νεύτωνα*, που υποστηρίζει ότι η «δράση» και η «αντίδραση» είναι ίσες και αντίθετες,

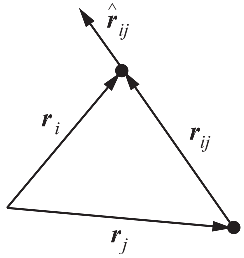
$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij}. \tag{1.3}$$

Επιπρόσθετα, η $\boldsymbol{F}_{ij}$ είναι συνάρτηση των θέσεων και των ταχυτήτων (καθώς και της εσωτερικής δομής) των σωμάτων i και j, χωρίς να επηρεάζεται από την παρουσία άλλων σωμάτων. (Θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι αυτή η υπόθεση είναι υπερβολικά περιοριστική. Θα ήταν π.χ. δυνατό να συμπεριληφθούν επίσης και δυνάμεις μεταξύ τριών σωμάτων, που να εξαρτώνται από τις θέσεις και τις ταχύτητες τριών σωματιδίων ταυτόχρονα. Ωστόσο, δεν γνωρίζουμε να υπάρχουν τέτοιες δυνάμεις στο πεδίο εφαρμογής της κλασικής μηχανικής, και θα συνιστούσε μη αναγκαία περιπλοκή αν τις συμπεριλάβουμε.) Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας, η δύναμη μπορεί στην πραγματικότητα να εξαρτάται μόνο από τη *σχετική* θέση

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$$

(βλ. Σχ. 1.1), και τη *σχετική* ταχύτητα

$$\boldsymbol{v}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j.$$



Σχήμα 1.1

Αν οι δυνάμεις είναι γνωστές ως συναρτήσεις των θέσεων και των ταχυτήτων, τότε από την (1.1) μπορούμε να προβλέψουμε τη μελλοντική κίνηση των σωμάτων. Με δεδομένες τις αρχικές θέσεις και ταχύτητες, μπορούμε να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις (αναλυτικά ή αριθμητικά) για να βρούμε τις θέσεις και τις ταχύτητες των σωμάτων σε κατοπινούς χρόνους.

Εδώ υπολανθάνει η υπόθεση ότι είναι εφικτές η ακριβής γνώση δεδομένων και η άπειρη υπολογιστική ακρίβεια. Σήμερα έχει γίνει παραδεκτό (βλ. Κεφάλαια 13, 14) ότι αυτή η υπόθεση είναι γενικά εσφαλμένη, με συνέπεια μια απώλεια προβλεψιμότητας. Ωστόσο, θα υποθέσουμε προς το παρόν ότι η λύση που επιδιώκουμε είναι εφικτή.

Έτσι, αυτό που υπολείπεται είναι να καθορίσουμε τους ακριβείς νόμους από τους οποίους πρέπει να προσδιοριστούν οι δυνάμεις μεταξύ δύο σωμάτων. Η πιο σημαντική κατηγορία δυνάμεων αποτελείται από τις *κεντρικές, διατηρητικές* δυνάμεις, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τις σχετικές θέσεις των δύο σωμάτων και έχουν τη μορφή

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \hat{\boldsymbol{r}}_{ij} f(r_{ij}), \tag{1.4}$$

όπου, ως συνήθως, $\hat{\boldsymbol{r}}_{ij}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{r}_{ij}$ και $f(r_{ij})$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση της σχετικής απόστασης r_{ij}. Όταν η $f(r_{ij})$ είναι θετική, η δύναμη $\boldsymbol{F}_{ij}$ είναι *απωστική* με διεύθυνση τη γραμμή που ενώνει τα σώματα και φορά προς τα έξω. Όταν η $f(r_{ij})$ είναι αρνητική, η δύναμη είναι *ελκτική* και κατευθύνεται προς τα μέσα.

Σύμφωνα με το *νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα*, υπάρχει μια δύναμη αυτού του τύπου ανάμεσα σε *κάθε* δύο σώματα, που το μέγεθός της είναι ανάλογο προς το γινόμενο των μαζών τους. Δίνεται από την (1.4) με

$$f(r_{ij}) = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2}, \tag{1.5}$$

όπου G είναι η βαρυτική σταθερά του Νεύτωνα, η τιμή της οποίας είναι

$$G = 6{,}673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}.$$

Επειδή οι μάζες είναι πάντα θετικές, η δύναμη αυτή είναι πάντα ελκτική.

Επιπρόσθετα, αν τα σώματα είναι ηλεκτρικά φορτισμένα, υπάρχει και μια ηλεκτροστατική δύναμη που δίνεται από την

$$f(r_{ij}) = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2}, \tag{1.6}$$

όπου q_i και q_j είναι τα ηλεκτρικά φορτία, και ϵ_0 είναι ακόμα μία σταθερά,

$$\epsilon_0 = 8{,}854\,19 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}.$$

Ας σημειωθεί ότι εδώ ανάλογο ρόλο με τη σταθερά G του Νεύτωνα έχει ο συνδυασμός

$$1/4\pi\epsilon_0 = 8{,}987\,55 \times 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}.$$

Τα ηλεκτρικά φορτία μπορούν να έχουν και τα δύο πρόσημα και, συνακόλουθα, η ηλεκτροστατική δύναμη μπορεί να είναι είτε απωστική είτε ελκτική ανάλογα με το σχετικό πρόσημο των q_i και q_j.

Σημειώστε την τεράστια διαφορά στις τάξεις μεγέθους των σταθερών G και $1/4\pi\epsilon_0$ όταν εκφράζονται σε μονάδες SI. Αυτό καταδεικνύει γλαφυρά το γεγονός ότι οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πράγματι εξαιρετικά ασθενείς. Σε μας φαίνονται σημαντικές μόνον επειδή τυχαίνει να ζούμε κοντά σε ένα σώμα με πολύ μεγάλη μάζα. Αντίστοιχου μεγέθους φορτία δεν εμφανίζονται ποτέ, διότι τα θετικά και τα αρνητικά φορτία εξουδετερώνονται σε μεγάλο βαθμό, αφήνοντας τα μακροσκοπικά σώματα με σχεδόν μηδενικό συνολικό φορτίο.

Στο εσωτερικό σωμάτων με δομή, οι κεντρικές διατηρητικές δυνάμεις ανάμεσα στα συστατικά τους μέρη μπορούν προφανώς να συντεθούν σε δυνάμεις που είναι ακόμα διατηρητικές (δηλ. είναι ανεξάρτητες από την ταχύτητα και ικανοποιούν κάποιες επιπρόσθετες συνθήκες που δεν χρειάζεται να μας απασχολήσουν εδώ – βλ. §3.1 και §A.6), αλλά όχι πλέον κεντρικές (δηλ. δεν κατευθύνονται κατά μήκος της γραμμής που ενώνει τα σώματα). Αυτό μπορεί να συμβαίνει όταν, για παράδειγμα, υπάρχει κάποια κατανομή ηλεκτρικού φορτίου στο εσωτερικό κάθε σώματος.

Οι διατηρητικές δυνάμεις μπορούν επίσης να εκδηλωθούν, με λιγότερο προφανή τρόπο, ως μη διατηρητικές δυνάμεις που εξαρτώνται από την ταχύτητα, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2. Πολλές από τις δυνάμεις αντίστασης και τριβής μπορούν να κατανοηθούν ως μακροσκοπικά αποτελέσματα δυνάμεων που είναι πραγματικά διατηρητικές σε μικρή κλίμακα. Το κύριο διακριτικό γνώρισμα των διατηρητικών δυνάμεων είναι η ύπαρξη μιας ποσότητας που *διατηρείται*, δηλ. η συνολική τιμή της οποίας δεν μεταβάλλεται ποτέ, συγκεκριμένα της *ενέργειας* του συστήματος. Οι δυνάμεις τριβής προκαλούν μεταφορά μέρους αυτής της ενέργειας από την μεγάλης κλίμακας κίνηση των σωμάτων σε μικρής κλίμακας κινήσεις στο εσωτερικό τους, και έτσι εμφανίζονται, σε μεγάλη κλίμακα, ως μη διατηρητικές.

Μπορούμε λοιπόν, υπό μια έννοια, να θεωρήσουμε τις κεντρικές διατηρητικές δυνάμεις ως τον κανόνα. Ωστόσο, θα ήταν λάθος αν συμπεραίναμε ότι με αυτές μπορεί να εξηγηθεί το καθετί. Από τη μια μεριά, οι έννοιες της κλασικής μηχανικής δεν είναι εφαρμόσιμες στην πραγματικά μικρής κλίμακας δομή της ύλης. Εδώ χρειαζόμαστε την κβαντομηχανική. Πιο σοβαρή είναι η περίπτωση των *ηλεκτρομαγνητικών* δυνάμεων, οι οποίες, αν και είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην περιοχή της κλασικής φυσικής, δεν είναι άμεσα ενσωματώσιμες στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής. Η δύναμη μεταξύ δύο φορτίων σε σχετική κίνηση ούτε κεντρική ούτε διατηρητική είναι, και ούτε καν ικανοποιεί τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα (1.3). Αυτό οφείλεται στην πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Η δύναμη πάνω στο ένα φορτίο εξαρτάται όχι μόνο από τη στιγμιαία θέση του άλλου φορτίου, αλλά και από την παρελθούσα ιστορία του. Το αποτέλεσμα μιας διαταραχής ενός φορτίου δεν γίνεται αμέσως αισθητό από το άλλο, αλλά μετά από όσο χρονικό διάστημα χρειάζεται ένα φωτεινό σήμα να διαδοθεί από το ένα φορτίο στο άλλο. Αυτή η συγκεκριμένη δυσκολία μπορεί να επιλυθεί εισάγοντας την έννοια του ηλεκτρομαγνητικού *πεδίου*. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ένα φορτίο δεν επιδρά απευθείας πάνω στο άλλο, αλλά μόνο στο πεδίο γύρω του, αυτό με τη σειρά του επιδρά στο πεδίο πιο πέρα, κ.ο.κ. Υποθέτοντας ότι το ίδιο το πεδίο είναι φορέας ενέργειας και ορμής, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τους νόμους διατήρησης, οι οποίοι αποτελούν τις πλέον σημαντικές συνέπειες των νόμων του Νεύτωνα.

Ωστόσο, ακόμη και αυτό δεν αίρει τελείως τη δυσκολία, διότι παραμένει μια εμφανής αντίφαση ανάμεσα σε αυτής της μορφής κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία και την αρχή της σχετικότητας που συζητήσαμε στην §1.1. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αν η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή σε ένα αδρανειακό πλαίσιο –όπως θα έπρεπε να είναι σύμφωνα με την ηλεκτρομαγνητική θεωρία– τότε οι συνήθεις κανόνες σύνθεσης ταχυτήτων θα οδηγούσαν στο συμπέρασμα ότι αυτή είναι διαφορετική ως προς κάποιο σχετικά κινούμενο πλαίσιο, σε αντίφαση με την πρόταση ότι όλα τα αδρανειακά πλαίσια είναι ισοδύναμα. Το παράδοξο αυτό μπορεί να επιλυθεί μόνο με την εισαγωγή της θεωρίας της σχετικότητας του Einstein (δηλ. την «ειδική» σχετικότητα). Η κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία και η κλασική μηχανική *μπορούν* να συμπεριληφθούν σε μια αυτο-συνεπή θεωρία μόνο αν αγνοήσουμε την αρχή της σχετικότητας (για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) και δεχτούμε την ύπαρξη ενός «προνομιακού» αδρανειακού πλαισίου.

1.3 Οι έννοιες της μάζας και της δύναμης

Μια σημαντική γενική αρχή στη φυσική (αν και δεν εφαρμόζεται καθολικά!) είναι να μην εισάγονται στη θεωρία μεγέθη που δεν είναι, τουλάχιστον καταρχήν, μετρήσιμα. Τώρα, οι νόμοι του Νεύτωνα δεν περιλαμβάνουν μόνο τις έννοιες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, που μπορούν να μετρηθούν με τη μέτρηση αποστάσεων και χρόνων, αλλά επίσης και τις νέες έννοιες της μάζας και της δύναμης. Έτσι, για να προσδώσουν στους νόμους φυσικό νόημα, πρέπει να δείξουμε ότι αυτές οι έννοιες αναφέρονται σε μετρήσιμα μεγέθη. Αυτό δεν είναι τόσο τετριμμένο όσο ίσως φαίνεται, διότι κάθε πείραμα σχεδιασμένο να μετρήσει αυτά τα μεγέθη πρέπει υποχρεωτικά να περιλάβει στην ερμηνεία του τους ίδιους τους νόμους του Νεύτωνα. Έτσι οι τελεστικοί ορισμοί της μάζας και της δύναμης –οι οδηγίες για το πώς μπορούν να μετρηθούν– που είναι απαραίτητοι για να καταστήσουν τους νόμους φυσικά σαφείς, περιέχονται στην πραγματικότητα στους ίδιους τους νόμους. Μια τέτοια κατάσταση πραγμάτων δεν είναι καθόλου ασυνήθιστη ή λογικά αμφισβητήσιμη, αλλά υποδεικνύει ότι η υπόσταση αυτών των εννοιών μπορεί να διασαφηνιστεί καλύτερα αν επαναδιατυπώσουμε τους νόμους με τέτοιο τρόπο ώστε να απομονωθεί το ορισματικό τους στοιχείο.

Ας θεωρήσουμε πρώτα τη μέτρηση της μάζας. Εφόσον οι μονάδες μάζας είναι αυθαίρετες, θα πρέπει να ορίσουμε έναν τρόπο σύγκρισης των μαζών δύο ορισμένων σωμάτων. Είναι σημαντικό να κατανοηθεί ότι εξετάζουμε εδώ την *αδρανειακή* μάζα, που εμφανίζεται στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (1.1), και όχι τη *βαρυτική* μάζα που εμφανίζεται στην (1.5). Βέβαια, οι δύο μάζες είναι ανάλογες, αλλά αυτή η *αρχή της ισοδυναμίας* συνιστά ένα φυσικό νόμο που προκύπτει από πειραματική παρατήρηση (ειδικότερα, από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου για την πτώση σωμάτων, από όπου συνήγαγε ότι στο κενό όλα τα σώματα θα έπεφταν ισοταχώς) και όχι μια υπόθεση *a priori*. Για να επαληθευθεί αυτός ο νόμος πρέπει να μπορούμε να μετρήσουμε το κάθε είδος μάζας χωριστά. Αυτό αποκλείει, για παράδειγμα, τη χρήση ζυγαριάς, που συγκρίνει βαρυτικές μάζες.

Είναι φανερό ότι μπορούμε να συγκρίνουμε τις αδρανειακές μάζες δύο σωμάτων ασκώντας πάνω τους ίσες δυνάμεις και συγκρίνοντας τις επιταχύνσεις τους, όμως αυτό δεν βοηθάει παρά μόνο αν έχουμε κάποιον τρόπο να γνωρίζουμε πότε οι δυνάμεις *είναι* ίσες. Υπάρχει, ωστόσο, μια περίπτωση όπου αυτό μας *είναι* γνωστό, χάρις στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Αν απομονώσουμε τα δύο σώματα από όλη την υπόλοιπη ύλη και συγκρίνουμε τις αμοιβαία επαγόμενες επιταχύνσεις τους, τότε, σύμφωνα με τις (1.1) και (1.3), θα ισχύει

$$m_1 \boldsymbol{a}_1 = -m_2 \boldsymbol{a}_2, \tag{1.7}$$

οπότε οι επιταχύνσεις θα έχουν αντίθετες κατευθύνσεις και θα είναι αντιστρόφως ανάλογες στις μάζες. Όταν δύο μικρά σώματα συγκρουστούν, κατά τη διάρκεια της κρούσης οι επιδράσεις πιο απομακρυσμένων σωμάτων είναι γενικά αμελητέες συγκριτικά με την επίδραση του ενός πάνω στο άλλο, και μπορούμε να τα θεωρήσουμε προσεγγιστικά σαν ένα απομονωμένο σύστημα. (Παρόμοιες κρούσεις θα εξετασθούν λεπτομερώς στα Κεφάλαια 2 και 7.) Ο λόγος των μαζών μπορεί τότε να προσδιοριστεί από μετρήσεις των ταχυτήτων τους πριν και μετά την κρούση, χρησιμοποιώντας είτε την (1.7) είτε την άμεση συνεπαγωγή της, το *νόμο διατήρησης της ορμής*,

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = \text{σταθερά}. \tag{1.8}$$

Αν θέλουμε να διαχωρίσουμε τον ορισμό της μάζας από το φυσικό περιεχόμενο της εξίσωσης (1.7), μπορούμε να υιοθετήσουμε ως θεμελιώδες αξίωμα την ακόλουθη πρόταση:

> Σε ένα απομονωμένο σύστημα δύο σωμάτων, οι επιταχύνσεις ικανοποιούν πάντα τη σχέση $\boldsymbol{a}_1 = -k_{21}\boldsymbol{a}_2$, όπου το βαθμωτό k_{21} είναι, για δύο δεδομένα σώματα, μια σταθερά ανεξάρτητη από τις θέσεις, τις ταχύτητες και τις εσωτερικές καταστάσεις τους.

Αν επιλέξουμε ως πρώτο σώμα ένα πρότυπο σώμα και συμβατικά του αποδώσουμε μοναδιαία μάζα (έστω $m_1 = 1$ kg), τότε μπορούμε να *ορίσουμε* ότι η μάζα του δεύτερου είναι k_{21} σε μονάδες αυτής της μάζας-προτύπου (εδώ $m_2 = k_{21}$ kg).

Σημειώστε ότι, για λόγους συνέπειας, πρέπει να έχουμε $k_{12} = 1/k_{21}$. Πρέπει βέβαια ακόμη να υποθέσουμε ότι, όταν συγκρίνουμε τις μάζες τριών σωμάτων με αυτό τον τρόπο, βρίσκουμε συνεπή αποτελέσματα:

> Για οποιαδήποτε τρία σώματα, οι σταθερές k_{ij} ικανοποιούν τη σχέση $k_{31} = k_{32}k_{21}$.

Από εδώ συνάγεται ότι, για *οποιαδήποτε* δύο σώματα, το βαθμωτό k_{32} είναι ο λόγος των μαζών: $k_{32} = m_3/m_2$.

Για να συμπληρωθεί ο κατάλογος των θεμελιωδών αξιωμάτων, χρειάζεται ένα αξίωμα το οποίο να αναφέρεται σε συστήματα με περισσότερα από δύο σώματα, σε αναλογία με το νόμο σύνθεσης δυνάμεων, (1.2). Αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

> Η επιτάχυνση που επάγεται σε ένα σώμα από ένα άλλο είναι κάποια ορισμένη συνάρτηση των θέσεων, των ταχυτήτων και της εσωτερικής δομής τους, και δεν επηρεάζεται από την παρουσία άλλων σωμάτων. Σε ένα σύστημα πολλών σωμάτων, η επιτάχυνση κάθε δεδομένου σώματος ισούται με το άθροισμα των επιταχύνσεων που επάγονται σε αυτό από το καθένα από τα άλλα σώματα χωριστά.

Οι νόμοι αυτοί, που εμφανίζονται εδώ σε μια κάπως ασυνήθιστη μορφή, είναι κατ' ουσίαν τελείως ισοδύναμοι με τους νόμους του Νεύτωνα όπως διατυπώθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Έχοντας υπόψη τον προφανώς θεμελιώδη ρόλο της έννοιας της δύναμης στη νευτώνεια μηχανική, είναι αξιοσημείωτο ότι πετύχαμε να αναδιατυπώσουμε τους βασικούς νόμους χωρίς να γίνεται αναφορά σε αυτή την έννοια. Βέβαια, αυτή η τελευταία μπορεί να εισαχθεί, ορίζοντάς την μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, (1.1). Η χρησιμότητα του ορισμού αυτού προκύπτει από το γεγονός ότι οι δυνάμεις ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, (1.3), ενώ οι επιταχύνσεις ικανοποιούν τον πολυπλοκότερο νόμο (1.7). Αφού οι αμοιβαία επαγόμενες επιταχύνσεις δύο δεδομένων σωμάτων είναι πάντοτε ανάλογες, προσδιορίζονται ουσιαστικά από μία μόνο συνάρτηση, και είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε την περισσότερο συμμετρική έννοια της δύναμης, με την οποία αυτό γίνεται προφανές.

Τέλος, είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι μία από τις συνέπειες των βασικών μας νόμων είναι η προσθετική φύση της μάζας. Ας πάρουμε ένα σύστημα τριών σωμάτων. Επιστρέφοντας στο συμβολισμό της προηγούμενης ενότητας, οι εξισώσεις κίνησης για τα τρία σώματα είναι

$$\begin{aligned} m_1\boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13}, \\ m_2\boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23}, \\ m_3\boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{F}_{31} + \boldsymbol{F}_{32}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Όταν προσθέσουμε αυτές τις εξισώσεις, οι όροι στο δεξιό μέλος απαλείφονται κατά ζεύγη βάσει της (1.3), και καταλήγουμε στην

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{1.10}$$

που είναι η γενίκευση της (1.7). Αν τώρα υποθέσουμε ότι η δύναμη ανάμεσα στο δεύτερο και το τρίτο σώμα είναι τέτοια ώστε αυτά να ενωθούν με στερεό δεσμό σχηματίζοντας ένα σύνθετο σώμα, οι επιταχύνσεις τους στη συνέχεια πρέπει να είναι ίσες: $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3$. Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε τη σχέση

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = -(m_2 + m_3)\boldsymbol{a}_2,$$

που δείχνει ότι η μάζα του σύνθετου σώματος είναι ακριβώς $m_{23} = m_2 + m_3$.

1.4 Εξωτερικές δυνάμεις

Για να προσδιορίσουμε την κίνηση διαφόρων σωμάτων σε οποιοδήποτε δυναμικό σύστημα, πρέπει να επιλύσουμε δύο στενά αλληλένδετα προβλήματα. Πρώτον, με δεδομένες τις θέσεις και ταχύτητες κάποια χρονική στιγμή, πρέπει να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις που επιδρούν πάνω σε κάθε σώμα. Δεύτερον, με δεδομένες τις επιδρώσες δυνάμεις, πρέπει να υπολογίσουμε τις νέες θέσεις και ταχύτητες μετά την πάροδο ενός μικρού χρονικού διαστήματος. Στη γενική περίπτωση, αυτά τα δύο προβλήματα συνυφαίνονται αδιάρρηκτα μεταξύ τους και πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα. Αν, όμως, ασχολούμαστε με τις κινήσεις ενός μικρού σώματος ή ομάδας μικρών σωμάτων, τότε είναι συχνά θεμιτό να αγνοήσουμε την επίδρασή της πάνω σε άλλα σώματα και, σε αυτή την περίπτωση, τα δύο προβλήματα μπορούν να διαχωριστούν.

Για παράδειγμα, εξετάζοντας την κίνηση ενός τεχνητού δορυφόρου, μπορούμε σαφώς να αγνοήσουμε την επίδρασή του στη Γη. Αφού η κίνηση της Γης είναι ήδη γνωστή, μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη πάνω στο δορυφόρο ως συνάρτηση της θέσης του και (αν συμπεριληφθεί η αντίσταση της ατμόσφαιρας) της ταχύτητάς του. Στη συνέχεια, με γνωστή τη δύναμη, μπορούμε να λύσουμε χωριστά το πρόβλημα της κίνησής του. Στο τελευταίο πρόβλημα μας ενδιαφέρει μόνον ο δορυφόρος. Η Γη απλά υπεισέρχεται σαν γνωστή εξωτερική επίδραση.

Συνεπώς, σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να εστιάζουμε την προσοχή μας σε ένα μικρό μέρος κάποιου δυναμικού συστήματος και να αναπαριστούμε την επίδραση κάθε πράγματος έξω από αυτό με εξωτερικές δυνάμεις, για τις οποίες υποθέτουμε ότι είναι εκ των προτέρων γνωστές συναρτήσεις της θέσης, της ταχύτητας και του χρόνου. Αυτού του είδους προβλήματα είναι που θα μας απασχολήσουν κυρίως στα αμέσως επόμενα κεφάλαια. Τυπικά, θα εξετάσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου υπό την επίδραση γνωστής εξωτερικής δύναμης. Στο Κεφάλαιο 6 εξετάζουμε, στις περιπτώσεις της βαρύτητας και της ηλεκτροστατικής, το συμπληρωματικό πρόβλημα προσδιορισμού της δύναμης από τη γνώση των θέσεων των σωμάτων που την προκαλούν. Αργότερα, στο Κεφάλαιο 7, επιστρέφουμε στο πιο πολύπλοκο πρόβλημα, όπου το σύστημα που πρωταρχικά μας ενδιαφέρει δεν μπορεί να εκληφθεί ως μεμονωμένο σωμάτιο.

1.5 Περίληψη

Η επιλογή μιας ομάδας πρωταρχικών εννοιών, με βάση τις οποίες πρέπει να οριστούν οι άλλες έννοιες, είναι σε κάποιο βαθμό θέμα προτίμησης. Εδώ επιλέξαμε να εκλάβουμε τη θέση και το χρόνο (ως προς κάποιο πλαίσιο αναφοράς) σαν βασικές έννοιες. Από αυτή την άποψη, οι νόμοι του Νεύτωνα, εκτός από φυσικοί νόμοι, πρέπει επίσης να θεωρηθεί ότι περιέχουν ορισμούς. Ο πρώτος νόμος περιέχει τον ορισμό των αδρανειακών πλαισίων μαζί με το φυσικό αίτημα ότι τέτοια πλαίσια υπάρχουν, ενώ ο δεύτερος και ο τρίτος νόμος περιέχουν τους ορισμούς της μάζας και της δύναμης. Οι νόμοι αυτοί, συμπληρωμένοι με τους νόμους της δύναμης, όπως το νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας, προσφέρουν τις εξισώσεις από τις οποίες μπορεί να προσδιοριστεί η κίνηση κάθε δυναμικού συστήματος.

Προβλήματα

Σημείωση. Εδώ και στα επόμενα κεφάλαια, τα προβλήματα με αστερίσκο είναι κάπως δυσκολότερα.

1. Ένα αντικείμενο A, που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$, συγκρούεται με ένα ακίνητο αντικείμενο B. Μετά την κρούση, το A κινείται με ταχύτητα $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}$ και το B με ταχύτητα $\frac{3}{2}\boldsymbol{v}$. Βρείτε το λόγο των μαζών τους. Αν τα δύο σώματα, αντί να ανακρούσουν, γίνονταν ένα σώμα μετά την κρούση, με ποια ταχύτητα θα κινούνταν;
2. Τα δύο συστατικά ενός διπλού αστέρα παρατηρείται ότι κινούνται σε κύκλους με ακτί-

νες r_1 και r_2. Ποιος είναι ο λόγος των μαζών τους; *Υπόδειξη*: Γράψτε τις επιταχύνσεις τους συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής, ω.)

3. Θεωρούμε ένα σύστημα τριών σωματιδίων, το καθένα μάζας m, που η κίνησή του περιγράφεται από την (1.9). Αν τα σωμάτια 2 και 3, παρόλον ότι δεν είναι συμπαγώς ενωμένα, θεωρηθεί ότι σχηματίζουν ένα σύνθετο σώμα μάζας $2m$ εντοπισμένο στο μέσο σημείο $\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3)$, βρείτε τις εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την κίνηση του συστήματος δύο σωμάτων που περιλαμβάνει το σωμάτιο 1 και το σύνθετο σώμα $(2+3)$. Ποια είναι η δύναμη που το σωμάτιο 1 ασκεί πάνω στο σύνθετο σώμα; Δείξτε ότι οι εξισώσεις συμφωνούν με την (1.7). Όταν οι μάζες είναι *άνισες*, ποιος είναι ο σωστός ορισμός της θέσης του σύνθετου σώματος $(2+3)$ ώστε να συνεχίσει να ισχύει η (1.7);
4. Βρείτε την απόσταση r ανάμεσα σε δύο πρωτόνια ώστε η μεταξύ τους ηλεκτροστατική άπωση να είναι ίση με τη βαρυτική έλξη της Γης πάνω σε ένα από αυτά. (Φορτίο πρωτονίου $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, μάζα πρωτονίου $= 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg.)
5. Θεωρήστε ένα μετασχηματισμό σε κάποιο πλαίσιο αναφοράς ομαλά κινούμενο ως προς το αρχικό, όπου κάθε διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}_i$ αντικαθίσταται από το $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{v}t$. (Εδώ $\boldsymbol{v}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, η σχετική ταχύτητα των δύο πλαισίων.) Πώς μετασχηματίζεται το σχετικό διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}_{ij}$; Πώς μετασχηματίζονται οι ορμές και οι δυνάμεις; Δείξτε αναλυτικά ότι, αν οι εξισώσεις (1.1) έως (1.4) ισχύουν στο αρχικό πλαίσιο, τότε θα ισχύουν επίσης και στο νέο.
6. Σώμα μάζας 50 kg κρέμεται με δύο ελαφρά μη εκτατά καλώδια μήκους 15 m και 20 m από δύο στέρεα στηρίγματα που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους 25 m. Βρείτε τις τάσεις στα καλώδια. (Σημειώστε ότι «ελαφρύ» σημαίνει συμβατικά «αμελητέας μάζας». Πάρτε $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Αυτό και τα επόμενο δύο προβλήματα είναι εφαρμογές της πρόσθεσης διανυσμάτων.)
7. *Ένα αεροπλάνο πρόκειται να πετάξει προς έναν προορισμό 800 km βόρεια από το σημείο εκκίνησης. Η εναέρια ταχύτητά του είναι $800\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Ο άνεμος είναι ανατολικός με ταχύτητα $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ποια κατεύθυνση πυξίδας θα πρέπει να ακολουθήσει ο πιλότος κατά την πτήση; Πόσο θα διαρκέσει η πτήση; Αν η ταχύτητα του ανέμου γίνει $50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ και ο άνεμος γίνει βορειοανατολικός, αλλά καμιά μέριμνα δεν ληφθεί για την αλλαγή αυτή, πόσο μακριά θα βρεθεί από τον προορισμό του το αεροπλάνο κατά τον αναμενόμενο χρόνο άφιξης και σε ποια κατεύθυνση;
8. *Τα δύο εμπρόσθια πόδια ενός τρίποδα έχουν μήκος 1,4 m το καθένα και τα κάτω άκρα τους απέχουν 0,8 m. Το τρίτο πόδι έχει μήκος 1,5 m και το κάτω άκρο του βρίσκεται 1,5 m ακριβώς πίσω από το μέσο της ευθείας που ενώνει τα άλλα δύο. Να βρεθεί το ύψος του τρίποδα και τα διανύσματα που αναπαριστούν τις θέσεις των τριών άκρων ως προς την κορυφή. (*Υπόδειξη*: Επιλέξτε μια βολική αρχή και βολικούς άξονες και γράψτε τα μήκη των ποδιών συναρτήσει του διανύσματος θέσης της κορυφής.) Αν ο τρίποδας έχει βάρος 2 kg, βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στα πόδια, υποθέτοντας ότι είναι τελείως συμπιεστικές (δηλ. έχουν την κατεύθυνση του ποδιού) και ότι τα ίδια τα πόδια έχουν αμελητέο βάρος. (Πάρτε $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)
9. *Εξετάστε την περίπτωση που ως βασικό μέγεθος χρησιμοποιείται η δύναμη αντί η μάζα, θεωρώντας π.χ. ως μονάδα δύναμης ένα ορισμένο βάρος (σε ορισμένο γεωγρα-

φικό πλάτος). Πώς θα έπρεπε κανείς να ορίσει και να μετρήσει τη μάζα ενός σώματος;

10. Η πρώτη εκτίμηση της σταθεράς του Νεύτωνα έγινε από τον αστρονόμο Nevil Maskelyne το 1774 μετρώντας τη γωνία μεταξύ των φαινόμενων κατακορύφων δύο νηματοβαριδίων που είχε τοποθετήσει σε αντίθετες πλευρές του όρους Schiehallion στη Σκοτία (υψόμετρο 1081 m, επιλεγμένο για το κανονικό κωνικό σχήμα του). Προβείτε σε μια χονδρική εκτίμηση της γωνίας κατά την οποία αποκλίνει η κατακόρυφος ενός νηματοβαριδίου λόγω της βαρυτικής έλξης από αυτό το όρος, προσομοιάζοντας το τελευταίο με μια σφαίρα ακτίνας 500 m και πυκνότητας $2{,}7 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, και υποθέτοντας ότι το αποτέλεσμα της βαρύτητάς του είναι το ίδιο με αυτό που θα είχαμε αν όλη η μάζα της σφαίρας ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της. (Αυτή η τελευταία υπόθεση θα αιτιολογηθεί, για ένα σφαιρικό αντικείμενο, στο Κεφάλαιο 6.)

2

Γραμμική κίνηση

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε την κίνηση ενός σώματος ελεύθερου να κινείται σε μία μόνο διάσταση. Τα προβλήματα που εξετάζονται επελέγησαν για να επεξηγήσουν τις έννοιες και τις τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν στη γενικότερη περίπτωση της τριδιάστατης κίνησης.

2.1 Διατηρητικές δυνάμεις: Διατήρηση της ενέργειας

Θεωρούμε αρχικά ένα σωμάτιο που κινείται πάνω σε μια ευθεία, υπό την επίδραση μιας δύναμης που δίνεται ως συνάρτηση $F(x)$ της θέσης του. Η εξίσωση κίνησης (1.1) είναι τότε

$$m\ddot{x} = F(x). \tag{2.1}$$

Επειδή η εξίσωση αυτή είναι δευτέρας τάξεως ως προς χρονικές παραγώγους, θα πρέπει να την ολοκληρώσουμε δύο φορές για να βρούμε το x ως συνάρτηση του t. Επομένως η λύση θα περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές τιμές των x και $\dot{x}$.

Όταν η δύναμη εξαρτάται μόνο από το x, τότε μπορούμε πάντα να βρούμε ένα «πρώτο ολοκλήρωμα», δηλ. μια συνάρτηση των x και $\dot{x}$ που η τιμή της παραμένει σταθερή στο χρόνο. Ας θεωρήσουμε την *κινητική ενέργεια*,

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2, \tag{2.2}$$

(που θα ήταν, όπως και η ταχύτητα $\dot{x}$, ένα πρώτο ολοκλήρωμα αν δεν υπήρχε η δύναμη $F(x)$). Παραγωγίζοντας την (2.2), βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$$\dot{T} = m\dot{x}\ddot{x} = F(x)\dot{x}, \tag{2.3}$$

όπου κάναμε χρήση και της (2.1). Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο, βρίσκουμε

$$T = \int F(x)\dot{x}\,\mathrm{d}t = \int F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Αν ορίσουμε τη *δυναμική ενέργεια*, ως

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,\mathrm{d}x', \tag{2.5}$$

μπορούμε να γράψουμε την (2.4) στη μορφή

$$T + V = E = \text{σταθερό}. \tag{2.6}$$

Εδώ το x_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερά, που αντιστοιχεί στην αυθαίρετη προσθετική σταθερά ολοκλήρωσης στην (2.4). Αυτό οδηγεί σε αντίστοιχη αυθαιρεσία μιας προσθετικής σταθεράς στην *ολική ενέργεια* E.

Προσέξτε ότι η (2.5) μπορεί να αντιστραφεί για να δώσει τη δύναμη συναρτήσει της δυναμικής ενέργειας:

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \equiv -V'(x). \tag{2.7}$$

Η εξίσωση (2.6) είναι ο νόμος *διατήρησης της ενέργειας*. Γι' αυτό, στα μονοδιάστατα προβλήματα, μια δύναμη αυτού του είδους, που εξαρτάται μόνο από το x, αποκαλείται *διατηρητική* δύναμη. Από αυτόν το νόμο διατήρησης μπορεί κανείς να αποκτήσει πολλές πληροφορίες για την κίνηση, ακόμη και χωρίς να ολοκληρώσει άλλη μια φορά ώστε να βρει το x ως ρητή συνάρτηση του t. Αν δίνονται η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς E. Τότε η (2.6) στη μορφή

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \tag{2.8}$$

δίνει την ταχύτητα του σωματιδίου (εκτός από το πρόσημο) όταν εκείνο βρίσκεται σε οποιαδήποτε δεδομένη θέση x. Καθώς η κινητική ενέργεια είναι προφανώς θετική, η κίνηση περιορίζεται στην περιοχή όπου

$$V(x) \leq E.$$

Ένα παράδειγμα μπορεί να βοηθήσει στην επεξήγηση των παραπάνω.

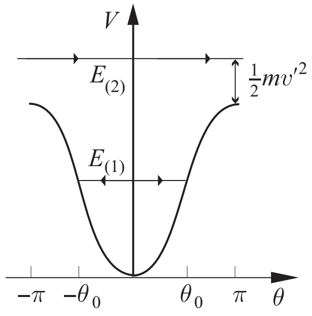
***Παράδειγμα:* Το απλό εκκρεμές**

Ένα απλό εκκρεμές αποτελείται από ένα βαρίδιο μάζας m προσαρτημένο στο ένα άκρο μιας ελαφράς στερεάς ράβδου μήκους l. (Επιλέγουμε μια ράβδο αντί μια χορδή, ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε και κίνηση του βαριδίου *πιο ψηλά* από το σημείο στήριξης. Με το «ελαφρά» εννοούμε «αμελητέας μάζας».) Το βαρίδιο ξεκινά με ταχύτητα v από τη θέση ισορροπίας. Ποια είδη κίνησης είναι δυνατά για διάφορες τιμές του v;

Η απόσταση που διανύει το βαρίδιο είναι $x = l\theta$, όπου θ είναι η γωνιακή μετατόπιση από την καθοδική κατακόρυφο. Στη (βαρυτική) δύναμη επαναφοράς $F = -mg\sin\theta = -mg\sin(x/l)$ αντιστοιχεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

$$V = mgl[1 - \cos(x/l)] = mgl(1 - \cos\theta). \tag{2.9}$$

Το γράφημά της δείχνεται στο Σχ. 2.1. (Παρατηρήστε ότι τα σημεία $\theta = \pi$ και $\theta = -\pi$ μπορούν να ταυτιστούν.)



Σχήμα 2.1

Αρχικά το βαρίδιο έχει θέση $\theta = 0$, και ταχύτητα v. Επειδή έχουμε επιλέξει την αυθαίρετη σταθερά στο V έτσι ώστε $V(0) = 0$, η ολική ενέργεια είναι $E = \frac{1}{2}mv^2$. Αν, τώρα, $E < 2mgl$ (όπως για το $E_{(1)}$ στο σχήμα), τότε η κίνηση θα περιοριστεί μεταξύ των δύο γωνιών $\pm\theta_0$ που ικανοποιούν την $V(\theta_0) = E$, δηλ.

$$1 - \cos\theta_0 = v^2/2gl.$$

Αυτά είναι τα σημεία όπου η κινητική ενέργεια μηδενίζεται, οπότε το βαρίδιο στιγμιαία ηρεμεί. Η κίνηση είναι μια ταλάντωση (γωνιακού) πλάτους θ_0.

Από την άλλη, αν η αρχική ώθηση στο βαρίδιο είναι τόσο ισχυρή ώστε $E > 2mgl$ (όπως για το $E_{(2)}$ στο σχήμα), τότε η κινητική ενέργεια δεν θα μηδενιστεί ποτέ. Όταν το βαρίδιο φθάνει την ανοδική κατακόρυφο, η ενέργεια αυτή είναι ακόμα θετική, συγκεκριμένα

$$\tfrac{1}{2}mv'^2 = E - 2mgl = \tfrac{1}{2}mv^2 - 2mgl.$$

Στην περίπτωση αυτή η κίνηση είναι μια συνεχής περιστροφή αντί μια ταλάντωση.

2.2 Κίνηση κοντά στην ισορροπία: Ο αρμονικός ταλαντωτής

Ένα σωμάτιο μπορεί να ισορροπεί μόνο όταν η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω του είναι μηδέν. Για μια διατηρητική δύναμη αυτό σημαίνει, σύμφωνα με την (2.7), ότι η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας στη θέση ισορροπίας του σωματιδίου είναι οριζόντια. Ας θεωρήσουμε τώρα την κίνηση ενός σωματιδίου κοντά σε μια θέση ισορροπίας. Χωρίς απώλεια γενικότητας, μπορούμε να διαλέξουμε την αρχή, $x = 0$, στο σημείο ισορροπίας και να επιλέξουμε την αυθαίρετη προσθετική σταθερά στο V έτσι ώστε $V(0) = 0$. Αν μας ενδιαφέρουν μόνο μικρές μετατοπίσεις, μπορούμε να αναπτύξουμε το $V(x)$ σε σειρά Maclaurin–Taylor γύρω από το $x = 0$,

$$V(x) = V(0) + xV'(0) + \tfrac{1}{2}x^2V''(0) + \cdots,$$

όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς το x. Επειδή επιλέξαμε $V(0) = 0$, απουσιάζει ο σταθερός όρος, και επειδή η συνθήκη ισορροπίας είναι $V'(0) = 0$, μηδενίζεται επίσης ο γραμμικός όρος. Συνεπώς, κοντά στο $x = 0$ μπορούμε να γράψουμε προσεγγιστικά,

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kx^2, \qquad k = V''(0). \tag{2.10}$$

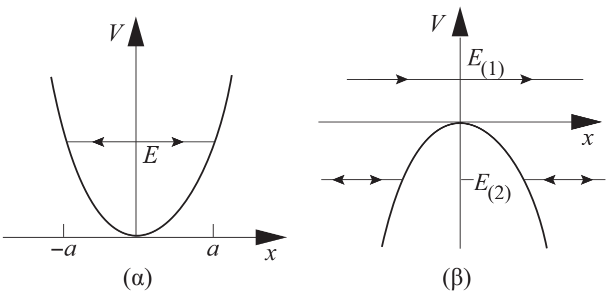
(Υποθέτουμε, για λόγους απλότητας, ότι το $V''(0)$ δεν μηδενίζεται.)

Επειδή η κίνηση κοντά σε σχεδόν κάθε σημείο ισορροπίας υπόκειται προσεγγιστικά σε αυτή τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, πρόκειται για κίνηση που απαντάται εντυπωσιακά συχνά: παίζει σημαντικό ρόλο τόσο την κβαντική μηχανική όσο και στην κλασική μηχανική. Θα είναι λοιπόν χρήσιμο να την αναλύσουμε κάπως λεπτομερέστερα. Εδώ η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας είναι μια παραβολή (βλ. Σχ. 2.2). Επομένως, για $k > 0$ και οποιαδήποτε ενέργεια $E > 0$ (Σχ. 2.2(α)), υπάρχουν δύο σημεία όπου $V(x) = E$, συγκεκριμένα τα

$$x = \pm a, \qquad a = \sqrt{2E/k}. \tag{2.11}$$

Η κίνηση είναι μια ταλάντωση μεταξύ αυτών των δύο σημείων.

Από την άλλη, αν $k < 0$, η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας είναι μια αντεστραμμένη παραβολή (βλ. Σχ. 2.2(β)). Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατά δύο είδη κίνησης. Αν $E < 0$, το σωμάτιο μπορεί να πλησιάσει την αρχή μέχρι μια ελάχιστη απόσταση, όπου στιγμιαία ακινητοποιείται πριν αναστραφεί η κατεύθυνση (φορά) κίνησης (η περίπτωση $E_{(2)}$ στο σχήμα). Αν όμως $E > 0$ (η περίπτωση $E_{(1)}$ στο σχήμα), τότε το σωμάτιο έχει αρκετή ενέργεια για να υπερβεί το φράγμα και δεν θα ακινητοποιηθεί καμία στιγμή: θα συνεχίσει στο διηνεκές να κινείται στην ίδια κατεύθυνση, με ελαττούμενη ταχύτητα καθώς πλησιάζει το σημείο $x = 0$, και μετά με αυξανόμενη ταχύτητα.



Σχήμα 2.2

Η δύναμη που αντιστοιχεί στη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας (2.10) είναι, σύμφωνα με την (2.7), η

$$F(x) = -kx. \tag{2.12}$$

Είναι μια ελκτική ή απωστική δύναμη, για $k > 0$ ή $k < 0$ αντίστοιχα, ανάλογη προς τη μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας.

Η εξίσωση κίνησης είναι

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{2.13}$$

Η εξίσωση αυτή επιλύεται πολύ εύκολα. Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε κατευθείαν από την εξίσωση της διατήρησης της ενέργειας στη μορφή (2.8) και να ολοκληρώσουμε ακόμα μια φορά για να βρούμε

$$\int \left(\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2\right)^{-1/2} \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t. \tag{2.14}$$

Ωστόσο, επειδή θα συναντήσουμε αργότερα αρκετές παρόμοιες εξισώσεις, θα ήταν χρήσιμο να συζητήσουμε μια εναλλακτική μέθοδο επίλυσης, η οποία μπορεί να προσαρμοστεί εύκολα για άλλα παραδείγματα που θα συναντήσουμε αργότερα.

Επίλυση της εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή

Η εξίσωση (2.13) είναι μια *γραμμική* διαφορική εξίσωση, δηλ. περιέχει μόνο γραμμικούς όρους ως προς x και τις παραγώγους του. Τέτοιες εξισώσεις έχουν τη σημαντική ιδιότητα οι λύσεις τους να ικανοποιούν την *αρχή της επαλληλίας*: αν οι $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι λύσεις, τότε θα είναι επίσης λύση και κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t), \tag{2.15}$$

όπου τα a_1 και a_2 είναι οποιεσδήποτε σταθερές. Η απόδειξη είναι απλούστατη,

$$m\ddot{x} + kx = a_1(m\ddot{x}_1 + kx_1) + a_2(m\ddot{x}_2 + kx_2) = 0.$$

Επιπλέον, αν οι x_1 και x_2 είναι *γραμμικά ανεξάρτητες* λύσεις (δηλ. αν η μία δεν είναι απλώς σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης), τότε η (2.15) είναι στην πραγματικότητα η γενική λύση. Διότι, καθώς η (2.13) είναι δευτέρας τάξεως, θα μπορούσαμε να βρούμε τη λύση της ολοκληρώνοντας δύο φορές, οπότε η γενική λύση θα περιέχει υποχρεωτικά ακριβώς δύο αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Έτσι, για να κατασκευάσουμε τη γενική λύση, αρκεί να βρούμε δύο ανεξάρτητες λύσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση $k < 0$, οπότε η συνάρτηση $V(x)$ έχει μέγιστο στο $x = 0$. Τότε η (2.13) μπορεί να γραφεί

$$\ddot{x} - p^2 x = 0, \qquad p = \sqrt{-k/m}. \tag{2.16}$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι αυτή η εξίσωση ικανοποιείται από τις συναρτήσεις $x = \mathrm{e}^{pt}$ και $x = \mathrm{e}^{-pt}$. Έτσι, η γενική λύση είναι

$$x = \tfrac{1}{2}A\mathrm{e}^{pt} + \tfrac{1}{2}B\mathrm{e}^{-pt}. \tag{2.17}$$

(Εισάγουμε τον παράγοντα $\frac{1}{2}$ για να απλοποιηθούν οι κατοπινές εκφράσεις: είναι θέμα σύμβασης το να ονομάσουμε τις αυθαίρετες σταθερές A και B ή $\frac{1}{2}A$ και $\frac{1}{2}B$.) Είναι προφανές ότι μια μικρή αρχική μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας θα οδηγήσει εν γένει σε εκθετική αύξηση του x με το χρόνο, η οποία θα συνεχίζεται μέχρις ότου πάψει να ισχύει η προσέγγιση που οδήγησε στην (2.10). Συνεπώς η ισορροπία είναι ασταθής, όπως θα έπρεπε να περιμένουμε όταν εκεί το V έχει ένα μέγιστο.

Στρεφόμαστε τώρα στην περίπτωση όπου $k > 0$ και η $V(x)$ έχει ένα ελάχιστο στο σημείο $x = 0$. Τότε η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας (2.10) είναι εκείνη ενός *απλού* *αρμονικού ταλαντωτή*. Η εξίσωση κίνησης (2.13) γίνεται

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega = \sqrt{k/m}. \tag{2.18}$$

Είναι πάλι εύκολο να ελέγξετε ότι οι συναρτήσεις $x = \cos\omega t$ και $x = \sin\omega t$ είναι λύσεις, και η γενική λύση είναι συνεπώς

$$x = c\cos\omega t + d\sin\omega t. \tag{2.19}$$

Οι αυθαίρετες σταθερές c και d πρέπει να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες. Αν τη στιγμή $t = 0$ το σωμάτιο βρίσκεται στο x_0 έχοντας ταχύτητα v_0, τότε βρίσκουμε εύκολα

$$c = x_0, \qquad d = v_0/\omega.$$

Μια εναλλακτική μορφή της (2.19) είναι η

$$x = a\cos(\omega t - \theta), \tag{2.20}$$

όπου οι σταθερές a, θ συνδέονται με τις c, d μέσω των σχέσεων

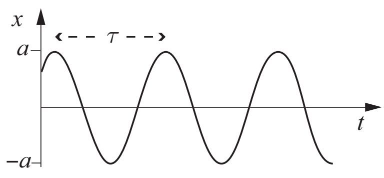
$$c = a\cos\theta, \qquad d = a\sin\theta.$$

Η σταθερά a αποκαλείται το *πλάτος* (της ταλάντωσης). Συμπίπτει με τη σταθερά που εισαγάγαμε στην (2.11), και ορίζει τα όρια ανάμεσα στα οποία ταλαντώνεται το σωμάτιο, $x = \pm a$. Η κίνηση είναι μια περιοδική ταλάντωση με *περίοδο* τ, που δίνεται από την

$$\tau = 2\pi/\omega. \tag{2.21}$$

(Βλ. Σχ. 2.3.) Η *συχνότητα* f είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων ανά μονάδα χρόνου, τουτέστιν

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{2.22}$$



Σχήμα 2.3

Σημειώστε ότι η συζήτηση αυτή ισχύει για την κίνηση ενός σωματιδίου κοντά σε ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας *οποιασδήποτε* συνάρτησης δυναμικής ενέργειας. Εφόσον οι μετατοπίσεις είναι επαρκώς μικρές, κάθε σύστημα αυτού του είδους συμπεριφέρεται σαν ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής. Ειδικότερα, η περίοδος ή η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων μπορεί πάντα να προσδιοριστεί από τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας στο σημείο ισορροπίας.