

LUDWIG
WITTGENSTEIN



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ: Κ.Μ. ΚΩΒΑΙΟΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΜΑΡΙΑ ΚΥΡΤΖΑΚΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

LUDWIG WITTGENSTEIN

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΕΙΣΑΓΩΓΗ, ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ, ΣΧΟΛΙΑ

ΚΩΣΤΗΣ Μ. ΚΩΒΑΙΟΣ

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΜΑΡΙΑ ΚΥΡΤΖΑΚΗ

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΜΙΛΤΙΑΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΥ

E-BOOK



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

Ιδρυτική δωρεά Παγκρητικής Ενώσεως Αμερικής

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

ΙΔΡΥΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ηράκλειο Κρήτης, Τ.Θ. 1527, 711 10. Τηλ. 2810 391097, Fax: 2810 391085

Αθήνα: Κλεισόβης 3, 10677. Τηλ. 210 3849020-23, Fax: 210 3301583

e-mail: info@cup.gr

www.cup.gr

ΣΕΙΡΑ: ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ / ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

ΔΙΕΥΘΥΝΤΕΣ ΣΕΙΡΑΣ: Κώστας Γαβρόγλου, Αριστείδης Μπαλτάς

Δικαιώματα έκδοσης:

This edition is published by arrangement with Blackwell Publishing Ltd, Oxford.

Remarks on the Foundation of Mathematics, Third Edition, by L. Wittgenstein, 1978, ISBN 0631125051

© by Blackwell Publishing Ltd, Oxford

<i>Τίτλος πρωτοτύπου από το οποίο έγινε η μετάφραση:</i>	<i>Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik</i> , Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1984
<i>Επιμέλεια πρωτότυπης έκδοσης:</i>	G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe
<i>© για την ελληνική γλώσσα:</i>	2003, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ
<i>Πρώτη έκδοση:</i>	Σεπτέμβριος 2006
<i>Εισαγωγή, μετάφραση, σχόλια:</i>	Κωστής Μ. Κωβαίος
<i>Γλωσσική επιμέλεια:</i>	Μαρία Κυρτζάκη
<i>Πίνακες:</i>	Μιλτιάδης Θεοδοσίου
<i>Εκτύπωση:</i>	Γ. ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΕΠΕ
<i>Σχεδίαση εξωφύλλου:</i>	Βάσω Αβραμοπούλου

ISBN 960-524-227-3

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Συντομογραφίες	8
Πρόλογος στην ελληνική έκδοση	11
Εισαγωγή	15
 Πρόλογος των επιμελητών G.H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe στην αναθεωρημένη έκδοση	 59
Αναλυτικός Πίνακας Περιεχομένων	63
 ΜΕΡΟΣ I	 83
Παράρτημα I	129
Παράρτημα II	135
Παράρτημα III	139
ΜΕΡΟΣ II	145
ΜΕΡΟΣ III	159
ΜΕΡΟΣ IV	207
ΜΕΡΟΣ V	227
ΜΕΡΟΣ VI	255
ΜΕΡΟΣ VII	285
 Σχόλια & αναφορές	 337
Βιβλιογραφία	407
Πίνακας προσώπων	433
Πίνακας πραγμάτων	439

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

<i>AMM</i>	<i>American Mathematical Monthly</i>
<i>AMSHU</i>	<i>Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität</i>
<i>AN</i>	<i>Annalen der Naturphilosophie</i>
ann.	annotated (σχολιασμένη έκδοση)
<i>APF</i>	<i>Acta Philosophica Fennica</i>
<i>APQ</i>	<i>American Philosophical Quarterly</i>
<i>ASNSP</i>	<i>Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa: Classe di lettere e filosofia</i>
<i>BAMS</i>	<i>Bulletin of the American Mathematical Society</i>
<i>BJPS</i>	<i>British Journal for the Philosophy of Science</i>
<i>BSL</i>	<i>Bulletin of Symbolic Logic</i>
ca.	circa (περίπου)
<i>CJP</i>	<i>Canadian Journal of Philosophy</i>
<i>CR</i>	<i>Cambridge Review</i>
<i>DM</i>	<i>Dissertationes Mathematicae</i>
ed./eds	editor/s (επιμελητής/ές)
Einf.	Einführung (Εισαγωγή)
Einl.	Einleitung (Εισαγωγή)
<i>FM</i>	<i>Fundamenta Mathematicae</i>
Hrsg.	Herausgeber (επιμελητής)
<i>ILR</i>	<i>International Logic Review</i>
int.	introduction (εισαγωγή)
<i>IPQ</i>	<i>International Philosophical Quarterly</i>
<i>JP</i>	<i>Journal of Philosophy</i>
<i>JPL</i>	<i>Journal of Philosophical Logic</i>
<i>JRAM</i>	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik</i>
<i>JSL</i>	<i>Journal of Symbolic Logic</i>
<i>L&C</i>	<i>Language and Communication</i>
<i>LFM</i>	Wittgenstein: <i>Lectures on the Foundations of Mathematics</i>
<i>LSD</i>	Wittgenstein: «The Language of Sense Data and Private Experience»
<i>LWE</i>	<i>Some Letters of Ludwig Wittgenstein (by L. Wittgenstein and W. Eccles)</i>
<i>MA</i>	<i>Mathematische Annalen</i>
<i>MMP</i>	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i>
<i>MS</i>	Wittgenstein: <i>Manuscripts (Χειρόγραφα του Wittgenstein)</i>
<i>MSP</i>	<i>Midwest Studies in Philosophy</i>
N.B.	nota bene (πρόσεξε καλά)
<i>NDJFL</i>	<i>Notre Dame Journal of Formal Logic</i>
<i>PAS</i>	<i>Proceedings of the Aristotelian Society</i>
<i>PASS</i>	<i>Proceedings of the Aristotelian Society: Supplementary volume</i>
<i>PH</i>	Wittgenstein: « <i>Philosophie</i> »
<i>PI</i>	<i>Philosophical Investigations</i>
<i>PM</i>	<i>Philosophia Mathematica</i>

PM	Whitehead & Russell: <i>Principia Mathematica</i>
PPQ	<i>Pacific Philosophical Quarterly</i>
PPR	<i>Philosophy and Phenomenological Research</i>
PQ	<i>Philosophical Quarterly</i>
PR	<i>Philosophical Review</i>
PRSL	<i>Proceedings of the Royal Society of London</i>
PT	<i>Philosophy Today</i>
rev.	revised (αναθεωρημένη έκδοση)
rev. edn.	revised edition (αναθεωρημένη έκδοση)
RF	<i>Rivista di filosofia</i>
RILSL	<i>Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere</i>
RIP	<i>Revue Internationale de Philosophie</i>
RMM	<i>Revue de Métaphysique et de Morale</i>
SHPS	<i>Studies in the History and Philosophy of Science</i>
TAJP	<i>The Australasian Journal of Philosophy</i>
TJPHS	<i>Taiwanese Journal for Philosophy and History of Science</i>
TLP	Wittgenstein: <i>Tractatus Logico-Philosophicus</i>
tr.	translation, traduction (μετάφραση)
TSJP	<i>The Southern Journal of Philosophy</i>
Übs.	Übersetzung (μετάφραση)
VKAA	<i>Verhandeligen der Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam</i>
vol./vols	volume/s (τόμος/τόμοι)
VS	<i>Videnskapselskapets Skrifter</i>
VW	Wittgenstein & Waismann: <i>Voices of Wittgenstein</i>
WA	<i>Wissenschaft aktuell</i>
WLC	Wittgenstein: <i>Lectures, Cambridge 1930-32 και 1932-35</i>
WS	<i>Wittgenstein Studies</i>
WWK	Waismann: <i>Wittgenstein und der Wiener Kreis</i>

έ.α.	ένθ' ανωτέρω
εισ.	εισαγωγή
εκδ.	εκδόσεις
επιμ.	επιμέλεια
KB	Wittgenstein: <i>Καφέ βιβλίο</i>
κ.ε.	και εξής
MB	Wittgenstein: <i>Μπλε βιβλίο</i>
μετ.	μετάφραση
Π&Α	Wittgenstein: <i>Πολιτισμός & αξίες</i>
ΠΒ	Wittgenstein: <i>Περί βεβαιότητας</i>
ΠΘΜ	Wittgenstein: <i>Παρατηρήσεις για τη θεμελίωση των μαθηματικών</i>
πρόλ.	πρόλογος
ΠΤ&Α	Κωβαίος: <i>Wittgenstein: Περί τέχνης και αισθητικής</i>
σημ.	σημείωση/σημειώσεις
ΦΓ	Wittgenstein: <i>Φιλοσοφική γραμματική</i>
ΦΕ	Wittgenstein: <i>Φιλοσοφικές έρευνες</i>
ΦΠ	Wittgenstein: <i>Φιλοσοφικές παρατηρήσεις</i>
ως α.	ως ανωτέρω

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Η ελληνική μετάφραση των *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* έγινε από το γερμανικό πρωτότυπο (Suhrkamp, Frankfurt am Main 1984), με ταυτόχρονη αντιπαραβολή προς την 3η έκδοση της αγγλικής μετάφρασης της G. E. M. Anscombe (*Remarks on the Foundations of Mathematics*, G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe (eds), Blackwell, Oxford 1978). Μεταξύ πρωτοτύπου και αγγλικής μετάφρασης υπάρχουν ορισμένες ασυμφωνίες (παραλείψεις ή προσθήκες), τις οποίες επισημαίνω.

Στην παρούσα έκδοση, οι υποσημειώσεις των επιμελητών της πρωτότυπης έκδοσης περιελήφθησαν στο κυρίως κείμενο (στον πόδα των σελίδων), όπως συμβαίνει και στο πρωτότυπο. Τα δικά μου σχόλια τα τοποθέτησα σε ξεχωριστή ενότητα, στο τέλος του κειμένου, υπό τον τίτλο ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.

Για τις βιβλιογραφικές παραπομπές —οι οποίες, όλες ανεξαιρέτως, γίνονται στη ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ, στο τέλος του βιβλίου—, ακολουθήθηκαν οι εξής συμβάσεις, με κύριο γνώμονα την απαλλαγή του κειμένου της εισαγωγής και των σχολίων από μακροσκελείς και επαναλαμβανόμενες βιβλιογραφικές αναφορές:

α) Η παραπομπή στα έργα του Wittgenstein γίνεται με τη συντομογραφική ένδειξη του έργου και την αναγραφή των παραγράφων ή των σελίδων, ως εξής: ΦΕ §§120-32 ή LFM 82-3, ή και των δύο (διαχωριζομένων με κάθετο), σε περίπτωση που μια παράγραφος εκτείνεται σε περισσότερες της μιας σελίδες: ΦΠ §76/172. Αν μια παρατήρηση αποτελείται από περισσότερες της μιας παραγράφους, προστίθεται ο αριθμός της παραγράφου: ΠΘΜ ΙΙΙ §47.3.

β) Η παραπομπή σε έργα άλλων συγγραφέων γίνεται με το επώνυμο του συγγραφέα, το έτος της δημοσίευσης του έργου, τον αριθμό του τόμου (αν πρόκειται για πρακτικά συνεδρίων ή άλλες συλλογές), με πεζούς λατινικούς χαρακτήρες και, όπου απαιτείται, τον αριθμό της σελίδας ή των σελίδων, ως εξής: Shanker 1986/3: 127.

γ) Αν ένας συγγραφέας έχει περισσότερες της μιας δημοσιεύσεις μέσα στο ίδιο έτος, στον συμβολισμό προστίθεται ένα λατινικό γράμμα που αντιστοιχεί στη ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ. Π.χ. Ambrose 1985b.

δ) Στα κλασσικά κείμενα, παρατίθενται όλες οι έγκριτες μεταφράσεις που έχω υπόψη μου, αλλά η παραπομπή γίνεται με την πρώτη από τις αναγραφόμενες χρονολογίες, που είναι εκείνη της πρώτης έκδοσης (για λόγους ευχερούς αναγνώρισης του έργου). Αν πρόκειται για ανακοινώσεις σε συνέδρια ή συνεδρίες φιλοσοφικών εταιρειών και πανεπιστημίων, η πρώτη χρονολογία δηλώνει τη χρονολογία ανακοίνωσης και η παραπομπή γίνεται με αυτήν.

ε) Οι αναγραφόμενες σελίδες αντιστοιχούν στην έκδοση που έχω υπόψη μου και, όταν υπάρχει φόβος σύγχυσης, δηλώνεται η έκδοση. Π.χ. Frege 1884 (Νεφέλη): 138. Εννοείται ότι, αν η παραπομπή γίνεται με αριθμημένες παραγράφους, περιτεύει ο προσδιορισμός της έκδοσης.

στ) Σε ορισμένες σπάνιες περιπτώσεις ριζικώς αναμορφωμένων μονογραφιών, αναγράφονται δύο χρονολογίες, οι οποίες δηλώνουν αντιστοίχως την πρώτη και την αναθεωρημένη επανέκδοση. Οι παραπομπές γίνονται βεβαίως στην τελευταία. Π.χ. Hacker 1972 [1986].

ζ) Παραπομπή σε δοκίμιο που περιέχεται σε ανθολόγιο με διαφορετική χρονολογική ένδειξη: Carnap 1931: 41-51. Το άρθρο «The Logician Foundations of Mathematics» πρωτοδημοσιεύθηκε το 1931, αλλά η παραπομπή γίνεται στις σελίδες του Ανθολογίου των Benacerraf & Putnam, *Philosophy of Mathematics*, που εκδόθηκε το 1983 και στο οποίο το άρθρο του Carnap αναδημοσιεύτηκε.

η) Αν υπάρχει έγκριτη ελληνική μετάφραση, οι αριθμοί των σελίδων αντιστοιχούν σ' αυτήν —προς διευκόλυνση του Έλληνα αναγνώστη—, ακόμη κι αν υπάρχουν μεταγενέστερες ξενόγλωσσες εκδόσεις. (Αν πρόκειται για ανακοινώσεις σε συνέδρια ή συνεδρίες φιλοσοφικών εταιρειών και πανεπιστημίων, η χρονολογία δηλώνει τη χρονολογία ανακοίνωσης και η παραπομπή γίνεται με αυτήν).

θ) Ως προς τα παραθέματα, αν διαφωνώ με την υπάρχουσα απόδοση, μεταφράζω ο ίδιος, παραπέμποντας, ωστόσο, στις σελίδες της ελληνικής έκδοσης, για να μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέχει με ευχέρεια στα συμφραζόμενα του παραθέματος. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν νομίζω ότι η μετάφραση (είτε δική μου είτε άλλου) δεν μπορεί να αποδώσει κάποια λεπτή νοηματική ή υφολογική απόχρωση του πρωτοτύπου, παραθέτω την ξενόγλωσση διατύπωση, πάντοτε μαζί με την —έστω προσεγγιστική— μετάφρασή της, προτάσσοντας τον αριθμό των σελίδων του πρωτοτύπου, χωριζόμενο με κάθετο από εκείνον της ελληνικής έκδοσης (αν υπάρχει). Π.χ.: ΦΕ 261/209.

ι) Οι τίτλοι των επιστημονικών περιοδικών δίδονται συντομογραφημένοι, πλην των μονολεκτικών, όπως *Mind*, *Synthese*, κλπ.

Στο τέλος του βιβλίου ο αναγνώστης θα βρει λεπτομερείς Πίνακες Προσώπων και Πραγμάτων. Στα λήμματα του τελευταίου έχω συμπεριλάβει τον πρωτότυπο όρο και την αγγλική του απόδοση, έτσι ώστε ο πίνακας να λειτουργεί και ως αντίστροφο λεξιλόγιο.



Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε όλους τους φίλους και συναδέλφους οι οποίοι με βοήθησαν ποικιλοτρόπως στη δουλειά μου: Στον διευθυντή των Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης, Στέφανο Τραχανά, και στους διευθυντές της σειράς, Κώστα Γαβρόγλου και Αριστείδη Μπαλτά, που μου εμπιστεύθηκαν αυτό το δύσκολο έργο. Στον Γιώργο Ευαγγελόπουλο, στην πρωτοβουλία του οποίου οφείλεται ουσιαστικά η υλοποίηση αυτού του σχεδίου, που μόνο πανεπιστημιακοί φορείς θα είχαν τη δυνατότητα και τη βούληση να αναλάβουν. Στον Μίλτο Θεοδοσίου, για τις πολλές εποικοδομητικές συζητήσεις που είχαμε μαζί, καθώς και για την ανεκτίμητη βοήθεια και τη γόνιμη κριτική του στην εισαγωγή και τα σχόλιά μου. Στον Ηλία Παπαγιαννόπουλο, για την πολύτιμη βοήθειά του στην απόδοση δύστροπων σημείων της πρόζας του Wittgenstein. Στον Γιάννη Ρούσσο, για την αρωγή του στα σχόλια εκείνα που χρειάζονταν μαθηματικό της δικής του εμβέλειας και πείρας. Στη Μαρία Κυρτζάκη, για την άψογη φιλολογική της επιμέλεια, και στον Θωμά Σάμιο, που ανάλωσε τον ελάχιστο ελεύθερο χρόνο του στην ανάγνωση του κειμένου και μου έκανε εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις. Επίσης, στη Διονυσία Δασκάλου, για την ανοχή που έδειξε στις αλλεπάλληλες διορθωτικές μου επεμβάσεις, τις οποίες αποδεχόταν πάντοτε με προθυμία και κατανόηση. Τέλος, στη σύντροφό μου, Άννα Τάρλα, που, με την αδιάπτωτη αγάπη και την πρωτοφανή αφοσίωσή της, με ανέσυρε κυριολεκτικώς από το τέλμα στο οποίο με είχε ρίξει η μακρόχρονη περιπέτεια με την υγεία μου, επαναφέροντάς με στην παραγωγική γραμμή, ελπίζω, για αρκετόν καιρό ακόμη.

ΚΩΣΤΗΣ Μ. ΚΩΒΑΙΟΣ

Καλοκαίρι 2006

ΕΙΣΑΓΩΓΗ¹

Σε κανένα θρησκευτικό δόγμα η κακή χρήση των μεταφυσικών εκφράσεων δεν έγινε πρόξενος τόσου κακού όσο στα μαθηματικά. (Π&Α 17)

Εκδοτικά προθέστερα και ερμηνευτικές πλάνες

Κάποτε ζητήθηκε από τον John Wisdom² να γράψει ένα σύντομο βιογραφικό σημείωμα για τον Wittgenstein, το οποίο επρόκειτο να περιληφθεί σε ένα βιογραφικό λεξικό. Πριν πάει για δημοσίευση, ο Wisdom το έστειλε στον Wittgenstein για σχολιασμό. Εκείνος έκανε μία μοναδική αλλαγή· στο τέλος του σημειώματος, προσέθεσε την εξής πρόταση: «Η κυριότερη συνεισφορά του Wittgenstein υπήρξε στη φιλοσοφία των μαθηματικών».³

Μια τέτοια δήλωση δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει αν αναλογισθούμε, αφ' ενός, τη συχνότητα με την οποία σκέψεις γύρω από θέματα της φιλοσοφίας των μαθηματικών αναφύονται στη βιτγκενσταϊνική συγγραφή (και μάλιστα σε θεματολογικά περιβάλλοντα άσχετα —τουλάχιστον εκ πρώτης όψεως— με τον χώρο αυτό, όπως, λ.χ., εκείνα της θρησκευτικής πίστης, της ηθικής, ή της αισθητικής)⁴ αφ' ετέρου, το πλήθος των σχετικών παρατηρήσεων: Τρεις μεγάλες ομάδες, συνολικής έκτασης 1.000 περίπου τυπωμένων σελίδων, είναι αποκλειστικά αφιερωμένες στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Μία από αυτές δημοσιεύθηκε ως ανεξάρτητο σύγγραμμα, με τίτλο *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (Παρατηρήσεις για τη θεμελίωση των μαθηματικών), ενώ οι άλλες δύο απετέλεσαν τις 22 τελευταίες ενότητες και τα Παραρτήματα I και II των *Φιλοσοφικών παρατηρήσεων* και το «Μέρος II» της *Φιλοσοφικής γραμματικής*.⁵

Σημαντικότερα βοηθήματα για την κατανόηση των απόψεων του Wittgenstein αποτελούν επίσης:

α) οι σημειώσεις που είχε κρατήσει, μεταξύ 1929 και 1932, ο Waismann από συζητήσεις του με τον φιλόσοφο,⁶ γνωστές με τον τίτλο, *Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis* (Ο Wittgenstein και ο Κύκλος της Βιέννης)·

β) οι σημειώσεις των John King και Desmond Lee από τις διαλέξεις της περιόδου 1930-1932, τις οποίες εξέδωσε ο τελευταίος το 1980, υπό τον τίτλο, *Wittgen-*

stein's Lectures: Cambridge 1930-1932.

γ) οι σημειώσεις των Alice Ambrose και Margaret Macdonald από τις διαλέξεις της περιόδου 1932-1935, τις οποίες εξέδωσε η πρώτη το 1979, υπό τον τίτλο, *Wittgenstein's Lectures: Cambridge 1932-1935*.

δ) οι σημειώσεις των R. G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees και Yorick Smythies από τις διαλέξεις που ο Wittgenstein είχε δώσει στο Cambridge το 1939, τις οποίες εξέδωσε η Cora Diamond το 1976, με τίτλο, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*.⁷

Η δημοσίευση των παρατηρήσεων του Wittgenstein γύρω από τη φιλοσοφία των μαθηματικών έγινε με πρωθύστερο τρόπο (πράγμα που δημιούργησε σύγχυση στους μελετητές, οδηγώντας πολλούς απ' αυτούς σε λανθασμένα συμπεράσματα). Συγκεκριμένα, οι ΠΘΜ, που γράφθηκαν μεταξύ 1937 και 1944, κυκλοφόρησαν το 1956, οκτώ χρόνια πριν από τα λεγόμενα «μεταβατικά συγγράμματα» (ΦΠ και ΦΓ), τα οποία συντέθηκαν κατά την περίοδο 1929-1931. Στα μεταβατικά κείμενα, ο Wittgenstein πραγματεύεται διά μακρών και εις βάθος θέματα των ανωτέρων μαθηματικών, όπως η υπερπεπερασμένη συνολοθεωρία του Cantor⁸ και το πρόβλημα του συνεχούς⁹, οι αναδρομικές αποδείξεις¹⁰, η περιοδικότητα¹¹, η έννοια του απείρου¹², οι αποδείξεις συνεπειάς¹³, ο λογισμός των πιθανοτήτων¹⁴ κ.ά.¹⁵ Στις ΠΘΜ, τέτοιες αναφορές σπανίζουν ή απουσιάζουν εντελώς, έχοντας δώσει τη θέση τους σε εκτεταμένες αναλύσεις θεμελιωδών εννοιών, όπως η μαθηματική πρόταση, η απόδειξη, ο υπολογισμός, η ακολουθία¹⁶ ενός κανόνα κλπ.

Τα πρωιμότερα κείμενα αποτελούν, τρόπον τινά, 'προκαταρκτικές σπουδές' στην κεντρική ιδέα του Wittgenstein ότι οι παρανοήσεις που διαστίζουν τα κείμενα τόσο των μαθηματικών που φιλοσοφούν όσο και των φιλοσόφων που καταπιάνονται με τα μαθηματικά κάνουν την εμφάνισή τους στο *στοιχειώδες επίπεδο*. Είναι *αφετηριακές* πλάνες. Και επειδή ο εντοπισμός τους καθίσταται δυσχερέστερος στο πλαίσιο των ανωτέρων (και επομένως περιπλοκοτέρων) λογισμών, ο Wittgenstein των ΠΘΜ έχει αποφασίσει ότι ο καλύτερος τρόπος ανάδειξης αυτών των παρανοήσεων είναι η ίδια η αφετηρία: μ' άλλα λόγια, το *στοιχειώδες επίπεδο*. (Θεραπεύοντας την ασθένεια στη ρίζα της, έχεις κάθε λόγο να ελπίζεις ότι θα εξαφανίσεις τα δευτερογενή και τριτογενή της συμπτώματα).¹⁷

Καθώς όμως τα περισσότερα κριτικά δημοσιεύματα είχαν γραφεί εν αγνοία των ΦΠ και ΦΓ, η εμμονή του συγγραφέα των ΠΘΜ στο *στοιχειώδες επίπεδο* και οι καταδικαστικές δηλώσεις του για τις μεγαλεπήβολες προσπάθειες καταξιωμένων στοχαστών, όπως ο Frege, ο Russell, ο Brouwer, ο Hilbert κ.ά., ξεσήκωσαν θύελλα διαμαρτυριών εκ μέρους τόσο των μαθηματικών όσο και των φιλοσόφων. Το Leitmotiv της αντεπίθεσης ήταν ότι ο Wittgenstein δεν είχε, όπως φαίνεται, τον απαραίτητο τεχνικό εξοπλισμό για να κατανοήσει τις προσπάθειες των στοχαστών αυτών· αλλιώς δεν θα έφτανε να υποτιμά κεφαλαίωδους σημασίας συνεισφορές, όπως η συνολοθεωρία του Cantor, ή τα περί μη πληρότητας θεωρήματα του Gödel κλπ.

Όταν ο Waismann έκανε την παρουσίαση των ιδεών του Wittgenstein στο König-sberg το 1930, ο Hahn (1930: 37-8) τις βρήκε «πολύ λιγότερο ενδιαφέρουσες και σημαντικές από τη συγκλονιστική αναγγελία του θεωρήματος του Gödel» (που είχε γίνει κατά την ίδια εκείνη συνεδρία). Στη βιβλιοκρισία των ΠΘΜ, ο Bernays (1959: 174-6, 181) απορρίπτει σχεδόν όλες τις βασικές απόψεις του Wittgenstein ως «μη ικανοποιητικές» ή ως «μη πειστικές» και έχει σοβαρές αμφιβολίες αν τελικά ο Wittgenstein καταφέρνει να ξεκαθαρίσει τίποτε: «Τείνει κανείς να υποπτευθεί ότι η σκοτεινότητα και το ‘μυστηριώδες’ έχουν τη ρίζα τους στον φιλοσοφικό σχηματισμό των εννοιών, δηλαδή στη φιλοσοφική γλώσσα που χρησιμοποιεί ο Wittgenstein» (έ.α. 168). Ο Kreisel (1958-1959: 158) θα κλείσει τη δική του βιβλιοκρισία χαρακτηρίζοντας τις ΠΘΜ ως «αναπάντεχα ασήμαντο προϊόν ενός σπινθηροβόλου πνεύματος».¹⁸ Ο Dummett (1959: 121) θα επισημάνει ότι οι σκέψεις του Wittgenstein «εκφράζονται με τρόπο που και ο ίδιος ο συγγραφέας αναγνωρίζει ως ανακριβή ή σκοτεινό· ορισμένα χωρία αντιφάσκουν με άλλα· ορισμένα πάλι δεν καταλήγουν πουθενά· άλλα αίρουν αντιρρήσεις σε ιδέες που ο Wittgenstein υποστήριζε ή είχε υποστηρίξει και οι οποίες δεν διατυπώνονται με σαφήνεια στον τόμο αυτό [στις ΠΘΜ]. Υπάρχουν τέλος χωρία, ιδιαίτερα εκείνα περί της συνεπείας και περί του θεωρήματος του Gödel, τα οποία είναι κακής ποιότητας και περιέχουν σίγουρα λάθη». Ο Chihara (1963: 273-4) βρίσκει «πολλά σκοτεινά σημεία στον ‘δομισμό’¹⁹ του Wittgenstein», πράγμα που, κατά τη γνώμη του, οφείλεται στην «ανακριβή και συγκεχυμένη χρήση κρίσιμων όρων, όπως ‘έννοια’, ‘κριτήριο’ και ‘χρήση’».

Η εικόνα του «ανεπαρκούς μαθηματικού»²⁰ που αναδύεται μέσα από τα δημοσιεύματα αυτά είχε ως αποτέλεσμα τη μείωση του ενδιαφέροντος των μελετητών για μία από τις σημαντικότερες και εκτενέστερες περιοχές της βιτγκενσταϊνικής διδασκαλίας.²¹

Προφητεύοντας αυτή την κατάσταση, ο Wittgenstein το 1930 έγραφε:

Ο μαθηματικός θα πρέπει να φρίττει με τις παρατηρήσεις μου, διότι η εκπαίδευσή του συνίσταται ακριβώς στην αποτροπή του είδους των σκέψεων και των αμφιβολιών που εδώ αναπτύσσω. Έχει μάθει να τις βλέπει με περιφρόνηση και, για να χρησιμοποιήσω μιαν αναλογία από την ψυχανάλυση (αυτή η παράγραφος θυμίζει Freud), νιώθει γι’ αυτές την αποστροφή που θά ‘νιωθε για οτιδήποτε παιδαριώδες. Μ’ άλλα λόγια, ξεδιπλώνω όλα εκείνα τα προβλήματα που δυσκολεύουν το παιδί όταν μαθαίνει αριθμητική και τα οποία η εγκύκλιος παιδεία παρασιωπά αντί να επιλύει. Λέω λοιπόν σ’ αυτές τις καταπιεσμένες αμφιβολίες: Είστε απόλυτα δικαιολογημένες. Ρωτήστε όμως και ζητήσετε διασαφήσεις! (ΦΓ 392).

Μονάχα πρόσφατα άρχισε να ξανακερδίζει έδαφος η άποψη ότι οι παρατηρήσεις του Wittgenstein για τα μαθηματικά συνιστούν επανάσταση ανάλογη σε σημασία με εκείνη που οι υπόλοιπες απόψεις του έφεραν στους κόλπους της φιλοσοφίας της γλώσσας,²² και ότι η δήθεν μαθηματική του ανεπάρκεια ήταν μάλλον αντανάκλαση της ερμηνευτικής ανεπαρκείας των επικριτών του.²³

Σκοπός μου σ' αυτό το άρθρο είναι να δείξω ότι ο μοναδικός λόγος που η φιλοσοφία των μαθηματικών του Wittgenstein έχει τόσο πολύ υποτιμηθεί είναι ότι έχει παρερμηνευθεί και ότι, στην πραγματικότητα, δεν υπολείπεται διόλου, από πλευράς πρωτοτυπίας και σπουδαιότητας, του υπολοίπου έργου του.²⁴

Δεν είναι μόνο ότι ο ίδιος ο Wittgenstein θεωρούσε τη δουλειά του στα μαθηματικά ως τη σημαντικότερη συνεισφορά του στη φιλοσοφία. Είναι κυρίως ότι σε αυτή τη δουλειά γίνεται εμφανέστερη η ριζική διαφορά της φιλοσοφικής του προοπτικής από εκείνη της επαγγελματικής φιλοσοφίας του 20ού αιώνα. Εδώ θα δούμε με τη μεγαλύτερη ενάργεια πόσο δίκιο είχε να πιστεύει ότι εργαζόταν αντίθετα στο ρεύμα του σύγχρονου πολιτισμού. Διότι ο στόχος στον οποίο κατευθύνονται οι παρατηρήσεις του δεν είναι κάποια συγκεκριμένη άποψη που υποστήριζε κάποτε ο τάδε ή ο δείνα φιλόσοφος· είναι η αντίληψη που έχουν συλλήβδην όλοι σχεδόν οι εν ενεργεία μαθηματικοί και που επικράτησε σε όλο το φάσμα του πολιτισμού μας για περισσότερο από έναν αιώνα — η αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι μια *επιστήμη*.²⁵

Κοινός παρονομαστής των περισσότερων λανθασμένων προσεγγίσεων ήταν η πεποίθηση ότι ο Wittgenstein αποσκοπεί στην *αναίρεση μαθηματικών θέσεων*. Στην πραγματικότητα, ο Wittgenstein αποσκοπεί ακριβώς στο αντίθετο: να παραμείνει, δηλαδή, μακριά από οποιαδήποτε παρέμβαση σε καθαρώς μαθηματικά θέματα.²⁶

Δουλειά της φιλοσοφίας δεν είναι να λύνει αντιφάσεις κάνοντας μαθηματικές ή λογικο-μαθηματικές ανακαλύψεις, αλλά να καθιστά εποπτεύσιμη την κατάσταση των μαθηματικών που μας κάνει ν' ανησυχούμε: την κατάσταση *πριν* από την επίλυση της αντίφασης. (ΦΕ §125)

Η στάση του στον χώρο των μαθηματικών είναι απολύτως συνεχής και συνεπής με το κεντρικό μοτίβο της υπόλοιπης φιλοσοφίας του: «Αφήνουμε τα πάντα ως έχουν». Και η στάση αυτή συνιστά τον βασικότερο αντίλογο σε όσους επιθυμούν να αποδώσουν στον Wittgenstein ενορασιοκρατικές, ή γενικώς δομιστικές, προθέσεις.²⁷

Η φιλοσοφία δεν επιτρέπεται να ανακατεύεται με την πραγματική χρήση της γλώσσας — με εκείνο που όντως λέγεται. Το μόνο που τελικά μπορεί να κάνει είναι να την περιγράφει. Διότι ούτε να την εξηγήσει μπορεί· αφήνει τα πάντα ως έχουν. Αφήνει επίσης τα μαθηματικά ως (τώρα) έχουν· δεν είναι αυτή σε θέση να κάνει μαθηματικές ανακαλύψεις.²⁸ (PH 188, ΦΕ §124)

Έχει τεράστια σημασία να μην παρεμβαίνω στο έργο των μαθηματικών. Δεν πρόκειται να κάνω κάποιον υπολογισμό και να πω «Ίδού το αποτέλεσμα· όχι αυτό που λέει ο Turing». Κι αν ακόμη συνέβαινε κάτι τέτοιο, δεν θα είχε καμία σχέση με το θέμα της θεμελίωσης των μαθηματικών. (LFM 13)

Στη φιλοσοφία δεν μπορούμε να πετύχουμε μεγαλύτερη γενικότητα από εκείνη που διαθέτουν όσα λέμε στη ζωή και την επιστήμη. Και εδώ (όπως και στα μαθηματικά) αφήνουμε τα πάντα ως έχουν. (ΦΓ 147)

Ο δικός του στόχος είναι όλα όσα *δεν* έχουν να κάνουν με μαθηματικά, αλλά αποτελούν ένα είδος φλυαρίας *περί* των μαθηματικών. Για τον Wittgenstein, τα μαθηματικά είναι αλγόριθμος και τίποτε άλλο (ΦΓ 476).²⁹ Οτιδήποτε δεν ανήκει στον *λογισμό* των μαθηματικών είναι «πρόζα» (ΦΠ 413, 418, 426, 431, ΦΓ 302, 382, 387)³⁰, η οποία είτε δεν προσθέτει τίποτε στον λογισμό είτε δημιουργεί κακοποιά φαντάσματα, που φέρνουν σύγχυση σε ένα χώρο όπου τα πάντα βρίσκονται εκτεθειμένα σε κοινή και απρόσκοπτη θέα.³¹

Της ίδιας ερμηνευτικής ανεπάρκειας σύμπτωμα ήταν η προσπάθεια να ενταχθούν οι απόψεις του Wittgenstein σε εκείνα ακριβώς τα ιδεολογικά ρεύματα που ο ίδιος προσπαθούσε να αποξηράνει: Η επίθεσή του στον πλατωνισμό³² και τα επαληθευσιοκρατικά του μοτίβα απετέλεσαν ικανό λόγο για να χαρακτηριστεί ως *δομιστής*.³³ Η προσπάθειά του να μεταθέσει το έρεισμα του μαθηματικού λογισμού από μιαν υποτιθέμενη πραγματικότητα στον ρόλο που ο λογισμός παίζει στη ζωή μας³⁴ εξελήφθη ως «καθαρόαιμη *συμβασιοκρατία*». ³⁵ Η κριτική του στην έννοια του «πραγματικού απείρου» (ΦΓ 302, 475-7, ΦΠ 230-44, 283-92, 394-405) θεωρήθηκε ότι έχει *περατοκρατικό* άρωμα.³⁶ Η άποψή του ότι τόσο η αριθμητική όσο και η λογική ανήκουν στη γραμματική της γλώσσας μας τον έφερε κοντά στον *λογικισμό*.³⁷ Ανάλογα, οι ισχυρισμοί του ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι ψευδοπροτάσεις και δεν εκφράζουν σκέψεις (TLP 6.2, 6.21), ή ότι η αριθμητική δεν ασχολείται με εφαρμογές (ΦΓ 323), θα μπορούσαν κάλλιστα να εκληφθούν ως παραχώρηση στις αρχές του *φορμαλισμού* κλπ.

Ότι ο Wittgenstein *ρητώς* απορρίπτει τα καλούπια στα οποία πιέζονται οι ιδέες του δεν φαίνεται να τους προβληματίζει. Αντί να σταθούν σκεπτικοί μπροστά στην αντίφαση, προτιμούν την εύκολη λύση: να τη θεωρήσουν προϊόν της δήθεν μαθηματικής του ανεπάρκειας. Δεν σκοπεύω να επιχειρηματολογήσω εναντίον αυτής της άποψης, μια και το έργο έχει ήδη αναληφθεί με επιτυχία από αξιόλογους μελετητές, όπως οι Ambrose, Rhees, Stroud, Hacker, Wrigley, Shanker, Frascolla, Marion, κ.ά.³⁸ Πάντως, αυτή η εσφαλμένη προοπτική, όχι μόνο κράτησε στην αφάνεια ένα από τα σημαντικότερα κομμάτια της σκέψης του Wittgenstein, αλλά στέρησε και την υπόλοιπη διδασκαλία από το αποκαλυπτικό φως που οι παρατηρήσεις για τα μαθηματικά ρίχνουν σε θέματα της φιλοσοφίας της γλώσσας και του πνεύματος, αλλά και της φιλοσοφίας *εν γένει*. Εν όψει τέτοιου μεγέθους παρερμηνειών, η αργοπορημένη δημοσίευση των μεταβατικών κειμένων των ΦΠ και της ΦΓ απετέλεσε εκδοτικό απόπημα, με ολέθριες συνέπειες στην κατανόηση της βιτγκενσταϊνικής φιλοσοφίας.

Πρώιμες αντιλήψεις

Από το Τεχνικό Λύκειο του Berlin-Charlottenburg, ο Wittgenstein συνέχισε τις σπουδές του στο πανεπιστήμιο του Manchester, με την προοπτική να γίνει αεροναυπηγός.³⁹ Οι πρώτες του φιλοσοφικές ανησυχίες φαίνεται ότι είχαν να κάνουν με τον

σχεδιασμό μιας αεροτουρμπίνας και τα ανώτερα μαθηματικά που εμπλέκονται σ' αυτόν.⁴⁰ Αλλά κατά έναν τρόπο, που ακόμη δεν έχει εντελώς διασαφηνθεί, η ενασχόλησή του ήταν πρωτίστως με τη λογική και οι ανταλλαγές του με τον Russell και τον Frege αφορούσαν κυρίως τη λογική και την αναπαράσταση.

Η ενασχόληση με τα μαθηματικά άρχισε μερικά χρόνια αργότερα, με λιγοστές, σύντομες παρατηρήσεις στα *Tagebücher*, όπου ο Wittgenstein ορίζει την έννοια της πράξης (17/8/1916) και τονίζει τη σημασία της διασάφησης της έννοιας του «κ.ο.κ.» (21/11/1916).

Στο *Tractatus* (1921), ο Wittgenstein διατυπώνει με εκτενέστερο τρόπο απόψεις που, κατά το μεγαλύτερο μέρος τους, ταυτίζονται ή, έστω, προεικονίζουν τις ύστερες αντιλήψεις του για τα μαθηματικά.⁴¹ Μεταξύ άλλων, δίνει τη γενική μορφή της πράξης (6.01), ορίζει τον αριθμό ως τον εκθέτη μιας πράξης (6.02-6.021), δηλώνει ότι «η θεωρία των κλάσεων είναι εντελώς περιττή στα μαθηματικά..., διότι η γενικότητα που απαιτείται στα μαθηματικά δεν είναι *τυχαία* γενικότητα» (6.031), υποστηρίζει ότι οι προτάσεις των μαθηματικών είναι οι εξισώσεις, κι αυτές είναι «ψευδοπροτάσεις» (6.2), δηλαδή, δεν *λένε* τίποτε (6.21), αλλά, όπως οι ταυτολογίες στη λογική, *δείχνουν* τη λογική του κόσμου (6.22)· ότι, στην πραγματική ζωή, αυτό που χρειαζόμαστε δεν είναι ποτέ μια μαθηματική πρόταση, αλλά χρησιμοποιούμε μαθηματικές προτάσεις *μόνο* σε συνεπαγωγές από προτάσεις που δεν ανήκουν στα μαθηματικά σε άλλες οι οποίες επίσης δεν ανήκουν στα μαθηματικά (6.211)· ότι, αν στα μαθηματικά χρειαζόμαστε την ενόραση για την επίλυση των προβλημάτων, η ίδια η γλώσσα είναι αυτή που προσφέρει την αναγκαία ενόραση (6.233)· ότι ο υπολογισμός δεν είναι πείραμα (6.2331).

Ήδη από το *Tractatus*, ο Wittgenstein έχει δηλώσει σαφώς την αντίθεσή του στον λογικισμό των Frege και Russell και του προγράμματος της τυποποίησης της λογικής (της ιδέας ότι υπάρχουν πρωταρχικές λογικές αναγκαίες αλήθειες από τις οποίες προκύπτουν τα θεωρήματα) και της εξ αυτού του γεγονότος απορρέουσας πεποίθησης ότι η θεμελίωση των μαθηματικών στα αξιώματα της λογικής θα απέκλειε την παρείσφρηση των αντινομιών και των παραδόξων που φαίνονταν να απειλούν την αυστηρότητα και την αξιοπιστία των μαθηματικών λογισμών. Εξάλλου, η διάκριση μεταξύ «λέγειν» και «δεικνύειν» αχρηστεύει την προσπάθεια του Russell να αποφύγει τα συνολοθεωρητικά παράδοξα μέσα από τη θεωρία των τύπων (3.331-3.333). Τέλος, ο Wittgenstein απορρίπτει τον λογικιστικό (συνολοθεωρητικό) ορισμό των αριθμών, προσφέροντας στη θέση του έναν δομιστικής έμπνευσης ορισμό, σύμφωνα με τον οποίο οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν φάσεις εκτέλεσης μιας λογικής πράξης. Ο αριθμός, για το *Tractatus*, είναι μια «τυπική έννοια» (TLP 4.126-4.1274) —όπως η πρόταση— και παρουσιάζεται ως μια ειδική μεταβλητή (6.022)· εκφράζεται μέσω μιας «τυπικής σειράς», της οποίας τα μέλη διατάσσονται από μian «εσωτερική σχέση», και παράγεται από μian επαναλήψιμη πράξη: « x , $\Omega'x$, $\Omega'\Omega'x$, $\Omega'\Omega'\Omega'x$, και ούτω καθεξής» (4.1252, 5.23). «Φτάνουμε στους αριθμούς ως εξής» (6.02): ορίζουμε τον x (την αφηρητή της σειράς) ως « Ω^0x » και τον διάδοχο οποιου-

δήποτε τυχαίου όρου « $\Omega^v \Omega^w x$ » ως « $\Omega^{v+1} x$ ». Αυτό μας επιτρέπει να ξαναγράψουμε τη σειρά ως $\Omega^0 x$, $\Omega^{0+1} x$, $\Omega^{0+1+1} x$, $\Omega^{0+1+1+1} x$, κ.ο.κ. και να δηλώσουμε τη γενική μορφή της πράξης ως $\Omega^0 x$, $\Omega^v x$, $\Omega^{v+1} x$, οπότε ορίζουμε τους ακεραίους ως εξής: $0+1=1$, $0+1+1=2$, $0+1+1+1=3$ κ.ο.κ. Η γενική μορφή ενός ακεραίου είναι $[0, \xi, \xi+1]$ (6.03). Όπως τονίζει ο Glock,

το κρίσιμο σημείο είναι ότι οι αριθμοί δεν είναι αποτελέσματα μιας *μαθηματικής* πράξης (πρόσθετε 1) σε *αριθμητικά*, αλλά κατάλοιπα *λογικών* πράξεων σε *προτάσεις*⁴². Οι αριθμοί αντιστοιχούν σε φάσεις κατασκευής των μοριακών προτάσεων από τις στοιχειώδεις προτάσεις μέσω αληθοσυναρτησιακών πράξεων. Εξ ου και «τα μαθηματικά είναι μια ‘λογική μέθοδος’» (6.2).⁴³

Επάνοδος

Αν τα μαθηματικά στάθηκαν η πύλη μέσα από την οποία ο Wittgenstein οδηγήθηκε στη διατύπωση της πρώιμης φιλοσοφίας του, τα μαθηματικά ήταν και πάλι εκείνα που τον ώθησαν στη μεγάλη στροφή που έκανε η σκέψη του γύρω στα 1929. Για δέκα περίπου χρόνια είχε εγκαταλείψει την ενεργεία φιλοσοφία, με την πεποίθηση ότι είχε βρει την τελική λύση σε όλα τα σχετικά προβλήματα⁴⁴. Όλ’ αυτό το διάστημα είχε καταπιαστεί με τα πιο ετερόκλητα επαγγέλματα: δάσκαλος, κηπουρός, αρχιτέκτονας. Ωστόσο, είχε συχνά την ευκαιρία να συναντά πνευματικούς ανθρώπους και να συζητεί τις φιλοσοφικές απόψεις που τον είχαν κάνει διάσημο. Οι συναντήσεις με τον ιδιοφυή μαθηματικό Frank Ramsey, το 1923-1924, στο ορεινό αυστριακό χωριό Puchberg, όπου ο Wittgenstein edίδασκε, καθώς και με μέλη του Κύκλου της Βιέννης, το 1927, στάθηκαν σημαντικά ερεθίσματα για τη σκέψη του.⁴⁵ Αλλά εκείνο που τον ώθησε να επιστρέψει στη φιλοσοφία και την ακαδημαϊκή ζωή ήταν οι διαλέξεις του Ολλανδού μαθηματικού L. E. Brouwer, το 1928⁴⁶. Ο Herbert Feigl παραδίδει ότι ο Wittgenstein είχε βγει από την αίθουσα πολύ αναστατωμένος και σε κατάσταση διανοητικού αναβρασμού.

Ήταν συναρπαστικό να παρατηρείς την αλλαγή που υπέστη ο Wittgenstein εκείνη τη βραδιά [...] Μιλούσε ακατάπανστα, σκιαγραφώντας ιδέες που επρόκειτο να αποτελέσουν την αφετηρία των ύστερων έργων του [...] Εκείνο το βράδυ σήμανε την αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος του Wittgenstein για τον φιλοσοφικό στοχασμό και τη δραστηριότητα του φιλοσοφείν.⁴⁷

Από το 1929 ως το 1931, η σκέψη του Wittgenstein υφίστατο μια συνεχή μεταστοιχείωση, σημαντικότερος σταθμός της οποίας ήταν η εν τη πράξει υιοθέτηση της μεθόδου που ο ίδιος είχε εξαγγείλει στο τέλος του *Tractatus* (6.53):

Η ορθή μέθοδος στη φιλοσοφία θα ήταν στην πραγματικότητα η εξής: να μη λες τίποτε εκτός από αυτό που μπορεί να ειπωθεί, δηλαδή, προτάσεις των φυσικών επιστημών —δηλαδή, κάτι που δεν έχει να κάνει με φιλοσοφία—, και κάθε φορά που κάποιος άλλος θα ήθελε να πει κάτι μεταφυσικό, να του υποδεικνύεις πως άφησε ορισμένα σημεία στις προ-

τάσεις του χωρίς να τους προσδώσει σημασία. Αυτή η μέθοδος δεν θα ικανοποιούσε τον άλλο —δεν θα είχε το αίσθημα πως του διδάσκουμε φιλοσοφία— αλλά αυτή θα ήταν η μόνη αυστηρώς ορθή μέθοδος.⁴⁸

Η φιλοσοφία του λογικού ατομισμού, την οποία είχε αναπτύξει στο *Tractatus*⁴⁹ με σκοπό να δείξει «πόσο λίγα πράγματα επιτυγχάνονται όταν αυτά τα προβλήματα έχουν επιλυθεί»⁵⁰, εγκαταλείπεται προς χάριν όχι κάποιας άλλης μεταφυσικής θεωρίας, αλλά μιας μεθόδου⁵¹ η οποία φιλοδοξεί να δείξει στην πράξη εκείνο που και για το *Tractatus* αποτελούσε βασική παράμετρο: ότι όλα τα φιλοσοφικά προβλήματα είναι *ανυπόστατα*. Ενώ όμως η επιλογή του *Tractatus* ήταν η *σιγή* για αυτά που «δεν μπορούν να λεχθούν», η επιλογή της ύστερης φιλοσοφίας είναι η περιγραφή του τρόπου με τον οποίο οι εκφράσεις που εμφανίζονται στη μεταφυσική ρήση χρησιμοποιούνται στην καθημερινή γλώσσα και, επομένως, του τρόπου με τον οποίο η «γραμματική» παραβιάστηκε. Κι αυτό δεν μπορείς να το κάνεις σωπαίνοντας, αλλά μιλώντας. Μόνο που δεν προσφεύγεις σε κάποια *μεταγλώσσα* για να περιγράψεις την καθημερινή γλώσσα. Περιγραφή, στην ύστερη φιλοσοφία, σημαίνει παρακολούθηση, «επισκόπηση» (*Übersicht*) των κινήσεων της ίδιας της γλώσσας.⁵² Γύρω στα 1929, το νέο κυρίαρχο μοτίβο της φιλοσοφίας του Wittgenstein είναι: Αν θες να μάθεις το νόημα μιας δήλωσης, κοίτα τη χρήση της, φέρ' ειπείν τον τρόπο με τον οποίο την επαληθεύουμε.⁵³ Αυτή είναι η περίφημη «επαληθευσιοκρατική» φάση⁵⁴ της διδασκαλίας του Wittgenstein κατά τα λεγόμενα «μεταβατικά χρόνια»⁵⁵. Την επαλήθευση ως κριτήριο νοήματος κληρονόμησε ο Κύκλος της Βιέννης και την ανήγαγε σε βασική αρχή της φιλοσοφίας του νεοθετικισμού.⁵⁶ Αλλά για τον Wittgenstein η επαλήθευση ήταν απλώς ένας τρόπος, ανάμεσα σε πολλούς άλλους, εφαρμογής της προτροπής του: «Κοίτα τη χρήση». Ένας άλλος, θα ήταν να εξετάσεις τον τρόπο με τον οποίο διδάχτηκες τη χρήση μιας έκφρασης, ή τον τρόπο με τον οποίο εσύ θα τη δίδασκες σε κάποιον άλλο, κλπ.⁵⁷ Αν για τη φιλοσοφία *simpliciter* η επαλήθευση είναι ένας από τους τρόπους προσδιορισμού του νοήματος μιας πρότασης, για τη φιλοσοφία των μαθηματικών η επαλήθευση —δηλαδή η *απόδειξη*— είναι ο τόπος του νοήματος της μαθηματικής πρότασης· ή —αλλιώς— αν ζητάς το νόημα μιας μαθηματικής πρότασης, κοίτα την απόδειξή της (ΦΓ 381-7). «...Αλλά μονάχα η μέθοδος απάντησης ενός ερωτήματος μου λέει περί τίνος ακριβώς ήταν το ερώτημα. Μόνο όταν έχω απαντήσει το ερώτημα μπορώ να ξέρω πού αποσκοπούσε. (Το νόημα μιας πρότασης είναι η μέθοδος επαλήθευσής της)» (WWK 79). Ο χαρακτήρας της απόδειξης και η σχέση της με τη μαθηματική πρόταση αποτελούν έναν από τους κυριότερους άξονες του ανά χείρας βιβλίου.

Η στάση του Wittgenstein είναι πρόδηλα αντίθετη προς εκείνη του πλατωνισμού, σύμφωνα με την οποία η απόδειξη είναι ένα μέσον για ν' ανακαλύπτουμε αλήθειες γύρω από κάποιον ανεξάρτητο μαθηματικό κόσμο. Ο πλατωνισμός ή —αλλιώς— «η φυσική ιστορία των μαθηματικών όντων» (ΠΘΜ II §40.2) είναι ο αδιαμφισβήτητος στόχος της κριτικής του σε όλα όσα έχει γράψει για τη φιλοσοφία των μαθηματικών.⁵⁸ Για τον Wittgenstein, ο μαθηματικός δεν ανακαλύπτει (οντότητες κάποιου

υποθετικού κόσμου), αλλά *επινοεί*. Ο μαθηματικός είναι ένας εφευρέτης (ΠΘΜ Ι §§167-8, Παράρτημα ΙΙ §2, LFM 22, 66, 82-3).

Ο Wittgenstein δεν είναι φυσικά ούτε ο μόνος ούτε ο πρώτος που επιτέθηκε στον πλατωνισμό. Ο Αριστοτέλης είχε ασκήσει κριτική στην ιδέα, καθώς και δομιστές μαθηματικοί από τον καιρό του Kronecker, αλλά εκείνο που κάνει την κριτική του Wittgenstein να ξεχωρίζει είναι η σύνδεσή της με την ιδέα ότι τα μαθηματικά είναι *κανονιστικά* (normativ, ΠΘΜ VII §61.11). Ούτε εξάλλου ήταν ο πρώτος που μίλησε εις βάθος για την απόδειξη. Αλλά τον Wittgenstein δεν τον ενδιέφερε τί *θα έπρεπε* να γίνει δεκτό ή μη ως θεμιτή απόδειξη στη συνεχιζόμενη αναζήτηση μιας τεχνικής ή μεθοδολογίας που θα εξασφάλιζε τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, πράγμα που βρισκόταν στην καρδιά της θεμελιωτικής κρίσης⁵⁹. Δική του έγνοια ήταν η *διασάφηση* των γνωρισμάτων των κατασκευών εκείνων που οι μαθηματικοί *όντως* παρουσιάζουν και αποδέχονται ως αποδείξεις, ή —αλλιώς— τί εννοούμε όταν λέμε ότι αυτό το σχήμα είναι απόδειξη αυτής της πρότασης.

Θεμελιωτισμός

Η αντίθεση του Wittgenstein προς τον θεμελιωτισμό ήταν γενική: Οι παρατηρήσεις του αποτελούν μian εκ βάθρων κριτική σε όλα τα προγράμματα που οι φιλόσοφοι και μαθηματικοί του καιρού του είχαν αναλάβει για την απαλλαγή των μαθηματικών από τις αντινομίες (ή παράδοξα), είτε ανάγοντας τα μαθηματικά στη λογική (λογικισμός των Frege και Russell) είτε εξαρτώντας τα από μεταλογισμούς (φορμαλισμός του Hilbert) είτε αναμορφώνοντάς τα (ενορασιοκρατία του Brouwer).⁶⁰

Ο κατεξοχήν στόχος της βιτγκενσταϊνικής επίθεσης ήταν η διαδεδομένη πεποίθηση ότι τα μαθηματικά πρέπει να διασφαλισθούν από τους παραλογισμούς, αν πρόκειται να συνεχίσουν να αποτελούν το υπόδειγμα της αξιοπιστίας και της αλήθειας.⁶¹ Η απάντησή του Wittgenstein ήταν διττή:

(α) τα μαθηματικά ούτε *χρειάζονται* θεμελίωση ούτε *μπορούν* να θεμελιωθούν (ΦΓ 312-3, ΠΘΜ VII §16).

(β) τα περίφημα παράδοξα είναι εντελώς αβλαβή (ΦΓ 318).

Η θεμελιωτική προσπάθεια είναι από την αρχή ως το τέλος μια χίμαιρα στηριγμένη σε θεμελιώδεις πλάνες γύρω από τις έννοιες του αριθμού, της απόδειξης, της αλήθειας, του υπολογισμού, του κανόνα⁶² κλπ. (πρβλ. MB 58)· και ο λόγος για τον οποίο δημιουργούνται οι πλάνες είναι η *παρείσδυση γνωσιοθεωρητικών και οντολογικών προβληματισμών* σε ένα χώρο που, εξ ορισμού, *απαρτίζεται αποκλειστικώς* από υπολογισμούς (ΦΓ 381, 476).

Με γεμάτο το φιλοσοφικό μου δισάκι θ' ανεβώ πολύ αργά το βουνό των μαθηματικών. (ΠΑ 18)

Αν η φιλοσοφία έχει κάποιο ρόλο στον χώρο των μαθηματικών, αυτός δεν μπορεί να είναι άλλος από τον αυτοαποκλεισμό της.⁶³ Όπως στη γλώσσα, έτσι και εδώ, ο ρόλος της φιλοσοφίας είναι καθαρά θεραπευτικός: απαλλαγή από τα ψευδοπροβλήματα που δημιουργούνται όταν «ο λογισμός πάει διακοπές» (ΦΕ §38) και επιστροφή στην κανονική του λειτουργία (ΡΗ 183, ΦΕ §116). Στον χώρο των μαθηματικών υπάρχουν μόνο *μαθηματικά* προβλήματα (ΦΓ 381). Οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα δεν είναι τίποτε περισσότερο από δεισιδαιμονία και η μόνη επίπτωση που μπορεί να έχει στα μαθηματικά είναι η συσκοτίση της πραγματικής τους φύσης.

Είναι παράξενο να πιστεύει κανείς πως το συγκεκριμένο κομμάτι των μαθηματικών κινδυνεύει από κάποιες φιλοσοφικές (ή μαθηματικές) έρευνες. (Άλλο τόσο κινδυνεύει και το σκάκι από την ανακάλυψη πως οι πραγματικοί πόλεμοι μεταξύ δύο στρατών δεν γίνονται όπως στη σκακίερα). (ΦΓ 477)

Θα πρέπει να τονισθεί ότι η αντίθεση του Wittgenstein με τις σχολές των λογικιστών, των φορμαλιστών και των ενορασιοκρατών δεν έχει να κάνει με τις τοπικές διενέξεις μεταξύ των διαφορετικών αυτών προσεγγίσεων, αλλά με το γεγονός ότι τα ρεύματα αυτά πηγάζουν *συλλήβδην* από θεμελιωδέστερες πλάνες, που δεν εμφιλοχωρούν αποκλειστικά στον χώρο της φιλοσοφίας των μαθηματικών, αλλά της φιλοσοφίας εν γένει.

Τί υποστηρίζει η κάθε παράταξη στη διένεξη ανάμεσα σε «φορμαλισμό» και «μαθηματικά του περιεχομένου»;⁶⁴ Η διαμάχη μοιάζει μ' εκείνη μεταξύ ρεαλισμού και ιδεαλισμού! Κατά το ότι, λ.χ., πολύ γρήγορα θα φύγει απ' το προσκήνιο και κατά το ότι και οι δύο παρατάξεις διατυπώνουν αθέμιτους ισχυρισμούς, που αντιβαίνουν προς την καθημερινή πρακτική. (ΦΓ 308-9)⁶⁵

Σύμφωνα με την αντίληψη που επικρατούσε στην εποχή του, και συνεχίζει να επικρατεί σε μεγάλο βαθμό, τόσο στους κύκλους των μαθηματικών όσο και στους περισσότερους φιλοσοφικούς κύκλους, οι αριθμητικές εξισώσεις συνιστούν *αλήθειες*. Είναι προτάσεις *περί* κάποιας πραγματικότητας. Μια τέτοια αντίληψη γεννά περαιτέρω ερωτήματα, στα οποία ο φιλόσοφος είναι υποχρεωμένος να απαντήσει:

Περί ποίας *πραγματικότητας*;

Πού *αναφέρονται* οι προτάσεις των μαθηματικών;

Τί είναι εκείνο που μια αληθής μαθηματική πρόταση *περιγράφει*;

Τί είδους *όντα* ονομάζουν οι μαθηματικές εκφράσεις;

Τί *υποδηλώνουν* τα αριθμητικά σύμβολα;

Ο Frege, λ.χ., πίστευε ότι η αριθμητική δεν είναι καλά θεμελιωμένη αν δεν έχει σαφείς απαντήσεις για το τί είναι οι αριθμοί. Το να υποστηρίζεις ότι οι απαντήσεις σε τέτοια ερωτήματα δεν είναι απαραίτητες σημαίνει ότι υποβιβάζεις την αριθμητική σε ένα κενό παιχνίδι συμβόλων. Κατά τη γνώμη του, οι αληθείς αριθμητικές εξισώσεις περιγράφουν σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων που τα αριθμητικά σύμβολα ονομάζουν (Frege 1884: §§58-62).

Ο Wittgenstein δεν αρνείται τον χαρακτηρισμό των αριθμητικών εξισώσεων ως αληθών ή βεβαίων. Σκοπός του δεν είναι η αντικατάσταση της υπάρχουσας ορολογίας από κάποια άλλη. Εκείνο που τον ενδιαφέρει είναι να καταστήσει σαφές το νόημα των εκφράσεων «αλήθεια», «βεβαιότητα» και των σχετικών με αυτές «γνωρίζω», «πιστεύω» κλπ. στον χώρο των μαθηματικών, φέρνοντας έτσι στο φως την τεράστια διαφορά ανάμεσα σ' αυτό το νόημα και σ' εκείνο που οι εκφράσεις αυτές έχουν στον χώρο της εμπειρίας. Με το να ονομάζεις τις μαθηματικές αλήθειες *αναγκαίες* και τις εμπειρικές (επιστημονικές) *ενδεχομενικές*, δηλώνεις βέβαια μια διαφορά αντικειμένου, αλλά συγκαλύπτεις την κατηγορική διαφορά, καθώς τις υπάγεις στον γενικό όρο της αλήθειας και, ως εκ τούτου, τις συνδέεις με την έννοια της *περιγραφής*.⁶⁶

Η πεποίθηση ότι μια αριθμητική εξίσωση *περιγράφει* κάτι είναι *πλανημένη*: το ίδιο και η πεποίθηση ότι ο μόνος τρόπος για να εξηγήσεις μια έκφραση είναι να δηλώσεις εκείνο για το οποίο ιστάται. Η παραδοχή μιας πραγματικότητας, ως προς την οποία μια πρόταση είναι αληθής ή ψευδής, είναι δάνειο από τον χώρο της εμπειρίας. Αλλά ο μαθηματικός λογισμός δεν αποτελεί επιφανικό κάποιας υποκείμενης πραγματικότητας. Οι αποδείξεις στο πλαίσιο του δεν είναι αποδείξεις ότι οι παρεχόμενες *περιγραφές* ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα (πρβλ. ΦΓ 157, 204, 264).⁶⁷ Συνεπώς, η αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης δεν είναι *εμπειρική* αλήθεια.⁶⁸ Κι αυτό φαίνεται ξεκάθαρα από το γεγονός ότι, ενώ στην περίπτωση μιας εμπειρικής δήλωσης μπορούμε να δώσουμε πλήρη περιγραφή εκείνου που θα συνιστούσε απόδειξή της (μ' άλλα λόγια, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε πώς θα μπορούσε να αποδειχτεί, χωρίς να γνωρίζουμε αν είναι όντως αποδείξιμη), στην περίπτωση μιας μαθηματικής πρότασης είναι αδύνατον να περιγράψουμε την αποδεικτική διαδικασία πριν κατασκευάσουμε την απόδειξη (WLC 1930-32: 16, ΦΓ 367-9, 373-7, 382-3, 475-6). Όταν επαληθεύεις μιαν εμπειρική πρόταση, τα γεγονότα μπορεί να σε εκπλήξουν.⁶⁹ Ενώ το να ξέρεις πώς αποδεικνύεται ένα θεώρημα σημαίνει να ξέρεις ότι *πρέπει* να πάρουμε αυτό το αποτέλεσμα και ότι ένα διαφορετικό αποτέλεσμα είναι απλώς αδιανόητο. Η μαθηματική απόδειξη καταθέτει μιαν *εσωτερική σχέση* ανάμεσα στην εκτέλεση μιας πράξης και στη λήψη ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος. Καθορίζει, π.χ., ότι μόνο μια πράξη με αποτέλεσμα 144 ονομάζεται τετραγωνισμός του 12. Σε αντίθεση με τις εμπειρικές προτάσεις, ο δρόμος προς μια μαθηματική πρόταση δεν μπορεί να περιγραφεί χωρίς να φτάσουμε στον προορισμό: δεν υπάρχει χάσμα ανάμεσα στη γνώση του τρόπου επαλήθευσής της και τη γνώση του κατά πόσον αυτή μπορεί να επαληθευτεί (LFM VI/64).

Στα μαθηματικά μαθαίνουμε τί συνιστά απόδειξη μιας πρότασης μόλις την πάρουμε στα χέρια μας. Πράγμα που σημαίνει ότι δεν έχουμε να κάνουμε με *ανακάλυψη*, αλλά με *κατασκευή* (WLC 1930-32: 16, ΦΓ 382-3).⁷⁰ Η μαθηματική πρόταση δεν είναι λοιπόν (αληθής ή ψευδής) περιγραφή ενός γεγονότος,⁷¹ αλλά μέρος (η πρόσοψη) μιας κατασκευής (ΦΠ §162, WLC 1932-35: 10, 193, ΠΘΜ Ι §28): επομένως, ούτε καν *πρόταση*, με την εμπειρική έννοια (TLP 6.11, 6.111, 6.113, WLC 1932-35: 51). Η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης είναι *μέρος* της γραμματικής της (ΦΠ §§122,

162, ΦΓ 379, 382)· καθορίζει το status της μαθηματικής πρότασης ως κανόνος εντός συστήματος κανόνων (ΦΓ 383).⁷² Μια διαφορετική απόδειξη θα καθόριζε διαφορετικό status και, επομένως, διαφορετικό νόημα για την πρόταση (ΦΠ §155).⁷³

Δεν είναι δυνατόν να καταλαβαίνεις μια μαθηματική πρόταση δίχως απόδειξη (WLC 1932-35: 195),⁷⁴ εκτός κι αν είναι ενσωματωμένη ως αξίωμα σε ένα σύστημα αποδείξεων (Beweissystem). Στα μαθηματικά, η έκφραση «αληθής πρόταση» κατοπτρίζει την απόφασή μας να τη χρησιμοποιήσουμε ως κανόνα γραμματικής. Γι' αυτό, στα μαθηματικά δεν υπάρχουν «ψευδείς» προτάσεις, υπό την έννοια ότι μια πρόταση όπως η $'3+2=6'$ δεν ανήκει στη μορφή με την οποία αναπαριστούμε (Form der Beschreibung). Η πρόταση $'3+2=5'$ καταθέτει τί αποτελεί για μας διανοητή περιγραφή της πραγματικότητας και λειτουργεί ως κανόνας εμπειρικού συμπερασμού (π.χ., αγόρασα δύο μήλα κι ύστερα άλλα τρία: άρα αγόρασα, συνολικά, 5 μήλα). Από την άλλη, η άρνηση μιας μαθηματικής πρότασης, $'2+3\neq 5'$, αντιστοιχεί σε έναν *ανόητο* μετασχηματισμό εμπειρικών προτάσεων: π.χ., αγόρασα δύο μήλα κι ύστερα άλλα τρία: άρα δεν αγόρασα, συνολικά, 5 μήλα (ΦΠ 333, ΦΓ 384). Ν' αποδεικνύεις ότι μια μαθηματική πρόταση είναι αληθής σημαίνει να την ενσωματώνεις ως γραμματική πρόταση μεταξύ των γλωσσικών υποδειγμάτων (ΠΘΜ Ι §33, ΙΙΙ §§26-8, 31).⁷⁵

Ο έλεγχος μιας μαθηματικής πρότασης μέσω του υπολογισμού ή της απόδειξης δεν ισοδυναμεί με την εκτέλεση ενός πειράματος (TLP 6.2331, ΠΘΜ Ι §§36-7, 75-99, 162, ΙΙΙ §§67-76). «Αν αντιλαμβάνεσαι την απόδειξη ως πείραμα, το αποτέλεσμα του πειράματος δεν είναι, εν πάση περιπτώσει, αυτό που ονομάζουμε αποτέλεσμα της απόδειξης. Το αποτέλεσμα του υπολογισμού είναι η πρόταση στην οποία καταλήγει· το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ότι από αυτές τις προτάσεις, βάσει αυτών των κανόνων, οδηγήθηκα σ' αυτή την πρόταση» (ΠΘΜ Ι §162).⁷⁶ «Η απόδειξη δεν μου χρησιμεύει ως πείραμα, αλλά ως εικόνα ενός πειράματος» (ΠΘΜ Ι §36).⁷⁷

Η *ανακάλυψη* μιας απόδειξης δεν είναι δυνατή, γιατί αυτό θα προϋπέθετε ότι καταλαβαίνουμε τη μαθηματική πρόταση ανεξάρτητα απ' την απόδειξή της. Ως εκ τούτου, οι μαθηματικές «εικασίες» —όπως, λ.χ., εκείνη του Goldbach⁷⁸— στερούνται νοήματος· και αν τυχόν εννοούμε κάτι με αυτές, απλώς έχουμε κατά νουν τη *φυσική διαδικασία* της αντικατάστασης των μεταβλητών μιας συνάρτησης από ένα άπειρο πεδίο ορισμού.⁷⁹ Αλλά μια τέτοιον είδους εικασία, εκτός του ότι δεν μπορεί ποτέ να επιβεβαιωθεί από την εμπειρία, δεν αναφέρεται σε εκείνο που θα ονομάζαμε *μαθηματική απόδειξη*:⁸⁰

Πείτε πως κάποιος ψάχνει να βρει αν οι άρτιοι επιβεβαιώνουν την εικασία του Goldbach. Υποθέστε πως εκφράζει την εικασία —και μπορεί να την εκφράσει— ότι, όσο κι αν συνεχίσει την έρευνά του, δεν πρόκειται να βρει αντιπαράδειγμα σ' όλη του τη ζωή. Πείτε τώρα πως βρίσκεται μια απόδειξη της εικασίας. Αποδεικνύει αυτή η απόδειξη και την εικασία αυτού του ανθρώπου; (ΦΓ 373-4)

Αν ακούσετε ότι κάποιος απέδειξε πως υπάρχουν αναπόδεικτες προτάσεις στα μαθηματικά, δεν υπάρχει λόγος να εκπλαγείτε, διότι, στην πραγματικότητα, δεν έχετε ιδέα τί λέ-

ει αυτή η φαινομενικά ξεκάθαρη πρόταση. Θα πρέπει να διεξέλθετε την απόδειξη από το Α μέχρι το Ω, για να δείτε τί ακριβώς αποδεικνύει.⁸¹

Ο Wittgenstein κατάλαβε ότι οι πεποιθήσεις του ήταν σε θέση να υπονομεύσουν την ύπαρξη των λεγομένων ‘μεγάλων’ μαθηματικών προβλημάτων, τα οποία δεν έχουν ακόμη λυθεί (ΦΠ 247-52).

Δεν οδηγούν όλ’ αυτά στο παράδοξο ότι στα μαθηματικά δεν υπάρχουν δύσκολα προβλήματα, διότι, αν είναι δύσκολα, τότε δεν είναι προβλήματα; Δεν είναι όμως διόλου έτσι τα πράγματα: Τα δύσκολα προβλήματα στα μαθηματικά είναι εκείνα για τα οποία δεν διαθέτουμε ακόμη κανένα γραπτό σύστημα. Ο ερευνητής μαθηματικός κουβαλάει λοιπόν «στο κεφάλι του» ένα σύστημα από ψυχικά σύμβολα, παραστάσεις, και προσπαθεί να τα μεταφέρει στο χαρτί. Όταν κάνει αυτό το πράγμα, τα υπόλοιπα είναι εύκολα. Αν όμως δεν έχει κανένα σύστημα, ούτε σε γραπτά ούτε σε άγραφα σύμβολα, τότε δεν μπορεί και να ψάχνει για λύση· το πολύ-πολύ να ψηλαφά εδώ κι εκεί. — Βέβαια, και ψηλαφώντας έτσι άσκοπα κάτι μπορεί να βρεις. Δεν είναι όμως αυτό που έψαχνες και, από λογικής πλευράς, η διαδικασία ήταν συνθετική, ενώ η αναζήτηση είναι μια αναλυτική διαδικασία (ΦΠ 251-2).

Έτσι, διέκρινε ανάμεσα σε προτάσεις για τις οποίες υπάρχει καθιερωμένη μέθοδος απόδειξης, σε προτάσεις, δηλαδή, που ανήκουν σε ένα αποδεικτικό σύστημα (Beweissystem) και σε αυτές που δεν ανήκουν. Οι πρώτες είναι κατανοητές χωρίς να υπάρχει λύση. Η πρόταση ‘Πόσο κάνει 345×1003 ;’ έχει σαφές νόημα, ακόμη κι αν δεν την έχουμε λύσει (υπολογίσει), διότι υπάρχει για τη λύση της ένα καθιερωμένο σύστημα κανόνων. Αντίθετα, μαθηματικές προτάσεις που δεν έχουμε ακόμη αποδείξει δεν έχουν νόημα. «Όταν ακούω ένα θεώρημα, ας πούμε της αριθμοθεωρίας, αλλά δεν ξέρω την απόδειξή του, δεν καταλαβαίνω το θεώρημα... Όταν μαθαίνω την απόδειξη, μαθαίνω κάτι εντελώς νέο κι όχι μόνο τον δρόμο προς έναν ήδη γνωστό μου σκοπό» (ΦΠ §155/259).

Σχετικά με την ιδέα των Beweissysteme, ο Wittgenstein διέκρινε ανάμεσα σε ‘αναγκαιότητα του όλου συστήματος’ και ‘αναγκαιότητα εντός του συστήματος’ η οποία συνδέει τα αξιώματα με τις συνέπειές τους. Αυτή η διάκριση αντιστοιχεί σε εκείνη μεταξύ των αποδείξεων οι οποίες επεκτείνουν ένα υπάρχον αποδεικτικό σύστημα και εκείνων οι οποίες απλώς εφαρμόζουν μια ήδη καθιερωμένη τεχνική σε κάτι που δεν έχει ακόμη υπολογιστεί. Στην πρώτη περίπτωση, δεν υπάρχει λογική αναγκαιότητα. Επεκτάσεις ή αλλαγές ενός αποδεικτικού συστήματος δεν προκαθορίζονται από τους υπάρχοντες κανόνες. Διότι, εφαρμόζοντας την παλιά τεχνική σε μια νέα περιοχή, μεταβάλλουμε τις εμπλεκόμενες έννοιες (επεκτείνουμε την έννοια ‘πολλαπλασιασμός’ δίνοντας νόημα στην $(-2) \times (-3)$). Αυτές οι επεκτάσεις συνιστούν νέους σχηματισμούς εννοιών, που μπορεί να υπόκεινται σε ορισμένα πρότυπα (π.χ., πρακτικού ή αισθητικού είδους (ΠΘΜ Ι §167)), αλλά για τα οποία υπάρχουν γνήσιες εναλλακτικές επιλογές, όπως δείχνουν οι διαμάχες σχετικά με

την εισαγωγή των αρνητικών ακεραίων και των απειροστών. Αντίθετα, όταν εφαρμόζουμε ένα καθιερωμένο σύστημα, τα αποτελέσματα είναι προκαθορισμένα. Απαξ και επιλέξαμε σύστημα, είμαστε υποχρεωμένοι ν' ακολουθήσουμε απαρέγκλιτα τη λογική του συστήματος.⁸²

Όμως η συζήτηση του Wittgenstein για την ακολουθία ενός κανόνα⁸³ υπονομεύει αυτή την εικόνα της λογικής υποχρέωσης. Η απόδειξη δεν 'μας πιάνει απ' τον λαιμό' οδηγώντας μας στα συμπεράσματα, άπαξ και δεχτήκαμε τα αξιώματα και τους κανόνες συνεπαγωγής. Σε οποιοδήποτε σημείο μπορούμε να πούμε ό,τι θέλουμε. Απλώς δεν θα *ονομάζαμε* το $1890 \times 665 = 17$ πολλαπλασιασμό. Σε μιαν απόδειξη, λέμε: 'Αυτό έπεται αναγκαστικά εκείνου', προκύπτει, κατ' ανάγκην από εκείνο. Αλλά απόδειξη είναι μόνο για εκείνον που την *αναγνωρίζει* ως απόδειξη. Αν δεν την αναγνωρίζει, αν δεν την ακολουθεί ως *απόδειξη*, τότε εξαιρείται από εμάς τους υπόλοιπους πριν ακόμη πούμε κουβέντα (ΠΟΜ Ι §61). Η απόδειξη δεν μας 'εξαναγκάζει' υπό την έννοια μιας λογικής μηχανής, αλλά μας 'οδηγεί' ή μας 'πείθει' (ΠΟΜ ΙΙΙ §§25, 55, ΙV §30). «Η απόδειξη με κάνει να λέω: αυτό *πρέπει* να είναι έτσι» (ΠΟΜ ΙΙΙ §30.1). «Ας μην ξεχνάμε ότι στα μαθηματικά πειθόμαστε για *γραμματικές* προτάσεις: άρα η έκφραση, το αποτέλεσμα τού ότι πεισθήκαμε, είναι ότι *δεχόμαστε έναν κανόνα*» (ΠΟΜ ΙΙΙ §26.1).

Η ανάγκη για πειθώ βρίσκεται και στην καρδιά του ισχυρισμού του Wittgenstein ότι οι αποδείξεις *πρέπει* να είναι *εποπτεύσιμες* (ΠΟΜ Ι §154, ΙΙΙ §§1-3, 22, 23, 39, 55, ΙV §41, V §§39, 40, VII §20). Πρέπει να είμαστε σε θέση να βλέπουμε τις συνδέσεις, αφού αυτές οι συνδέσεις δεν είναι κάποιο εξωτερικό μέσον για να καταγράφουμε γεγονότα ενός πλατωνικού βασιλείου, αλλά αναπόσπαστο κομμάτι του συμπεράσματος. Η απόδειξη είναι μια γραμματική κατασκευή. Το ότι *πρέπει* να είναι εποπτεύσιμη σημαίνει ότι οι γραμματικές συμβάσεις που ιδρύονται *απ' την απόδειξη* *πρέπει* να είναι εποπτεύσιμες: μ' άλλα λόγια, δεν υπάρχουν κρυμμένοι (ή 'βαθείς') κανόνες που διέπουν τη χρήση των εννοιών μας. «'Η απόδειξη *πρέπει* να είναι εποπτεύσιμη' σημαίνει: *πρέπει* να είμαστε έτοιμοι να τη χρησιμοποιήσουμε ως γνώμονα στις κρίσεις μας» (ΠΟΜ ΙΙΙ §22.2). Το να είναι κάτι κανόνας της λογικής σύνταξης σημαίνει να είναι εποπτεύσιμο.⁸⁴ Αν οι κανόνες της λογικής σύνταξης δεν μπορούν να συλληφθούν, είναι εντελώς άχρηστοι (ΦΠ §121). Από την άλλη, οι μαθηματικές αποδείξεις που υπερβαίνουν την απευθείας εφαρμογή ενός καθιερωμένου αποδεικτικού συστήματος δεν ανακαλύπτουν υπάρχουσες συνδέσεις μεταξύ των εννοιών, αλλά τις κατασκευάζουν, τις θεσπίζουν. Στην περίπτωση τους, αντικειμενικότητα δεν σημαίνει ότι η λήψη ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος είναι κριτήριο ότι εφαρμόσαμε το αποδεικτικό σύστημα, αλλά μόνο ότι η επέκταση του συστήματος είναι εποπτεύσιμη.

Ο χαρακτηρισμός των μαθηματικών προτάσεων ως γραμματικών κανόνων απαλλάσσει τη συζήτηση από γνωσιοθεωρητικού τύπου ενατενίσεις και «επιπεδώνει», τρόπον τινά, τα μαθηματικά, καθώς εξαφανίζει το υποτιθέμενο υπόστρωμα της πραγματικότητας.⁸⁵ Η πρόταση του Wittgenstein είναι να δούμε την αριθμητική ως

τη γραμματική των αριθμητικών όρων μ' άλλα λόγια, ως ένα σύστημα κανόνων για τη χρήση των αριθμητικών συμβόλων σε εμπειρικές δηλώσεις. Η απάντηση στο ερώτημα του Frege «Τί είναι οι αριθμοί;» δεν βρίσκεται στην αναζήτηση αριθμητικών οντοτήτων, αλλά στην έρευνα της χρήσης των αριθμητικών συμβόλων (ΦΠ 199-200, ΦΓ 335).⁸⁶ Αν, για τον Frege, η γραμματική των συμβόλων απορρέει από τη φύση των υποκειμένων οντοτήτων, για τον Wittgenstein η γραμματική είναι αυτή που καθορίζει το είδος των 'αντικειμένων' που τα αριθμητικά σύμβολα υποδηλώνουν. Και η έρευνα των αντικειμένων δεν είναι άλλο από τη διασάφηση των κανόνων ορθής χρήσης των αριθμητικών συμβόλων σε μη μαθηματικές δηλώσεις (TLP 6.211).⁸⁷ Οι αριθμητικές εξισώσεις είναι κανόνες αντικατάστασης αριθμητικών συμβόλων (TLP 6.23, 6.24, ΦΓ 323, 360).⁸⁸ Η σχέση ανάμεσα σε γεωμετρία και προτάσεις της πρακτικής ζωής είναι η σχέση ανάμεσα σ' αυτές τις προτάσεις και στη γραμματική τους. Η εφηρμοσμένη γεωμετρία είναι η γραμματική των δηλώσεων περί χωρικών αντικειμένων (ΦΓ 333).⁸⁹

Η προσπάθεια του Wittgenstein να επιπεδώσει τα μαθηματικά, καταργώντας τον μύθο της υποκείμενης πραγματικότητας, δεν έχει ως συνέπεια τη μετατροπή τους σε ένα κενό παιχνίδι συμβόλων, όπως φοβόταν ο Frege (1893: §90). Απλώς αποσυνδέει τη σημασία των μαθηματικών από υποθετικές οντότητες και μας καλεί να δούμε ότι αυτή η σημασία έγκειται στη θέση που αυτά έχουν στη ζωή μας. Αυτό είναι που τους δίνει τη σημαντικότητά τους και όχι το ότι τάχα εδράζονται σε κάτι 'πραγματικό'.

Αραγε τα μαθηματικά αναφέρονται σε σημάδια πάνω στο χαρτί; Όσο και το σκάκι σε ξύλινες φιγούρες. Όταν μιλάμε για το νόημα των μαθηματικών προτάσεων ή ρωτάμε σε τί πράγμα αναφέρονται, χρησιμοποιούμε μια λανθασμένη εικόνα: πως τάχα έχουμε να κάνουμε με επουσιώδη και αυθαίρετα σημεία που διαθέτουν μια κοινή ουσία: το νόημα [...] Τα μαθηματικά είναι λογισμός και, ως εκ τούτου, δεν αναφέρονται ουσιαστικά σε τίποτε. Γι' αυτό το λόγο δεν υπάρχουν μεταμαθηματικά. (ΦΓ 306, πρβλ. WWK 103-4)

Να ονομάζεις την αριθμητική παιχνίδι είναι τόσο λάθος όσο και να ονομάζεις παιχνίδι τις (σύμφωνα με τους κανόνες) μετακινήσεις των πιονίων. Γιατί κι αυτό θα μπορούσε να είναι ένας υπολογισμός. (ΦΓ 308)

Η επιπέδωση των μαθηματικών είναι μέρος της γενικής προσπάθειας του Wittgenstein να απαλλάξει τη γλώσσα από τον μύθο της εξωγλωσσικής πραγματικότητας, η οποία συνιστά λόγο και θεμέλιό της. Όλοι οι λογισμοί, από την αριθμητική έως την καθημερινή μας γλώσσα, είναι αυτόνομοι. Δεν υπάρχουν *λόγοι* για την επιλογή ενός συστήματος κανόνων· λόγοι υπάρχουν *εντός* ενός συστήματος. Εκείνο που συνδέει την επιλογή ενός συστήματος κανόνων με την πραγματικότητα στην οποία εφαρμόζονται είναι *αίτια*, όχι *λόγοι*· πράγμα που σημαίνει πως η επιλογή τους είναι αυθαίρετη. Δεν μπορείς να περάσεις πίσω από τον κανόνα, γιατί δεν υπάρχει 'πίσω' (ΦΓ 262)· δεν υπάρχει, δηλαδή, 'λογικό' θεμέλιο του κανόνα· η ενδεχόμενη σχέση με πιθανολογούμενα αίτια γένεσής του δεν αποτελεί *λογική* θεμελίωση· ανήκει στην επι-

κράτεια της επιστήμης, ή, αλλιώς, στη «φυσική ιστορία» του λογισμού (ΦΠ 118). Ο λογισμός είναι σαν ένα ουράνιο σώμα που κινείται ελεύθερα στο διάστημα.⁹⁰ Οποιαδήποτε μορφή 'ύπαρξης' του λογισμού κατασκευάζεται απ' αυτόν τον ίδιο και είναι προφανώς εκείνη ακριβώς που του χρειάζεται (ΦΓ 327). Το να πιστεύεις, λοιπόν, ότι μπορείς με κάποιο τρόπο να «θεμελιώσεις» έναν λογισμό είναι απόρροια θεμελιώδους σύγχυσης. Θα μπορούσαμε να πούμε: Η λύση του προβλήματος της θεμελίωσης έγκειται στην εξαφάνισή του.⁹¹

Αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να περιγράψουμε τον λογισμό, φέρ' ειπείν, των πληθικών αριθμών, να δώσουμε, δηλαδή, τους κανόνες του και μ' αυτό τον τρόπο να θέσουμε το θεμέλιο της αριθμητικής. Το θεμέλιο της αριθμητικής το βάσεις διδάσκοντάς την. (ΦΓ 313)

Άμεση συνέπεια των θεμελιωτικών προγραμμάτων εν γένει είναι η ομογενοποίηση της μαθηματικής επικράτειας μέσα από την προσπάθεια των εισηγητών τους να ξαναγράψουν τα μαθηματικά ως ένα ενιαίο αξιωματικό σύστημα. Αυτό το σημείο προσφέρεται για την πιο ανάγλυφη παρουσίαση της διαφοράς ανάμεσα στην παραδοσιακή φιλοσοφία των μαθηματικών και εκείνη του Wittgenstein. Διότι η θεμελιωδέςτερη αρχή της τελευταίας είναι, όπως είπαμε, να «αφήνει τα πάντα ως έχουν». Στόχος της είναι να κατανοήσει τα μαθηματικά, *όπως ευρίσκονται*, όχι να καταργήσει τις υφιστάμενες υπολογιστικές διαφορές ανάμεσα στα διάφορα είδη αποδείξεων, θεωρώντας τις επουσιώδη επιφαινόμενα ενός βαθύτερου αξιωματικού πλαισίου:

Τις μεταβολές ύφους που ο φιλόσοφος αντιλαμβάνεται στις διάφορες μεθόδους παραγωγής, ο σημερινός μαθηματικός τις αντιπαρέρχεται με απάθεια. (ΦΓ 392)

Το βλαβερό στοιχείο στη λογική τεχνική είναι ότι μας κάνει να ξεχνάμε την ειδική μαθηματική τεχνική. Η λογική τεχνική είναι απλώς μια βοηθητική τεχνική στα μαθηματικά. Α.χ., αποκαθιστά δεσμούς μεταξύ διαφόρων τεχνικών. (ΠΘΜ V §24.3)

Θέλω να δώσω μιαν εποπτική εικόνα της πολυχρωμίας των μαθηματικών. (ΠΘΜ III §48)

Οι επιδιώξεις των θεμελιωτιστών είναι παράλληλες με εκείνες των φιλοσόφων που απέβλεπαν στην κατασκευή ιδεωδών γλωσσών, επειδή *τάχα* η καθημερινή δεν είναι αξιόπιστη. Αυτό το παρδαλό συνονθύλευμα (*«buntes Gemisch»*), κατά την έκφραση του Wittgenstein, είναι η μαθηματική γλώσσα, η οποία —όπως ακριβώς η καθημερινή— βρίσκεται σε απόλυτη λογική τάξη. Εν τοιαύτη περιπτώσει, έργο μας δεν μπορεί να είναι η επιδιόρθωσή της, αλλά η κατανόησή της. Ωστόσο, όπως δεν μπορείς ν' αναγνωρίσεις μιαν ανθρώπινη μορφή τυλιγμένη σ' ένα σωρό ρούχα, έτσι δεν μπορείς να διακρίνεις τις λεπταίσθητες διαφορές οι οποίες δηλώνουν πού τελειώνει ένας λογισμός και πού αρχίζει ένας άλλος, όταν τους τυλίγεις όλους μαζί σε ένα αξιωματικό περιτύλιγμα (ΠΘΜ III §§25.5, 53.1).

Μια μεγαλύτερη ευαισθησία. Αυτό είναι που θα διακρίνει τους μαθηματικούς του αύριο από εκείνους του σήμερα· και αυτό είναι που, σαν να λέμε, θα κορφολογήσει τα μαθηματικά. Διότι τότε θα μας ενδιαφέρει περισσότερο η απόλυτη σαφήνεια, παρά η ανακάλυψη καινούριων παιχνιδιών [...] Η φιλοσοφική σαφήνεια θα φέρει στην ανάπτυξη των μαθηματικών το ίδιο αποτέλεσμα που ο ήλιος έχει πάνω στα βλαστάρια της πατάτας (που, στο σκοτεινό κελάρι, γίνονται ένα μέτρο μακριά). (ΦΓ 392)

Λογικισμός⁹²

Μεγάλο μέρος των παρατηρήσεων του Wittgenstein στρέφεται εναντίον των *λογικιστών*, οι οποίοι προσπαθούν να αναγάγουν τις αριθμητικές εξισώσεις σε εξισώσεις της λογικής, πιστεύοντας ότι, μ' αυτόν τον τρόπο, *εξηγούν* τις πρώτες. Η ιδέα είναι ότι, αφού οι προτάσεις των υπολοίπων μαθηματικών μπορούν να αναλυθούν σε προτάσεις της συνολοθεωρίας και της μαθηματικής λογικής, τότε οι προτάσεις της συνολοθεωρίας και της μαθηματικής λογικής είναι εκείνες που *στηρίζουν* τα υπόλοιπα μαθηματικά και εκείνες από τις οποίες *εξαρτάται* η *εγκυρότητα* άλλων κλάδων των μαθηματικών. Ολόκληρη η θεμελιωτική προσπάθεια εκφράζει αυτή την αναγωγική πεποίθηση: Αν έχουμε αμφιβολίες ως προς τη συνέπεια των λογισμών μας,⁹³ η λύση είναι να δείξουμε ότι μπορούν να παραχθούν εγκύρως από άλλους για τους οποίους είμαστε βέβαιοι.

Έμοιαζε να υπάρχει ένας θεμελιώδης λογισμός, συγκεκριμένα η λογική, στον οποίο μπορούν να εδραστούν όλοι οι υπόλοιποι. Αυτή την ιδέα είχαν ο Russell και ο Frege: ότι η λογική αποτελεί τη βάση των μαθηματικών. Το έργο τους ήταν να εκθέσουν τα χαρακτηριστικά αυτού του θεμελιώδους λογισμού, να δείξουν τί πράγμα είναι η λογική. Η λογική ασχολείται με προτάσεις και συναρτήσεις, και τα μαθηματικά μπορούν να στηριχθούν στη λογική. Έτσι, η λογική παρέχει τη γενική μορφή των μαθηματικών προτάσεων [...] Όταν ο Frege προσπαθούσε να αναπτύξει τα μαθηματικά ορμώμενος από τη λογική, πίστευε ότι ο λογισμός της λογικής ήταν ο λογισμός, οπότε οτιδήποτε απέρρεε από αυτόν θα ήταν σωστά μαθηματικά. Μια άλλη ιδέα επί του αυτού επιπέδου ήταν ότι τα μαθηματικά μπορούν να παραχθούν από την αριθμητική των πληθικών. Μαθηματικά και λογική ήταν ένα ενιαίο οικοδόμημα και η λογική το θεμέλιό του. Αυτό το αρνούμαι· ο λογισμός του Russell είναι ένας λογισμός ανάμεσα σε άλλους. Είναι κι αυτός μαθηματικά. (WLC 1932-35: 13, 138)

Η λογική *διέπει* τα μαθηματικά· δεν τα *στηρίζει* — υπό την έννοια ενός υποκειμένου λογισμού ο οποίος παρέχει νόημα στα σημεία του υπερκειμένου. Οι προσπάθειες των Russell και Frege να θεμελιώσουν τα μαθηματικά σε ασφαλέστερες βάσεις δεν είναι τίποτε άλλο από την κατασκευή ενός αυτόνομου λογισμού δίπλα σ' έναν άλλο και ο καθορισμός σχέσεων μεταξύ των δύο. Αλλ' αυτό συνιστά *επέκταση* κι όχι *θεμελίωση* των μαθηματικών. Ο λογισμός της λογικής *παράκειται* του λογισμού της αριθμητικής. Τυπική λογική και μαθηματικά βρίσκονται σε σχέση παραλληλίας και όχι υπαλληλίας.

Υπάρχει κανένα υπόστρομα στο οποίο εδράζονται τα μαθηματικά; Είναι η λογική θεμέλιο των μαθηματικών; Κατά την άποψή μου η μαθηματική λογική είναι απλώς μέρος των μαθηματικών. Δεν υπάρχει τίποτε το προβληματικό σε μια επιστήμη που δεν έχει θεμελιωθεί. (WLC 1932-35: 205)

Η λογική των μαθηματικών φαίνεται στη χρήση του μαθηματικού λογισμού. Επομένως η εγκυρότητα του υπό έλεγχο λογισμού θα πρέπει να αναζητηθεί σ' αυτόν τον ίδιο. Το θεμέλιο που η λογική παρέχει στα μαθηματικά, μέσα σε ένα σύστημα όπως εκείνο των *Principia Mathematica*, είναι ανάλογο με εκείνο που ο ζωγραφιστός βράχος παρέχει στον ζωγραφιστό πύργο, στο πλαίσιο ενός ζωγραφικού πίνακα.⁹⁴ Ο πίνακας εδώ αποτελεί τον γεφυροποιό λογισμό⁹⁵ που αποκαθιστά τη σύνδεση, όχι ανάμεσα στον πύργο και τον βράχο, αλλά ανάμεσα στις εικόνες τους. Και αν υπάρχει κάποια λογική σ' αυτή τη σύνδεση, είναι *ζωγραφική* λογική. Ο «λογικός χώρος» της ζωγραφικής δεν είναι ο χώρος των φυσικών αντικειμένων: Αν σβήσω τον βράχο, ο πύργος δεν θα καταρρεύσει.

Η μετάφραση της αριθμητικής σε λογικούς τύπους δεν συνιστά *εξήγηση* εκείνου που οι αριθμητικές εξισώσεις σημαίνουν. Αν το νόημα μιας έκφρασης είναι ο ρόλος της στο πλαίσιο ενός λογισμού,⁹⁶ είναι αδύνατον η έκφραση αυτή να έχει το ίδιο νόημα στο πλαίσιο ενός άλλου λογισμού.⁹⁷ Σύγκριση ως προς το νόημα μεταξύ δύο εκφράσεων μπορεί να γίνει μόνο εντός του ιδίου λογισμού:

Στα μαθηματικά δεν μπορούμε να μιλάμε για συστήματα εν γένει, αλλά μόνο εντός συστημάτων [...] Δεν μπορείς να πεις ότι η *p* ανήκει στο σύστημα *S*. Δεν μπορείς να ρωτήσεις σε ποιο σύστημα ανήκει η *p*. Δεν μπορείς να αναζητήσεις το σύστημα της *p*. Καταλαβαίνω την *p* σημαίνει καταλαβαίνω ένα σύστημα. Αν η *p* φαίνεται να μεταβαίνει απ' το ένα σύστημα στο άλλο, τότε, στην πραγματικότητα, έχει αλλάξει νόημα.⁹⁸ (ΦΠ §§152, 153, πρβλ. WLC 1930-32: 17)

Άρα, η εξίσωση μιας μαθηματικής έκφρασης με μια έκφραση της τυπικής λογικής δεν μπορεί να υποδηλώνει ταυτότητα νοήματος. Κάθε μία έχει το νόημά της στο πλαίσιο του λογισμού στον οποίο ανήκει. Η εξίσωση αυτή απλώς δηλώνει έναν κανόνα αντικατάστασης: την *απόφασή* μας να αντικαθιστούμε, για ορισμένους σκοπούς, τη μία έκφραση με την άλλη (TLP 6.211, 6.23, 6.24). Μ' άλλα λόγια, η γέφυρα που συνδέει τις δύο εκφράσεις *κατασκευάστηκε*, δεν ανακαλύφθηκε. Επομένως, δεν μας αποκαλύπτει κάτι περί του νοήματος των εκφράσεων· ούτε μας λέει ότι της μαθηματικής έκφρασης υπόκειται μια έκφραση της λογικής, η οποία συνιστά το νόημα ή επικυρώνει την *αλήθεια* της πρώτης:

Κανένας λογισμός δεν μπορεί να απαντήσει σε ένα φιλοσοφικό πρόβλημα. Ένας λογισμός δεν μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για τη θεμελίωση των μαθηματικών. (ΦΓ 312)

Λ.χ., οι ορισμοί των αριθμών 0, 1, 2, κλπ. επί τη βάση της συνολοθεωρίας δεν κάνουν άλλο απ' το να συσχετίζουν τον λογισμό της αριθμητικής με εκείνον της συνολοθεωρίας. Ανάλογα, οι επαγωγικές αποδείξεις (φέρ' ειπείν, του προσεταιριστι-

κού νόμου της πρόσθεσης « $a + (b + c) = (a + b) + c$ ») κατασκευάζουν μια γέφυρα που συνδέει τον λογισμό της στοιχειώδους αριθμητικής με εκείνον των αλγεβρικών παραστάσεων. Δεν «εμβαθύνουν» στη φύση των φυσικών αριθμών περισσότερο από ό,τι οι υπολογισμοί της στοιχειώδους αριθμητικής, ούτε φέρνουν στο φως κάτι σημαντικό που οι απλοϊκές τεχνικές της πρόσθεσης που μαθαίνουμε στο σχολείο δεν είναι σε θέση να προβάλλουν.

Σκοπός των «αναδρομικών αποδείξεων» είναι βεβαίως η αποκατάσταση μιας σύνδεσης ανάμεσα στον αλγεβρικό και τον αριθμητικό λογισμό. Και το δέντρο των αναδρομικών αποδείξεων 'δικαιολογεί' τον αλγεβρικό λογισμό μόνο υπό την έννοια ότι τον συνδέει με τον αριθμητικό λογισμό. Όχι όμως υπό την έννοια ότι οι κατάλογοι των υποδειγμάτων δικαιολογούν τον αλγεβρικό λογισμό, μ' άλλα λόγια, τα βήματα που κάνουμε σ' αυτόν. (ΦΓ 432)

Το σύστημα υπολογισμού με γράμματα του αλφαβήτου είναι ένας νέος λογισμός· αλλά η σχέση του προς τον συνηθισμένο υπολογισμό δεν είναι σχέση ενός μεταλογισμού προς ένα λογισμό. *Ο υπολογισμός με γράμματα δεν είναι θεωρία.* (ΦΠ 425)

Η διαφορά ανάμεσα στη δική μου οπτική και όλων εκείνων που γράφουν σήμερα για τη θεμελίωση της αριθμητικής έγκειται στο ότι εγώ δεν βρίσκω απαραίτητο να περιφρονώ συγκεκριμένους λογισμούς, όπως, λ.χ., το δεκαδικό σύστημα. Για μένα, όλοι είναι εξίσου καλοί. Το να υποτιμάς ένα συγκεκριμένο λογισμό μοιάζει με το να θες να παίζεις σκάκι δίχως πραγματικές φιγούρες, γιατί, έτσι όπως παίζεται, είναι πολύ συγκεκριμένο, όχι αρκετά αφαιρετικό. Αλλά, αν οι φιγούρες δεν παίζουν ρόλο, τότε όλες είναι εξίσου καλές. Κι αν τα παιχνίδια είναι διαφορετικά, τότε τόσο το ένα όσο και το άλλο είναι εξίσου καλά, μ' άλλα λόγια, ενδιαφέροντα. Κανένα δεν είναι ανώτερο απ' το άλλο. (ΦΓ 348)

Φορμαλισμός⁹⁹

Η πλάνη της αναφορικότητας των μαθηματικών βρίσκεται στη ρίζα και του φορμαλιστικού θεμελιωτισμού του Hilbert, ο οποίος ήλπιζε να εξασφαλίσει τη συνέπεια των αξιωμάτων ενός συστήματος μέσα από αποδείξεις, στο πλαίσιο ενός μετα-συστήματος το οποίο θα αναφερόταν στο υπό έλεγχο σύστημα.¹⁰⁰ Αλλά, αν τα μαθηματικά αποτελούνται εξ ολοκλήρου από υπολογισμούς και δεν εκφράζουν τίποτε, δεν μπορεί να υπάρχουν μεταμαθηματικά, νοούμενα ως σύνολο προτάσεων περί των μαθηματικών. Ένας λογισμός που αναφέρεται στα μαθηματικά δεν μπορεί να είναι κι αυτός μαθηματικά (ΦΓ 306)· και αν είναι, τότε δεν είναι περί των μαθηματικών. Στην πρώτη περίπτωση, ο δήθεν μεταμαθηματικός λογισμός είναι απλώς «πρόζα», στο ίδιο, δηλαδή, επίπεδο με την καθημερινή γλώσσα. Στη δεύτερη περίπτωση, ένας ακόμη μαθηματικός λογισμός κοντά σε (και όχι πίσω από) όλους τους άλλους (WWK 121, ΦΠ 412, ΦΓ 313).

Τα μεταμαθηματικά του Hilbert είναι απλώς μαθηματικά ή μεταμφιεσμένα μαθηματικά. (WWK 121, 136, ΦΠ 413, 425)¹⁰¹

Η χίμαιρα των μεταμαθηματικών είναι αποκύημα της «βαθιάς ανησυχίας»¹⁰² του Hilbert μη τυχόν και στα αξιώματα του συστήματος υπάρχουν *άδηλες* αντιφάσεις, οι οποίες, όταν ανακαλυφθούν, θα οδηγήσουν το σύστημα σε κατάρρευση. Τα μεταμαθηματικά, και ειδικότερα οι *αποδείξεις συνεπειάς*, είναι το προσφερόμενο αντίδοτο στον φόβο των κρυμμένων αντιφάσεων. Όμως ο φόβος αυτός είναι αβάσιμος: «Γιατί απαγορεύεται να προκύψει μια συγκεκριμένη διάταξη σημείων; Γιατί αυτός ο φόβος; Γιατί αυτό το ταμπού»; (WWK 119). Ο Wittgenstein προσπαθεί να δείξει ότι εδώ η εμφάνιση αμφιβολίας είναι αδιανόητη, επισημαίνοντας κυρίως δύο πράγματα: Πρώτον, ότι ο ίδιος ο όρος «κρυμμένη αντίφαση» αποτελεί αντίφαση στους όρους και, δεύτερον, ότι η ύπαρξη μιας αντίφασης είναι εντελώς αβλαβής για τον λογισμό. Το επιχείρημα που υποστηρίζει τον πρώτο ισχυρισμό είναι ότι ένα ερώτημα δεν έχει νόημα αν δεν διαθέτεις μέθοδο απάντησής του. Υπ' αυτήν την έννοια, το να ρωτάς κατά πόσον υπάρχει αντίφαση σ' ένα σύστημα κανόνων είναι ανόητο, διότι ο εντοπισμός της αντίφασης είναι ταυτόσημος με τη μέθοδο ανεύρεσής της (WWK 195, 208, ΦΠ 417-8, 442-4, WLC 1930-32: 16-7, LFM 209-11, 224-6). Δεν βρισκόμαστε εδώ στον κόσμο της εμπειρίας, όπου ένα αντικείμενο είναι διανοητό να υπάρχει και να το γνωρίζουμε, ανεξαρτήτως αν το έχουμε στα χέρια μας. Στα μαθηματικά, και στη γραμματική εν γένει, εκείνο που υπάρχει είναι μόνο εκείνο που έχουμε στα χέρια μας.

Μια κρυμμένη αντίφαση δεν είναι κάτι ανάλογο με τους βακίλους που μας βλάπτουν μολονότι δεν αντιλαμβανόμαστε την παρουσία τους (WWK 174, ΦΓ 318, LFM 209-11, ΠΘΜ ΙΙΙ §80.5). Ενόσω η αντίφαση δεν αναφύεται, ο λογισμός είναι απολύτως υγιής (LFM 227) — αφού τίποτε δεν σε εμποδίζει να κάνεις τους υπολογισμούς σου όπως ανέκαθεν τους έκανες.¹⁰³ Αντίφαση υπάρχει μόνο απ' τη στιγμή που διαθέτουμε μέθοδο ανεύρεσής της (δες παραπάνω), οπότε μια αντίφαση δεν μπορεί ποτέ να είναι *κρυμμένη*. Οι αντιφάσεις *κατασκευάζονται* δεν ανακαλύπτονται.¹⁰⁴ Αν ξεκινώντας στα τυφλά, ψάχνοντας για αντιφάσεις, φτάσω κάποια στιγμή σε αντίφαση, δεν σημαίνει ότι την ανεκάλυψα, διότι η ανακάλυψη είναι προϊόν αναζήτησης και η διαδικασία που ακολούθησα δεν αποτελεί αναζήτηση — μια και δεν έχει ούτε σχέδιο ούτε αντικείμενο (ΦΠ 424-5, 435).

Το παράξενο εδώ είναι ότι κάτι ψάχνουμε και δεν έχουμε ιδέα τί είναι πραγματικά αυτό που ψάχνουμε. Πώς να ρωτήσω, λ.χ., αν η ευκλείδειος γεωμετρία είναι απηλλαγμένη αντιφάσεων, τη στιγμή που δεν μπορώ καν να σκεφτώ τί θα σήμαινε να περιέχει αντιφάσεις; Πώς θα ήταν αν περιείχε μian αντίφαση; (ΦΠ 429)

Αν τώρα η αντίφαση που συνάντησα περιπλανώμενος έτσι άσκοπα μέσα στους κανόνες του συστήματος με ενοχλεί, μπορώ να κάνω τρία πράγματα:

- (α) να την αγνοήσω και να εξακολουθήσω να χρησιμοποιώ τον λογισμό, έχοντας συνείδηση του γεγονότος ότι σε κάποιο σημείο της εφαρμογής των κανόνων ανακύπτει αντίφαση·
- (β) να θεσπίσω έναν *ad hoc* κανόνα που να διευθετεί την αντίφαση.¹⁰⁵

(γ) να εγκαταλείψω όλως διόλου τον λογισμό, κατασκευάζοντας ίσως κάποιον άλλο, που δεν θα παρουσιάζει αυτό το πρόβλημα¹⁰⁶ (ΦΠ 411-44, ΦΓ 318-20).

Υπ' αυτήν την έννοια, η 'ανακάλυψη' μιας αντίφασης είναι εντελώς αβλαβής: όχι απλώς είναι εύκολο να την παρακάμψω, αλλά η εμφάνισή της επ' ουδενί δεν απειλεί το υπόλοιπο του λογισμού. Τί θα σήμαινε άραγε η εμφάνιση μιας αντίφασης στον επί αιώνες χρησιμοποιούμενο αριθμητικό λογισμό; Ότι τόσα χρόνια λογιζόμασταν λάθος; Δεν υπάρχει λάθος *λογισμός*: διότι *άπαξ* και *λογιζόμαστε* μ' αυτόν (τούτ' έστιν, κάνουμε τη δουλειά μας), οποιαδήποτε ανακάλυψη σχετικά μ' αυτόν δεν αναιρεί την εφαρμοσιμότητά του: «Καταργεί αυτό όσα έκανες πριν; Όχι βέβαια!» (ΦΠ 444, LFM 209-10, ΠΘΜ ΙΙΙ §81.7, πρβλ. ΠΒ §§212, 217).¹⁰⁷

Η έννοια της διερεύνησης των αξιωμάτων πρέπει να αποκλείει τη δυνατότητα παράβλεψης μιας αντίφασης. Αλλιώς, συγχέουμε *απροσεξία* με *αδυναμία επισκόπησης*. Αλλά «μπορώ πάντοτε να αποφασίζω κατά πόσον υπάρχει αντίφαση, με το να διερευνώ τον κατάλογο των κανόνων μου» (WWK 195).

Ανέκυψε μια αντίφαση. Είχα από την αρχή μέθοδο εντοπισμού της; Αν ναι, τότε το μόνο που συνέβη ήταν μια *παράβλεψη*. Αν όχι, δεν τίθεται καν θέμα δυνατότητας αντίφασης, διότι η αντίφαση δίνεται μόνο με τη μέθοδο ανακάλυψής της. (WLC 1930-32: 16-7)

Αν όλο κι όλο που κάνουμε [στα μαθηματικά] είναι να υπολογίζουμε, το μόνο που μπορεί να πάει στραβά είναι να βρεθούμε σε ένα σημείο όπου δεν μπορούμε πια να υπολογίσουμε: *άπαξ* και συλλάβουμε αυτό το πράγμα, οποιαδήποτε ανάγκη για αποδείξεις συνεπείας εξαφανίζεται [...] Το να λες ότι ένας λογισμός είναι συνεπής σημαίνει ότι *μπορούμε* να κάνουμε υπολογισμούς στο πλαίσιό του και δεν χρειάζεται απόδειξη για να μας πείσει πως έτσι έχουν τα πράγματα.¹⁰⁸

Κι αν τώρα ζητούν μian απόδειξη συνεπείας, διότι, αλλιώς, σε κάθε βήμα τους κινδυνεύουν να πέσουν στον βάλτο — τί ακριβώς ζητούν; —Ε, νά, ζητούν ένα είδος *τάξης*. —Καλά, πριν δεν υπήρχε *καμία* τάξη; —Όχι, αλλά ζητούν μια *τάξη* που να τους καθησυχάζει τώρα. —Και τί είναι, λοιπόν; μικρά παιδιά που θέλουν απλώς να τα νανουρίσεις; (ΠΘΜ ΙΙΙ §78.2)

Μια άλλη πλάνη του φορμαλισμού εκδηλώνεται στη διάκριση ανάμεσα σε καθαρή αριθμητική και αριθμητικές εφαρμογές, οι οποίες είναι απλώς προεκτάσεις των αριθμητικών υπολογισμών, οπότε μόνο η μελέτη των κανόνων χειρισμού των συμβόλων σε ορθούς υπολογισμούς θα μας επιτρέψει να κατανοήσουμε τη σημασία της αριθμητικής.

Κατά τον Wittgenstein, η εφαρμοσιμότητα της αριθμητικής είναι μέρος της *ουσί-ας* της. Αυτό που τη διακρίνει από ένα σκέτο παιχνίδι είναι ακριβώς ότι οι υπολογισμοί της είναι συνυφασμένοι με τη δυνατότητα μέτρησης και απαρίθμησης. Είναι λοιπόν ανόητο να *προσπαθούμε* να εφαρμόσουμε τον αριθμητικό λογισμό στη γραμματική της καθημερινής εμπειρικής γλώσσας, διότι, απλούστατα, χαρακτηρίζοντας μια πρόταση ως 'αριθμητική', έχουμε ήδη δηλώσει ότι είναι *εφαρμοσμή*. Η εφαρμο-

σιμότητα μιας μαθηματικής πρότασης είναι μέρος του νοήματός της (ΦΓ 308-9, 321-5, WLC 1930-32: 12, WLC 1932-35: 127, ΠΘΜ ΙΙΙ §4.5 V §2.3).

Αλλά τί πράγμα προσθέτει η εφαρμογή στον υπολογισμό; Εισάγει μήπως κανένα νέο λογισμό; Ε, τότε, πρόκειται για *άλλον* υπολογισμό. Ή μήπως του δίνει υπόσταση, υπό κάποιαν ουσιώδη για τα μαθηματικά (τη λογική) έννοια; Πώς μπορούμε τότε, έστω και προσωρινά, να παραβλέψουμε την εφαρμογή; Όχι, ο υπολογισμός με μήλα είναι κατ' ουσίαν ίδιος με τον υπολογισμό με γραμμές ή με ψηφία. Η μηχανή αποτελεί προέκταση του κινητήρα, αλλά η εφαρμογή (υπ' αυτήν την έννοια) δεν αποτελεί προέκταση του υπολογισμού. (ΦΓ 324-5)

Πώς συμβιβάζεται αυτή η ιδέα με την άποψη ότι το νόημα μιας μαθηματικής πρότασης προσδιορίζεται από την απόδειξή της (δες παραπάνω); Εδώ δημιουργείται η αίσθηση μιας αντίφασης, αφού το νόημα μιας μαθηματικής πρότασης ορίζεται, τη μια από τον λογισμό, την άλλη από την εφαρμογή του· τη μια παραμένει ακλόνητο, στο πλαίσιο ενός προτασιακού συστήματος, την άλλη αφήνεται ελεύθερο, στην ενδεχομενικότητα των εκάστοτε εφαρμογών του. Αλλά αντίφαση υπάρχει μόνο εφόσον παραγνωρίζεται η φύση του λογισμού. Διότι η σύνδεση του λογισμού με την πραγματικότητα είναι *εσωτερική*. Η εφαρμογή μιας μαθηματικής πρότασης είναι η άλλη όψη του νομίσματος, χωρίς την οποία το νόμισμα δεν έχει αγοραστική αξία (και ο λογισμός δεν είναι λογισμός). Εκείνο που κάνει τον ανεμοδείκτη *ανεμοδείκτη* είναι η δυνατότητά του να περιστρέφεται με τον άνεμο· κι εκείνο που κάνει τον οδοδείκτη *οδοδείκτη* είναι ότι στέκεται ακλόνητα πακτωμένος στο έδαφος (ΦΓ 379). Ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται με την πραγματικότητα (ο τρόπος εφαρμογής τους) ανήκει στην ίδια τους τη *φύση*.¹⁰⁹ Ο χαρακτηρισμός των εξισώσεων ως «κανόνων αντικατάστασης» υποδηλώνει ακριβώς αυτό το πράγμα. Είναι κανόνες που συνδέουν *εμπειρικές* προτάσεις μεταξύ τους. Η εξίσωση $2+2=4$ σημαίνει ότι *μπορώ* να αντικαταστήσω την εμπειρική πρόταση «Έχω 2 μήλα και 2 μήλα» με την πρόταση «Έχω 4 μήλα». Ανάλογα, η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης, με το να της ορίζει μια θέση μέσα σε ένα σύστημα κανόνων χρήσεως σημείων, ορίζει τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να εφαρμοσθεί. Πράγμα που σημαίνει ότι, στα μαθηματικά, εφαρμογή και απόδειξη ταυτίζονται· ή, αλλιώς: «Αν θες να μάθεις πώς εφαρμόζεται μια μαθηματική πρόταση, κοίτα την απόδειξή της».

Τα παραπάνω έχουν άμεση συνάφεια με τις παρατηρήσεις του Wittgenstein για το είδος της σύνδεσης που υπάρχει ανάμεσα στην εντολή και την εκτέλεσή της, στην προσδοκία και το προσδοκώμενο, στην επιθυμία και το επιθυμώμενο κλπ. Ο λόγος για τον οποίο ο Wittgenstein δίνει τόσο μεγάλη σημασία στη διερεύνηση της γραμματικής της επιθυμίας, της προσδοκίας, της πρόθεσης κλπ. (ΦΓ 143-84) είναι ότι το μεγαλύτερο μέρος των φιλοσοφικών πλανών (μεταξύ των οποίων και εκείνη της αρμονίας γλώσσας και πραγματικότητας) πηγάζει από τη σύγχυση ανάμεσα σε «εσωτερικές» και «εξωτερικές» σχέσεις.¹¹⁰

*Ενορασιοκρατία*¹¹¹

Η ενορασιοκρατία του Brouwer πάσχει και αυτή από την ασθένεια του θεμελιωτισμού, παρά τα όποια κοινά δομιστικά μοτίβα με τη σκέψη του Wittgenstein.¹¹² Απλώς ο Brouwer έχει αντιστρέψει τους όρους της πλάνης. Και ο λόγος αυτής της αντιστροφής ανάγεται σε άλλη, βαθύτερη, πλάνη: εκείνη του ψυχολογισμού.

Σε πολύ αδρές γραμμές, ο Brouwer υποστηρίζει ότι πηγή των παραδόξων είναι η θεμελίωση των μαθηματικών στη λογική. (Η εμφάνιση των παραδόξων, λ.χ., στην περιοχή των απείρων κλάσεων, οφείλεται στο ότι εκεί ο νόμος του αποκλεισμένου τρίτου δεν ισχύει). Η λογική, όχι απλώς δεν είναι η βάση των μαθηματικών, αλλά, αντίθετα, στηρίζεται στα μαθηματικά ή, πιο συγκεκριμένα, στην «Grundintuition»¹¹³, τη «θεμελιώδη μαθηματική εποπτεία της δυϊκότητας», προϊόν της αφαιρετικής επέμβασης του νου πάνω στη χρονική αλληλουχία των εμπειριών μας.¹¹⁴ Αλλά αν, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, λογική και μαθηματικά βρίσκονται επί του αυτού επιπέδου, τότε κανένα από τα δύο δεν μπορεί να αποτελέσει θεμέλιο του άλλου. Συν τοις άλλοις, η παραδοχή μιας ψυχολογικής διαδικασίας, όπως η θεμελιώδης εποπτεία, ως συστατικού και σημείου έδρασης του θεμελίου, υπονομεύει ανεπανόρθωτα τη στατική του αντοχή. Διότι αν τα μαθηματικά δεν είναι επιστήμη κι ούτε ασχολούνται με αντικείμενα, πολλώ μάλλον με νοητικά αντικείμενα, υπό ποίαν έννοια μια τέτοια διαδικασία είναι «μαθηματική»;

Δεν φαίνεται αλήθεια από δω πόσο ανόητο είναι να μιλάμε για «θεμελιώδη εποπτεία»; [...] Όταν οι ενορασιοκράτες μιλούν για «θεμελιώδη εποπτεία», αναφέρονται σε κάποια ψυχολογική διαδικασία; Και πώς αυτή η διαδικασία μπαίνει στα μαθηματικά; (ΦΓ 336)

Η ενορασιοκρατία είναι μια κουταμάρα, πέρα για πέρα. (LFM 237)

Όπως και νά 'χει το πράγμα, ο Brouwer ξεκίνησε ένα ολόκληρο πρόγραμμα αναμόρφωσης των μαθηματικών επί τη βάσει ενορασιοκρατικών αρχών, εξοβελίζοντας μεγάλα τμήματα της επικρατείας τους. Αν όμως ένας λογισμός κάνει τη δουλειά που θέλεις, ποιος ο λόγος να τον εξοβελίσεις; Μόνο αν πιστεύεις ότι ο λογισμός αυτός αποτελεί σαθρό θεμέλιο άλλων λογισμών ή στηρίζεται ο ίδιος σε σαθρά θεμέλια με άλλα λόγια, μόνο αν είσαι δέσμιος της θεμελιωτικής πλάνης και δεν αντιλαμβάνεσαι ότι οι μαθηματικοί λογισμοί δεν αποτελούνται από περιγραφές, αλλά από σκέτους αλγορίθμους. Στην πραγματικότητα, το πρόγραμμα του Brouwer ισοδυναμεί με μεταρρύθμιση (και όχι με θεμελίωση) των μαθηματικών.¹¹⁵

Τα εμφανή δομιστικά μοτίβα, τόσο του *Tractatus* όσο και των μεταγενεστέρων κειμένων, καθώς και η, σοπεναουερικών καταβολών, βουλευσιарχία του Brouwer απετέλεσαν ικανά κριτήρια για την ένταξη των παρατηρήσεων του Wittgenstein για τα μαθηματικά στο πλαίσιο της ενορασιοκρατίας του πρώτου. Μια τέτοια κίνηση είναι αδικαιολόγητη εν όψει των ριζικών διαφορών των δύο προσεγγίσεων, οι οποίες άλλωστε μαρτυρούνται από τη συχνή κριτική του Wittgenstein σε βασικές αρχές της ενορασιοκρατίας:

(α) Η πεποίθηση του Brouwer ότι τα μαθηματικά αποτελούν προγλωσσική κατασκευή είναι ασυμβίβαστη με την αντιψυχολογιστική τοποθέτηση του Wittgenstein, ο οποίος, όπως είπαμε, βλέπει τις μαθηματικές εξισώσεις ως κανόνες αντικατάστασης, που επιτρέπουν να συνάγουμε μια εμπειρική πρόταση από μια άλλη.¹¹⁶ τις βλέπει, δηλαδή, ως έκφραση της δυνατότητας υποκατάστασης μιας μαθηματικής παράστασης με μια άλλη, στο πλαίσιο της μαθηματικής μεθόδου.

Στο ερώτημα κατά πόσον, για τη λύση των μαθηματικών προβλημάτων, χρειαζόμαστε την εποπτεία, θα πρέπει ν' απαντήσουμε ότι, εδώ, η *γλώσσα* είναι εκείνο που παρέχει την απαραίτητη εποπτεία. Η διαδικασία του *υπολογισμού* πορίζει αυτή την εποπτεία. Ο υπολογισμός δεν είναι πείραμα. (TLP 6.233, 6.2331)

Αν η εποπτεία είναι μια εσωτερική φωνή, πώς ξέρω με *ποιον τρόπο* να την ακολουθήσω; Κι ύστερα, πώς ξέρω ότι δεν με παραπλανά; Γιατί, αν μπορεί να με οδηγή σωστά, τότε μπορεί να με οδηγή και λάθος. (ΦΕ §213)

Πώς καταλαβαίνω αυτά που η 'εσωτερική φωνή' μου λέει; Μήπως με μια δεύτερη πράξη εποπτείας;! Αλλά, ό,τι και νά 'ναι —είτε φωνή είτε είδος αντίληψης— πώς ξέρω ότι είναι *σωστή*; Αν ισχυρισθεί κανείς ότι η εποπτεία είναι κάτι σαν την αναγνώριση, ότι δηλαδή δεν υπάρχει περίπτωση να έχω λανθασμένη εποπτεία ενός πράγματος, πώς ξέρω ότι αυτό που έχω *είναι* εποπτεία; Γιατί, βέβαια, εδώ δεν υπάρχει η ανεξάρτητη, εξωτερική επιβεβαίωση που έχουμε στην περίπτωση της αναγνώρισης. Όταν λέω ότι αναγνωρίζω τον Α, έχω τρόπους ανεξάρτητης ταύτισης του Α για να βεβαιωθώ ότι αυτό που συνέβη ήταν όντως μια πράξη αναγνώρισης. Στην περίπτωση όμως της εποπτείας ενός εσωτερικού αντικειμένου, απουσιάζει τέτοια δυνατότητα. Για εποπτεία μπορεί να μιλάει κανείς μόνο όταν υπάρχουν άλλες μέθοδοι ελέγχου της ορθότητάς της (είτε είναι η εμπειρία είτε ο υπολογισμός). Άρα η έννοια της «θεμελιώδους εποπτείας» είναι μια ανοησία. «Εποπτεία: ένα άχρηστο ανακάτωμα» (ΦΕ §213).

(β) Είναι βασική αρχή της ενορασιοκρατίας (και άλλων μορφών δομισμού) ότι μια μαθηματική πρόταση μπορεί να είναι κατανοητή, ανεξαρτήτως αν γνωρίζουμε κατά πόσον αληθεύει· ή, αλλιώς, ότι η μαθηματική απόδειξη εξασφαλίζει την αλήθεια μιας δήλωσης που είναι κατανοητή *πριν* από την απόδειξη.¹¹⁷ Η ιδέα αυτή προέρχεται ξανά από τον χώρο της εμπειρίας. Αλλά, για τον Wittgenstein, τα μαθηματικά δεν περιέχουν εμπειρικές δηλώσεις που επιδέχονται τέτοιου είδους επαλήθευση.¹¹⁸

(γ) Ο Wittgenstein απορρίπτει την αντίληψη του Brouwer ότι οι νόμοι της λογικής εδράζονται στα μαθηματικά, με το ίδιο μέτρο που απορρίπτει και την αντιδιαμετρική της αντίληψη, τον λογικισμό: και οι δύο δίνουν χαρακτήρα θεμελίου σε ένα λογισμό που παράκειται ενός άλλου.

(δ) Ο Brouwer έβλεπε τους νόμους της λογικής περίπου σαν τους νόμους της φύσης, σαν γενικές περιγραφές φαινομένων: Συγκρίνοντας αυτές τις περιγραφές με τα

ίδια τα φαινόμενα, είμαστε σε θέση να δούμε αν ταιριάζουν με αυτά εξ ολοκλήρου ή εν μέρει και, κατά περίπτωση, να περιορίσουμε την ισχύ τους. Μέσα από αυτή την πεποίθηση, υποστήριξε ότι ο νόμος του αποκλεισμένου τρίτου πρέπει να αποκλεισθεί από τα μαθηματικά των απειροσυνόλων¹¹⁹. Οι άπειροι δεκαδικοί αποτελούσαν χειροπιαστή απόδειξη ότι υπάρχουν περιοχές των μαθηματικών στις οποίες ο νόμος του αποκλεισμένου τρίτου δεν ισχύει, διότι, λ.χ., το ερώτημα κατά πόσον υπάρχουν τρία 7άρια στο ανάπτυγμα του π δεν είναι *αποκρίσιμο*.

Αλλά, για τον Wittgenstein, τόσο ο νόμος του αποκλεισμένου τρίτου όσο και οι άλλοι νόμοι της λογικής ανήκουν στο πρίσμα, στο πλαίσιο μέσα από το οποίο βλέπουμε τον κόσμο, στην «Darstellungsform» ή «Darstellungsweise» (ΦΕ §122).¹²⁰ Ο περιορισμός της ισχύος ενός νόμου της λογικής προϋποθέτει δυνατότητα *ελέγχου* αυτού του πλαισίου, ή, αλλιώς, δυνατότητα διατύπωσης μιας πρότασης η οποία αρνείται τους λογικούς νόμους που τη διέπουν: Αλλά δεν υπάρχει τρόπος να βγούμε έξω από το πλαίσιο για να δούμε αν αποδίδει σωστά εκείνα που βλέπουμε με τη βοήθειά του.

Όπου δεν ισχύει ο νόμος του αποκλεισμένου τρίτου δεν ισχύει κανένας άλλος νόμος της λογικής, διότι τότε δεν έχουμε να κάνουμε με προτάσεις των μαθηματικών. Αντίθετα με όσα λένε οι Weyl και Brouwer (ΦΠ 251, πρβλ. 287).¹²¹

Η λέξη «πρόταση», αν έχει κάποιο νόημα εδώ, είναι ισοδύναμη με ένα λογισμό και μάλιστα με εκείνον στον οποίο $p \vee \neg p = \text{ταυτ.}$ (ισχύει ο «νόμος της του τρίτου αποκλείσεως»). Αν δεν ισχύει, θα πει πως έχουμε αλλάξει την έννοια της πρότασης. Αυτό όμως δεν σημαίνει πως κάναμε κάποια ανακάλυψη (πως βρήκαμε κάτι που είναι πρόταση και που δεν υπακούει στον τάδε νόμο). Σημαίνει απλώς ότι κάναμε μια νέα παραδοχή, ότι στήσαμε ένα νέο παιχνίδι. (ΦΓ 379-80, WLC 1930-32: 16-7)

Όλ' αυτά καταλήγουν στο ότι δεν υφίσταται πρόβλημα αποκρισιμότητας (Entscheidungsproblem). Δεν υπάρχει μη αποκρίσιμη *πρόταση* (είτε μαθηματική είτε εμπειρική), διότι ως «πρόταση» ανήκει ήδη σε ένα προτασιακό *σύστημα* —αποδεικτικό σύστημα (Beweissystem), στην περίπτωση των μαθηματικών—, για το οποίο υφίσταται γενική μέθοδος επαλήθευσης. Το ίδιο το *ερώτημα* κατά πόσον μια πρόταση είναι αποκρίσιμη στερείται νοήματος. Το ν' αντιλαμβάνεσαι το νόημα μιας έκφρασης (μ' άλλα λόγια, ν' αντιλαμβάνεσαι ότι είναι *πρόταση*) πιστοποιεί ότι είναι αποκρίσιμη.

(ε) Μια τέτοια θεώρηση των νόμων της λογικής καθιστά αναγκαία την αναδόμηση των μαθηματικών επί τη βάσει ενορασιοκρατικών αρχών. Όσες περιοχές των μαθηματικών ικανοποιούν αυτές τις αρχές θα πρέπει να κρατηθούν, οι υπόλοιπες να τεθούν εκτός μαθηματικής επικράτειας. Αλλά ο Wittgenstein δεν απέβλεψε ποτέ σε αναμόρφωση των μαθηματικών.¹²² Τόσο στον χώρο της φιλοσοφίας των μαθηματικών όσο και σε εκείνον της φιλοσοφίας της γλώσσας, ο ρόλος του είναι καθαρά διασαφητικός (δες παραπάνω).

Πουθενά αλλού οι αντιλήψεις του Wittgenstein για τον θεμελιωτισμό, τα μεταμαθηματικά, τη φύση της απόδειξης και της μαθηματικής αλήθειας, την εκτασιακή αντίληψη των αριθμών και τη μαθηματική 'πρόζα' δεν κάνουν μεγαλύτερη αίσθηση όσο στην κριτική του των θεωρημάτων του Gödel και της έννοιας του απείρου. Γι' αυτό επιβάλλεται να δούμε αυτά τα θέματα ξεχωριστά:

Θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel

Δουλειά μου δεν είναι να επιτεθώ στη λογική του Russell εκ των έσω, αλλά εκ των έξω —όχι, δηλαδή, στη μαθηματική της υπόσταση —γιατί τότε θα έκανα μαθηματικά—, αλλά στη θέση της, στο υπόγρημά της. Δουλειά μου δεν είναι να μιλήσω για την απόδειξη του Gödel, αλλά να την προσπεράσω. (ΠΘΜ VII §19.(3-5))

Όσο παράξενα κι αν ηχεί, η δική μου δουλειά, όσον αφορά το θεώρημα του Gödel, είναι απλώς να διασαφίσω τί μπορεί να σημαίνει στα μαθηματικά μια πρόταση όπως: «Υποθέστε ότι μπορούμε να αποδείξουμε». (ΠΘΜ VII §22.7)

Εκείνο που μας ενδιαφέρει δεν είναι η απόδειξη του Gödel, αλλά οι δυνατότητες τις οποίες ο Gödel μας καλεί να συνειδητοποιήσουμε μέσα από τη συζήτησή του. Η απόδειξη του Gödel ξεδιπλώνει μια δυσκολία, η οποία πρέπει να εμφανισθεί με πολύ στοιχειωδέστερο τρόπο. (Και εδώ έγκειται, κατά τη γνώμη μου, η μεγαλύτερη υπηρεσία του Gödel στη φιλοσοφία των μαθηματικών και, ταυτοχρόνως, ο λόγος για τον οποίο η συγκεκριμένη του απόδειξη δεν μας ενδιαφέρει) [...] Θέλω να πω: Δεν είναι η απόδειξη του Gödel που μας ωθεί να αλλάξουμε την προοπτική βάσει της οποίας θεωρούμε τα μαθηματικά. Αυτό που μας αφορά δεν είναι *εκείνο* που αποδεικνύει ο Gödel, αλλά ότι πρέπει να καταπαιστούμε με το συγκεκριμένο *είδος απόδειξης*.¹²³

Φαντάζομαι κάποιον που ζητάει τη συμβουλή μου: λέει: «Κατασκεύασα μια πρόταση (θα την ονομάσω 'Ρ') στον συμβολισμό του Russell, την οποία μπορεί κανείς, μέσω κάποιων ορισμών και μετασχηματισμών, να ερμηνεύσει έτσι ώστε να σημαίνει: 'Η Ρ δεν είναι αποδείξιμη στο σύστημα του Russell'. Δεν θά 'πρεπε τώρα να πούμε γι' αυτή την πρόταση ότι από τη μια είναι αληθής, από την άλλη μη αποδείξιμη; Διότι, αν υποθέσουμε ότι είναι ψευδής, τότε αληθεύει ότι είναι αποδείξιμη! Κι αυτό σίγουρα δεν μπορεί να είναι. Αν πάλι αποδειχτεί, τότε έχει αποδειχτεί ότι δεν είναι αποδείξιμη. Επομένως, μπορεί να είναι μόνο αληθής και μη αποδείξιμη». Όπως ακριβώς ρωτάμε: «'αποδείξιμη' σε ποιο σύστημα;», έτσι θα πρέπει να ρωτάμε και «'αληθής' σε ποιο σύστημα;». 'Αληθής στο σύστημα του Russell' σημαίνει, όπως είπαμε: αποδεδειγμένη στο σύστημα του Russell' και 'ψευδής στο σύστημα του Russell' σημαίνει: η αντίθετή της έχει αποδειχτεί στο σύστημα του Russell. —Τί σημαίνει τώρα το «αν υποθέσουμε ότι είναι ψευδής»; *Κατά την έννοια του Russell*, σημαίνει: 'αν υποθέσουμε ότι η αντίθετη είναι αποδεδειγμένη στο σύστημα του Russell'· *αν αυτή είναι η παραδοχή σου*, θα πρέπει τώρα ασφαλώς να εγκαταλείψεις την ερμηνεία ότι είναι μη αποδείξιμη. Και με τον όρο 'ερμηνεία' αντιλαμβάνομαι τη μετάφραση σ' αυτή την ελληνική πρόταση. —Αν δεχτείς ότι η πρόταση είναι αποδείξιμη στο σύστημα του Russell, αυτό σημαίνει ότι είναι αληθής *με την έννοια του Russell*, και η ερμη-

νεία «H P είναι μη αποδείξιμη» θα πρέπει πάλι να εγκαταλειφθεί. Αν δεχτείς ότι η πρόταση είναι αληθής με την έννοια του Russell, έπεται το ίδιο. Επιπλέον: αν η πρόταση είναι ψευδής υπό διαφορετική έννοια από εκείνη του Russell, τότε αυτό δεν αντιφάσκει με το γεγονός ότι είναι αποδεδειγμένη στο σύστημα του Russell. (Αυτό που ονομάζεται «ήττα» στο σκάκι μπορεί να συνιστά νίκη σε ένα άλλο παιχνίδι). (ΠΘΜ I, Παρ. III §8)

Αν διαβάσει κανείς μεμονωμένα αυτές τις, εκ πρώτης όψεως απορριπτικές και ομολογουμένως κρυπτικές, αναφορές σε ένα επίτευγμα που συγκλόνισε¹²⁴ τον μαθηματικό και φιλοσοφικό κόσμο της εποχής εκείνης, είναι αδύνατον να καταλάβει γιατί ο Wittgenstein θεωρούσε υποχρέωσή του να το προσπεράσει. Ο λόγος είναι ότι εκείνο που προσδίδει νόημα σ' αυτές τις αδιαφανείς δηλώσεις είναι διάσπαρτο σε ολόκληρο το βιτγκενσταϊνικό corpus. Οι παρατηρήσεις αυτές είναι κατ' ουσίαν το συμπέρασμα ενός επιχειρήματος που αναπτύσσεται σε ολόκληρο το βιβλίο (τις ΠΘΜ). Γι' αυτό η απλή ανάγνωσή τους δεν παραπέμπει πουθενά.

Πριν προχωρήσουμε στην εξέταση των αντιρρήσεων του Wittgenstein, ας υπενθυμίσουμε συντομογραφικά —στο σύγχρονο ιδίωμα— τα δύο αυτά θεωρήματα:¹²⁵ (1) Υπάρχει πρόταση της γλώσσας της κατά Peano αριθμητικής τέτοια ώστε ούτε αυτή ούτε η άρνησή της είναι αποδείξιμες από τα αξιώματα του Peano. (2) Δεν μπορούμε ν' αποδείξουμε, στο πλαίσιο της κατά Peano αριθμητικής, μια πρόταση που (κατάλληλα αποκωδικοποιούμενη) εκφράζει τη συνέπεια της ίδιας της κατά Peano αριθμητικής.¹²⁶

Μια πολύ αδρομερής ανασυγκρότηση της απόδειξης του θεωρήματος (μέχρι του σημείου εκείνου στο οποίο αναφέρεται κυρίως η κριτική του Wittgenstein) θα είχε ως εξής: Ο Gödel

- (1) αριθμοδοτεί (αριθμοί Gödel) τις προτάσεις ενός φορμαλιστικού συστήματος τύπου PM (*Principia Mathematica*) και απεικονίζει (mapping) σε μια ένα προς ένα αντιστοίχιση τις προτάσεις του συστήματος αυτού σε προτάσεις της αριθμητικής (GN-λογισμός)·
- (2) κατασκευάζει μια πρόταση 'P', η οποία έχει προέλθει, ως καλώς σχηματισμένος τύπος [formula], από μετασχηματισμούς στο πλαίσιο του λογισμού PM·
- (3) συνάγει την '~ P' από την 'P' και αντιστρόφως, οπότε απόδειξη της 'P' (ή της '~ P') θα σήμαινε απόδειξη της αντίθετής της, δηλαδή αντίφαση.¹²⁷
- (4) θεωρεί ότι αν το PM είναι συνεπές (consistent), τότε το βήμα (3) είναι όντως παραγωγή μιας τυπικής αντίφασης (inconsistency), οπότε ο λογισμός PM δεν μπορεί να αποδείξει ούτε την 'P' ούτε την αντίθετή της, κι έτσι η 'P' ανακηρύσσεται «μη αποδείξιμη»·
- (5) υποστηρίζει (πάντοτε στο μεταμαθηματικό πνεύμα, αλλά και υπό το κράτος της υποφώσκουσας πλατωνιστικής του πεποίθησης ότι η αλήθεια είναι ανεξάρτητη λογισμών¹²⁸), ότι η «μη αποδείξιμη» 'P' —μέσω της ισομορφικής αντιστοιχίας που εξασφάλισε στο (1)— είναι και αληθής, δηλαδή και αληθής πρόταση P της αριθμητικής.

Οι αντιρρήσεις του Wittgenstein δεν αφορούν το βήμα (1), δεδομένου ότι η ένα προς ένα αντιστοίχιση των εκφράσεων ενός λογισμού με ένα αυθαίρετο σύνολο σημείων (εν προκειμένω, ένα υποσύνολο των ακεραίων) και ο αναδρομικός υπολογισμός από έναν αριθμό Gödel στην αντίστοιχη έκφραση του συστήματος PM δεν συνιστούν μεταμαθηματικά (υπό την ιεραρχική έννοια του όρου) και, επομένως, το βήμα δεν αφορά τη φιλοσοφία. Σ' αυτό το βήμα ο Gödel απλώς κατασκεύασε έναν νέο λογισμό δίπλα στον παλιό και θέσπισε ένα σύνολο κανόνων απεικόνισης εκφράσεων μεταξύ των δύο λογισμών. Ομοίως και για τα βήματα (2) ως (4).

Το βήμα (5), όμως, δεν είναι εξίσου 'αθώο': Ο Gödel, βασιζόμενος στο γεγονός ότι το σύστημα PM αποτελείται ουσιαστικά από (κωδικοποιημένες) μεταμαθηματικές δηλώσεις, ερμηνεύει (διαβάζει) και την 'P' ως μεταμαθηματική δήλωση (λ.χ. στον πρόλογο της εργασίας του). Και η P είναι έτσι κατασκευασμένη, ώστε να «αυτοαναφέρεται». Λέει, δηλαδή: «Η 'P' δεν είναι αποδείξιμη». Είναι λοιπόν ορθή, οπότε, μεταμαθηματικώς, η ιδιότητα του αληθούς μεταβιβάζεται από την πρόταση του λογισμού PM στην αντίστοιχη αριθμητική σχέση. Οπότε, ο Gödel φαίνεται να απέδειξε ότι βρήκε μια πρόταση ενός συστήματος τέτοια ώστε ούτε αυτή ούτε η αντίθετή της αποδεικνύονται από το σύστημα και η πρόταση αυτή είναι, παρά ταύτα, *αληθής*.

Αλλά, σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω για τους μεταλογισμούς τύπου Hilbert ή Russell, η εισαγωγή μεταμαθηματικών δηλώσεων στο στάδιο αυτό είναι μια χίμαιρα. Οι δηλώσεις αυτές δεν είναι τίποτε άλλο από αναδιατύπωση των εκφράσεων του αρχικού λογισμού σε μια νέα σημειογραφία ή κατασκευή ενός νέου λογισμού ο οποίος *παράγεται* στον παλιό. Σε καμία από αυτές τις δύο περιπτώσεις οι νέες εκφράσεις δεν είναι *περί* των εκφράσεων του αρχικού λογισμού.

Ο Gödel πίστευε ότι η απεικόνιση (mapping) των εκφράσεων του λογισμού PM στον GN-λογισμό αντανακλούσε (mirroring) και τις *λογικές* σχέσεις μεταξύ των εκφράσεων του PM· οπότε, εξετάζοντας τις ίδιες τις αριθμητικές σχέσεις του GN-λογισμού, θα 'διάβαζε', τρόπον τινά, μεταμαθηματικές δηλώσεις περί των εκφράσεων του PM. Αλλά, όπως τόνιζε ο Wittgenstein, δεν μπορείς να βγεις από ένα σύστημα χωρίς να υπερβείς τα όρια του νοήματος που θεσπίζονται από αυτό το σύστημα: «Δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω τη γλώσσα για να βγω έξω από τη γλώσσα» (ΦΠ I §6/113, πρβλ. ΦΓ 283-4). Το αίτημα του Gödel να μεταχειριστούμε μια καθαρά αριθμητική σχέση (αναγκαίως αληθή) ως μεταμαθηματική δήλωση, ως δήλωση *περί* τινος (ενδεχομένως αληθή), προδίδει την αμφίβολη εικόνα που είχε για την αλήθεια των μεταμαθηματικών δηλώσεων — ασφαλώς ένα κακό κληροδότημα του Hilbert. Μια δήλωση δεν μπορεί να είναι ταυτοχρόνως μαθηματική και εμπειρική. Δεν μπορεί να είναι ταυτοχρόνως αναγκαία και να μιλάει για τον κόσμο. Αν αφαιρέσει κανείς το οιονεί εμπειρικό περίβλημα των δήθεν *μετα*-μαθηματικών δηλώσεων του Gödel, αυτό που απομένει είναι είτε προζαϊκές αναδιατυπώσεις των κανόνων του PM είτε κανόνες που δημιουργήθηκαν για τον συντονισμό των εκφράσεων μεταξύ PM και GN-λογισμού. Αλλά είναι ακριβώς αυτός ο υβριδικός χαρακτήρας των μεταμαθηματικών δηλώσεων που έδινε στον Gödel την εντύπωση ότι, μαζί με την

απεικόνιση, μπορούσε να εξασφαλίσει, τρόπον τινά, και την αντανάκλαση του *περιεχομένου* των εκφράσεων του λογισμού PM στον GN-λογισμό. Κι αυτό διακρίνεται καθαρά στον Πρόλογο του Gödel: η απόδειξη εξασφαλίζει ότι «Από την παρατήρηση ότι η $[R(q);q]$, [δηλαδή η P], λέει για τον εαυτό της ότι είναι αναπόδεικτη έπεται αμέσως ότι η $[R(q);q]$ είναι αληθής, διότι η $[R(q);q]$ είναι πράγματι αναπόδεικτη (αφού είναι μη αποκρίσιμη). Επομένως, η πρόταση που είναι μη αποκρίσιμη στο σύστημα PM είναι, παρ' όλ' αυτά, αποκρίσιμη μέσα από μεταμαθηματικούς συλλογισμούς».¹²⁹ Είναι εύκολο να διαφύγει της προσοχής του αναγνώστη ο ριζικός φιλοσοφικός ισχυρισμός που διατυπώνεται εδώ. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Shanker, «μέσα σ' αυτές τις λιγοστές κουβέντες δεν περιλαμβάνεται μονάχα μια νεκρολογία του προγράμματος Hilbert (και μαζί μ' αυτήν, μια συγκεκριμένη απολογία του πλατωνισμού)· επί τάπητος τίθεται το τί αντιλαμβανόμαστε ως λογικό χαρακτήρα των μαθηματικών προτάσεων: ως φύση της σχέσης μεταξύ μιας μαθηματικής πρότασης και της απόδειξής της».¹³⁰ Ένας αριθμητικός τύπος 'P' «αναπαριστά» τη μεταμαθηματική δήλωση «H 'P' είναι αναπόδεικτη». Μ' άλλα λόγια, η πρόταση $[R(q);q]$ αναπαριστά μέσα στον λογισμό τη μεταμαθηματική πρόταση «H P είναι αναπόδεικτη». Ή, όπως την περιγράφει ο Wittgenstein (ΠΘΜ Ι, Παρ. ΙΙΙ §8), «H P δεν είναι αποδείξιμη στο σύστημα του Russell». Και στην πρόζα του Gödel: «Επομένως, έχουμε μπροστά μας μια πρόταση η οποία λέει για τον εαυτό της ότι δεν είναι αποδείξιμη».¹³¹

Το βήμα, λοιπόν, στην απόδειξη που δημιουργεί τα σοβαρότερα φιλοσοφικά προβλήματα είναι το (5): εκείνο στο οποίο ο Gödel ισχυρίζεται ότι, για μεταμαθηματικούς λόγους, η P είναι αληθής, μολονότι είναι μη αποδείξιμη. Ή, αλλιώς, ότι η 'P', μολονότι μη αποκρίσιμη, είναι, ωστόσο, μια γνήσια μαθηματική πρόταση. Αν ο ισχυρισμός σ' αυτό το βήμα ήταν ορθός, τότε, αντίθετα με όσα ισχυριζόταν ο Wittgenstein: (α) η σχέση ανάμεσα σε μια μαθηματική πρόταση και την απόδειξή της θα ήταν εξωτερική και (β) ένα κρίσιμο φιλοσοφικό ζήτημα θα είχε διευθετηθεί με καθαρά μαθηματικά μέσα. Η δήλωση «H 'P' είναι αναπόδεικτη» είναι απλώς η μεταμαθηματική αντανάκλαση της ίδιας της 'P' μέσα στον λογισμό. Και αν η αριθμητική πρόταση P είναι αληθής, αυτό μοιάζει να οφείλεται και στο γεγονός ότι έχει απεικονισθεί στη δήλωση «H 'P' είναι αναπόδεικτη». Κοντολογίς, αν η 'P' έχει απεικονιστεί σε μιαν αληθή μεταμαθηματική δήλωση, τότε *πρέπει* να είναι και η ίδια αληθής. Αλλ' αυτό είναι ακριβώς το βήμα που ο Wittgenstein αμφισβητούσε· και το αμφισβητούμενο δεν ήταν η αλήθεια ή το ψεύδος της P, αλλά το κατά πόσον η P είναι *δήλωση* και η 'P' είναι *μαθηματική* πρόταση. Ο Wittgenstein ήθελε να ισχυριστεί ότι δεν μπορούμε να αντλήσουμε οποιεσδήποτε φιλοσοφικές συνέπειες από αυτή την τυπική γκεντελιανή παραλλαγή του *Ψευδομένου*, διότι, απλούστατα, συνιστά ασυναρτησία να ισχυριζόμαστε ότι «H P είναι και αναπόδεικτη και αληθής».

Εφόσον, τώρα, οι αντιρρήσεις του Wittgenstein προβάλλονται σ' αυτό το στάδιο της απόδειξης, δεν υπάρχει λόγος να εξετασθούν τα τελικά βήματα (το συμπέρασμα ότι, αφού η 'P' είναι αναπόδεικτη και αληθής, το σύστημα PM είναι, κατ' ουσίαν,

μη πλήρες). Διότι, αν η κριτική του Wittgenstein είναι επιτυχής, κανένα από αυτά τα βήματα δεν μπορεί να ξεκινήσει.¹³²

Πάντως, η υποδοχή που ο φιλοσοφικός κόσμος επεφύλαξε στην απόδειξη του Gödel είχε να κάνει κυρίως με την υποτιθέμενη καταλυτική της επίδραση στο θεμελιωτικό πρόγραμμα του Hilbert.¹³³ Ένα κομμάτι μαθηματικών έθετε τέρμα σε ένα φιλοσοφικό ζήτημα: Η θεμελίωση των μαθηματικών σε ένα μετασύστημα είναι αδύνατη. Ο Wittgenstein, όπως είδαμε, συμφωνεί επ' αυτού. Γιατί λοιπόν προτίμησε να αντισταχθεί στον Gödel, αντί να ενώσει τις δυνάμεις του μ' αυτόν εναντίον του κοινού εχθρού; Και πώς θα πρέπει να εξηγηθεί το γεγονός ότι, οκτώ χρόνια μετά την ανακοίνωση του θεωρήματος του Gödel και την καταδίκη του προγράμματος Hilbert, ο Wittgenstein εξακολουθούσε να επιχειρηματολογεί κατά του Hilbert;

Το ότι το θεώρημα του Gödel έχει καταστροφικές επιπτώσεις στο πρόγραμμα Hilbert δεν κάνει τον Gödel σύμμαχο του Wittgenstein. Ο 'εχθρός' του ενός είναι διαφορετικός από τον 'εχθρό' του άλλου. Και η διαφωνία Gödel/Hilbert, διαφορετική από τη διαφωνία Wittgenstein/Hilbert. Από τη σκοπιά του Wittgenstein, τόσο ο Hilbert όσο και ο Gödel υποκινούνται από τις ίδιες πλάνες: (α) ότι τα μαθηματικά χρειάζονται θεμελίωση και (β) ότι ένας (δήθεν μεταμαθηματικός, αλλά, στην πραγματικότητα) μαθηματικός λογισμός μπορεί ν' αποφασίσει για τη δυνατότητα θεμελίωσης των μαθηματικών. Αυτή τη βασική προκείμενη ο Gödel δεν την απορρίπτει. Γι' αυτόν, το πλαίσιο του προγράμματος Hilbert έχει νόημα: το σκεπτικιστικό δίλημμα¹³⁴ του Hilbert είναι αδιαμφισβήτητο και, μάλιστα, πειστικό. Η διαφωνία του αφορά την προτεινόμενη λύση: Με δεδομένες τις μαθηματικές παραμέτρους του ζητήματος, όπως αυτές τίθενται από τον Hilbert, είναι αδύνατον να κατασκευασθεί μια πεπερασμένη απόδειξη συνεπειάς, όπως εκείνος τη φανταζόταν.¹³⁵ Ή, αλλιώς, ο σκοπός του Hilbert δεν επιτυγχάνεται με χιλμπερτιανούς όρους.

Αν η βασική ιδέα που τροφοδοτεί το πρόγραμμα Hilbert — η δυνατότητα των μεταμαθηματικών — δεν ευσταθεί, τότε το πρόγραμμα πρέπει να σταματήσει πριν καν αρχίσει. Η κριτική του Wittgenstein προηγείται κατά ένα κρίσιμο βήμα εκείνης του Gödel, στο μέτρο που ο δεύτερος εντοπίζει προβλήματα στο οικοδόμημα και όχι στο θεμέλιό του. Για τον Wittgenstein, το πρόγραμμα Hilbert τροφοδοτείται από μια σκεπτικιστική έγνοια, που είναι εξ υπαρχής ανυπόστατη:

Η κατάσταση στην οποία έχουμε περιέλθει, όσον αφορά τα παράδοξα, έχει γίνει ανυπόφορη. Σκεφθείτε μονάχα ότι στα μαθηματικά, το υπόδειγμα της αξιοπιστίας και της αλήθειας, οι ίδιες οι έννοιες και οι συμπερασμοί, έτσι όπως τα μαθαίνουμε και τα διδάσκουμε, οδηγούν σε παραλογισμούς. Και πού αλλού θα βρούμε την αξιοπιστία και την αλήθεια, αν η μαθηματική σκέψη χρεοκοπήσει; (Hilbert 1925: 375/222)

Το πρόβλημα είναι κίβδηλο — συνεπώς και οι απαντήσεις σ' αυτό:

Μπορείς να ρωτάς από μια σκοπιά που καθιστά το ερώτημα δυνατό· που καθιστά την αμφιβολία δυνατή [...] Δεν μπορείς να ρωτάς για το πρώτο δεδομένο, για εκείνο που καθιστά δυνατό κάθε ερώτημα. Ούτε για εκείνο το αρχικό, που θεμελιώνει το σύστημα. (ΦΠ 278-9)

Αν δεν μπορείς να ψάξεις, δεν μπορείς ούτε να ρωτάς· κι αυτό σημαίνει: Αν δεν υπάρχει λογική μέθοδος αναζήτησης, τότε και το ερώτημα δεν έχει νόημα. (ΦΠ §149)

Δεν μπορείς να *ανασκευάσεις* μια ανοησία. Το μόνο που μπορείς να κάνεις είναι να αποκαλύψεις την πηγή της σύγχυσης· και τότε το πρόβλημα θα πάψει να υφίσταται. Το ότι η απόδειξη του Gödel θέτει τέλος στο πρόγραμμα Hilbert είναι κάτι διανοητό. Ένα ‘κομμάτι μαθηματικών’ *μπορεί* να αντιταχθεί νοηματικά σε ένα άλλο κομμάτι μαθηματικών. Όχι όμως και στα *φιλοσοφικά* του παρελκόμενα.¹³⁶ Μαθηματικά και φιλοσοφία δεν αναμειγνύονται· συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να λύσεις, με μαθηματικό τρόπο, φιλοσοφικά προβλήματα. «Κανένας λογισμός δεν μπορεί να απαντήσει σε ένα φιλοσοφικό πρόβλημα» (ΦΓ 312). Όσο αξιόλογο και νά ‘ναι ένα επίτευγμα στον χώρο των μαθηματικών, δεν μπορεί στο ελάχιστο να επηρεάσει τη φιλοσοφία — και αντιστρόφως. Και η προτροπή του Wittgenstein να παρακάμψουμε την απόδειξη του Gödel αφορά όσους συγχέουν τη μαθηματική με τη φιλοσοφική αξία — «το υπόρρημα» — της απόδειξης του Gödel.¹³⁷ Οι *φιλοσοφικές* συνέπειές της, αυτό είναι που ο Wittgenstein διαμφισβητεί: «Τα μαθηματικά δεν μπορούν να λύσουν το είδος των προβλημάτων που *εμάς* ταλαιπωρούμε» (ΠΘΜ VII §22.6). Αν η απόδειξη του Gödel συνιστά σπουδαία συνεισφορά στα *μαθηματικά*, ο Wittgenstein θα ήταν ο τελευταίος που θα ήγειρε αντιρρήσεις.¹³⁸

Αν πάλι το θεώρημα έχει οποιαδήποτε σημασία για τη *φιλοσοφία* των μαθηματικών, αυτή έγκειται στο γεγονός ότι αποτελεί όχι *αναίρεση*, αλλά *μιαν εις άτοπον απαγωγή* της θέσης ότι τα φιλοσοφικά προβλήματα μπορούν να λυθούν μαθηματικά. Ενώ οι πλατωνιστές εξακολουθούν να βλέπουν το θεώρημα του Gödel σαν ένα νέο είδος μεταβατικής κατασκευής, είναι σαφές ότι ο Wittgenstein το έβλεπε ως μια *τελειωτική* απόδειξη του αδυνάτου, κάτι που *έκλεινε* ένα κεφάλαιο στην ιστορία των μαθηματικών — υπαινισσόμενος ότι καμία απόδειξη του αδυνάτου στην ιστορία των μαθηματικών δεν θεωρήθηκε ποτέ ότι είχε *φιλοσοφική* σημασία.¹³⁹ Απεναντίας, είναι χαρακτηριστικό ότι με το θέμα της σωστής ερμηνείας του θεωρήματος Gödel ασχολήθηκαν *φιλοσοφικά* και όχι μαθηματικά περιοδικά.¹⁴⁰ Το θεώρημα θεωρήθηκε ως μέσον επέκτασης της έννοιας των μεταμαθηματικών στη φιλοσοφία της γλώσσας. Οι λογικοί θετικιστές το άδραξαν ως το κλειδί για την ενίσχυση της σταυροφορίας τους εναντίον της μεταφυσικής· από τους σπόρους του γεννήθηκε η θεωρία της λογικής σύνταξης του Carnap· πάνω απ’ όλα, όμως, θεωρήθηκε ως μια από τις μεγάλες κινητήριες δυνάμεις πίσω από τη σύγχρονη μορφή του αναδυόμενου πλατωνισμού.¹⁴¹

*Περί απείρου*¹⁴²

Οι εκτεταμένες παρατηρήσεις του Wittgenstein για το άπειρο είναι στενά συνυφασμένες με την κριτική του της καντοριανής συνολοθεωρίας των υπερπεπερασμένων και του ορισμού του απειροσυνόλου από τον Dedekind.¹⁴³ Η αντίθεση του Wittgen-

stein με την υπερπεπερασμένη συνολοθεωρία δεν αφορούσε προφανώς τη μαθηματική συνέπεια της κατασκευής των υπερπεπερασμένων, στην οποία, ως φιλόσοφος, δεν είχε να αντιτάξει τίποτε, αλλά την πεποίθηση του Cantor ότι οι αριθμοί αυτοί αποτελούν χειροπιαστή απόδειξη της ύπαρξης του πραγματικού απείρου (ΦΠ 91-2, 237-9, 286-8). Στη ρίζα αυτής της πεποίθησης υπάρχει η πλανημένη εντύπωση ότι τάχα μπορούμε να μιλάμε για μια κλάση χωρίς να ξέρουμε αν αυτή είναι πεπερασμένη ή άπειρη και ότι αυτό το τελευταίο μπορούμε να το διαπιστώσουμε εκ των υστέρων. Αλλ' αυτό θα σήμαινε ότι ο άπειρος χαρακτήρας δεν ανήκει στην ουσία της κλάσης, ότι είναι κάτι ενδεχομενικό και ότι, επομένως, μπορώ να φανταστώ μια κλάση που είναι τη μια άπειρη, την άλλη πεπερασμένη (WWK 70, 102)· πράγμα παράλογο, γιατί βέβαια δεν μπορώ να φανταστώ την άπειρη σειρά των αριθμών ως πεπερασμένη· ο άπειρος χαρακτήρας της είναι ενσωματωμένος στον νόμο παραγωγής της (ΦΠ §§141-2).¹⁴⁴ Το σύμβολο «1, ξ, ξ+1» δηλώνει ότι μπορώ αενάως να κατασκευάζω πεπερασμένες σειρές αριθμών (ΦΠ §144). Συνεπώς, το άπειρο δεν είναι αριθμητικό (ΦΓ 471), ούτε ποσότητα (WWK 228) ούτε έκταση (ΦΠ §144) ούτε κάποιος τεράστιος αριθμός (ΦΓ 296-7, 461), *μεγαλύτερος* από οποιονδήποτε άλλο ή πιο κοντά σε ένα μεγάλο από ό,τι σε ένα μικρό αριθμό (ΦΠ §142). «Άπειρο» σημαίνει την *απεριόριστη δυνατότητα επανάληψης μιας πράξης* (WWK 213-7, 229, ΦΠ §§138-40, 186, σ. 402-5, ΦΓ 269).¹⁴⁵ Κοντολογίς, στα μαθηματικά δεν έχουμε *γενικότητα* (TLP 6.031, 6.1232), αλλά *επαγωγή* (ΦΠ §§129, 158, 166, 189, 202, 204, σ. 423).

Η σχέση της γενικής πρότασης προς την απόδειξή της είναι όπως η σχέση του σημείου προς το σημαινόμενο. Η πρόταση είναι το όνομα της επαγωγής. Την εκπροσωπεί· δεν απορρέει από αυτήν. (WWK 135, ΦΠ 424-5)

Η θεωρία των κλάσεων είναι εντελώς περιττή στα μαθηματικά. Αυτό συνδέεται με το γεγονός ότι η γενικότητα που χρειαζόμαστε στα μαθηματικά δεν είναι περιστασιακή γενικότητα (TLP 6.031). Η γενικότητα στα μαθηματικά είναι μια κατεύθυνση, ένα βέλος που δείχνει κατά μήκος της σειράς η οποία γεννάται από μια πράξη. (ΦΓ §142)

Κι αυτή η πράξη είναι η *επαγωγή*, η οποία εκπροσωπείται στο σύμβολο της άπειρης ακολουθίας των αριθμών «1, ξ, ξ+1». (WWK 82)

Η επαγωγή όμως δεν *μιλάει περί* γενικότητας. Απλώς τη *δείχνει*. Γι' αυτό κάθε προσπάθεια να τη βάλεις σε λόγια (βλ. Russell) αποτελεί ανοησία.

Μου φαίνεται πως τελικά δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη γενικότητα —«όλα» κλπ.— στα μαθηματικά. Δεν υπάρχουν «όλοι οι αριθμοί», επειδή ακριβώς υπάρχουν άπειροι· και επειδή εδώ δεν έχουμε να κάνουμε με το άμορφο «όλα», όπως στην πρόταση «Όλα τα μήλα είναι ώριμα», όπου το σύνολο δίνεται με μιαν εξωτερική περιγραφή, αλλά με την ολότητα των δομών, οι οποίες πρέπει ακριβώς να δίνονται ως δομές [...] Οι ποσοδείκτες δεν έχουν νόημα στους αριθμούς. Θέλω να πω: δεν μπορείς να πεις «(n)fn», διότι η έννοια «όλοι οι φυσικοί αριθμοί» δεν είναι οριοθετημένη. (ΦΠ §126)

Το ότι «Όλα τα δέντρα σ' αυτό το περιβόλι είναι ροδακινιές» είναι ένα ενδεχόμενο γεγονός· ενώ το ότι «Υπάρχουν άπειροι φυσικοί αριθμοί» είναι εσωτερικό γνώρισμα ενός *συστήματος*. Αν, στην πρώτη περίπτωση, μιλήσεις για κλάση, εννοείς μιαν *ολότητα*, ενώ, στη δεύτερη περίπτωση, ο όρος «κλάση» αναφέρεται σε μιαν ακολουθία που διέπεται από έναν ορισμένο κανόνα, ή, αλλιώς, στη *δυνατότητα* να παράγεις αριθμούς *επ' άπειρον*, επαναλαμβάνοντας μια πράξη (WWK 213-7, 229, ΦΓ 269).

Δεν μπορείς να συγκρίνεις δύο «λογικές μορφές» (ή «γραμματικές δομές»). Δεν μπορείς να πεις ότι ένας *νόμος* είναι «μεγαλύτερος» από μιαν *ολότητα*. Κι όμως, αυτό ακριβώς είναι το είδος του λάθους που διαστίζει την υπερπεπερασμένη συνολοθεωρία του Cantor, κυρίως εκεί όπου, αμυνόμενος στην επίθεση του Kronecker, προσπαθεί να αποδείξει ότι οι υπερπεπερασμένοι του αριθμοί βρίσκονται οντολογικώς επί του αυτού επιπέδου με τους φυσικούς· ότι, ουσιαστικά, αποτελούν «προέκταση των φυσικών αριθμών». Για να πετύχει αυτό το πράγμα, πίστευε ότι αρκούσε να δείξει πως η σχέση «μεγαλύτερος από» εφαρμόζεται τόσο κατά τη σύγκριση του συνόλου των υπερπεπερασμένων με εκείνο των φυσικών όσο και κατά τη σύγκριση των υπερπεπερασμένων αριθμών μεταξύ τους. Στην προσπάθειά του αυτή ο Cantor χρησιμοποιεί τη σχέση «μεγαλύτερος από» με χίλιους-δυο διαφορετικούς τρόπους, νομίζοντας ότι το νόημα του συμβόλου «>» διατηρείται αναλλοίωτο.¹⁴⁶ Αλλά η έννοια υπό την οποία $2\aleph_0 > \aleph_0$ δεν είναι ασφαλώς εκείνη υπό την οποία $2 > 1$. Ούτε ο $\aleph_0$ είναι μεγαλύτερος από τον μεγαλύτερο φυσικό *με τον τρόπο* που ο 2 είναι μεγαλύτερος του 1.¹⁴⁷ Το να δέχεσαι κάτι τέτοιο σημαίνει ότι θέτεις ως προϋπόθεση το αποδεδειγμένο. Διότι αυτό που ο Cantor πίστευε ότι πέτυχε με την ανακάλυψη των υπερπεπερασμένων, δηλαδή την επέκταση της επικράτειας των φυσικών, εμπεριέχεται ήδη στην ενιαία εφαρμογή της σχέσης «>» στα δύο πεδία. Κι αυτή η ιδέα έρχεται βεβαίως σε κατά μέτωπον σύγκρουση με την ιδέα του Wittgenstein περί αυτονομίας της γραμματικής. Μια πράξη σύγκρισης, όπως η «>», είναι διανοητή μόνο μέσα στο πλαίσιο ενός λογισμού, όχι *μεταξύ* λογισμών, ούτε *μεταξύ* μελών διαφορετικών λογισμών. Είναι παραπλανητικό να λες ότι $3 = 3/1$ ή $+3 > 1$.¹⁴⁸ Και, παρά το γεγονός ότι φαίνεται να υπάρχει παραλληλία ανάμεσα στο σύστημα των πραγματικών και το σύστημα των ακεραίων (επειδή, φέρ' ειπείν, η εξακολουθητική πρόσθεση της μονάδας δίνει αντίστοιχα βήματα και στα δύο συστήματα: $+1, +2, +3$, κλπ./ $1, 2, 3$, κλπ.), ωστόσο η παραλληλία αυτή δεν υφίσταται σε όλο το εύρος των δύο συστημάτων (λ.χ., στο σύστημα των ακεραίων δεν υπάρχει αντίστοιχο της πράξης $-2+2$)· και επειδή η ταυτότητα ενός αριθμού είναι το *σύνολο* των κανόνων που ισχύουν γι' αυτόν, αποτελεί πλάνη να δεχόμαστε την παράσταση « $3/1 = 3$ » ως δήλωση *ταυτότητας*.

Στο κάτω-κάτω, οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι ίδιοι με τους θετικούς ακεραίους, έτσι ώστε να μπορούμε να μιλάμε για *συν* δύο στρατιώτες, όπως μιλάμε για δύο στρατιώτες· όχι, εδώ έχουμε να κάνουμε με κάτι εντελώς νέο [...] Στην πραγματικότητα, μεταφερθήκαμε σε ένα νέο σύστημα που δεν περιλαμβάνει το παλιό, περιέχει όμως ένα μέρος που έχει ακριβώς την ίδια δομή με το παλιό.¹⁴⁹ (WWK 35-6)

Το να μιλάς για ‘σκοτεινότητα’ των φθόγγων δεν σε μεταφέρει στον οπτικό χώρο. Σημαίνει απλώς ότι στον ακουστικό χώρο έχεις παραδεχθεί ένα δίπολο, που αντιστοιχεί στο «φωτεινό/σκοτεινό» του οπτικού χώρου. Η αντιστοίχιση αυτή στηρίζεται πολλές φορές σε ψυχολογικής φύσεως συνειρμούς ή πρακτικές σκοπιμότητες και δεν είναι λιγότερο αυθαίρετη από την αντιστοίχιση δικαστικών πράξεων και γραμμών που σύρω στις σελίδες ενός ημερολογίου (ΦΠ §112). Αλλά δεν εξομοιώνει τους ήχους με τα χρώματα ούτε τα καθιστά συγκρίσιμα μεταξύ τους. Αν η δήλωση «Το ω είναι πιο σκούρο απ’ το κίτρινο» ηχεί παράλογη, τότε και η « $+3>1$ » όφειλε να ηχεί παράλογη.

Στον ίδιον άξονα κινείται και η κριτική του για τον ορισμό του απειροσυνόλου από τον Dedekind:¹⁵⁰

Η σχέση $m=2n$ συνδέει την κλάση όλων των αριθμών με μιαν υποκλάση της; Όχι [...] Περιέχει τη δυνατότητα σύνδεσης κάθε αριθμού με κάποιον άλλο, δεν συνδέει όμως όλους τους αριθμούς με άλλους [...]. Η προκατάληψη ότι τάχα η σχέση $m=2n$ συνδέει μια κλάση με την υποκλάση της οφείλεται και πάλι στην αμφισημία της γραμματικής [... Εδώ] τα πάντα εξαρτώνται από τη λογική σύνταξη της πραγματικότητας και της δυνατότητας [...] Η $m=2n$ δείχνει κατά μήκος της σειράς των αριθμών και η έκφραση «επ’ άπειρον» που προσθέτουμε δεν σημαίνει άλλο απ’ το ότι δεν δείχνει κάποιο αντικείμενο σε συγκεκριμένη απόσταση. (ΦΠ 234-5, δεξ ακόμη §§130, 141, 171, σημ. 90, 107 και ΦΓ 471)

Ακολουθώντας έναν κανόνα¹⁵¹

Συνυφασμένη με τις έννοιες της απόδειξης και του υπολογισμού είναι, όπως ελπίζω να φάνηκε από τα προηγούμενα, η έννοια της συμμόρφωσης προς έναν κανόνα. Οι ΠΘΜ περιέχουν τα τελικά στάδια της περιπετειώδους εξέλιξης της κεντρικής αυτής ιδέας της βιτγκενσταϊνικής διδασκαλίας από την εποχή της «στροφής» και μετά¹⁵². Ένα από τα βασικά προβλήματα που απησχόλησαν τον Wittgenstein ήταν η διάκριση ανάμεσα στο ν’ ακολουθείς έναν κανόνα και στο να δρας απλώς σε συμφωνία με αυτόν.¹⁵³ Μπορώ να κατασκευάσω ένα κανονικό πεντάγωνο στο πλαίσιο της γεωμετρίας, αλλά μπορεί και να ‘πέσω’ πάνω του, δοκιμάζοντας διάφορα σχήματα. Είναι προφανές ότι μόνο στην πρώτη περίπτωση ακολούθησα έναν κανόνα και αυτή είναι η περίπτωση που ενδιαφέρει τα μαθηματικά. Γύρω στα 1930, ο Wittgenstein έτεινε προς την ιδέα ότι η ακολουθία ενός κανόνα πρέπει να περιέχει κάτι *περισσότερο* απ’ την απλή σύμπτωση των ενεργειών. Και προσπάθησε να εντοπίσει αυτό το ‘κάτι’. Η διαφορά που διαπίστωσε ήταν ότι η τυχαία ανεύρεση του σωστού αποτελέσματος είναι κάτι εντελώς εξωτερικό ως προς την πράξη, ενώ, όταν ακολουθείς έναν κανόνα, ο κανόνας δεν είναι τυχαίο στοιχείο, σχετιζόμενο *εξωτερικά* με την πράξη, μέρος της *ιστορίας* της πράξης, αλλά στοιχείο του *ορισμού* της. Ο κανόνας προσδιορίζει το είδος της πράξης ή, αλλιώς, ο κανόνας συνδέεται *εσωτερικά* με την πράξη. Και πώς γνωρίζουμε ότι μια πράξη είναι όντως εσωτερικά συνηρητημένη με έναν κανόνα; Η απάντηση του Wittgenstein είναι: όταν η πράξη πηγάζει από την *κατανόηση* του κανόνα:

[...] Αν δεν καταλαβαίνω την κατασκευή, για μένα δεν είναι καν κατασκευή πενταγώνου [...] Σίγουρα μπορώ να γράψω κατά τύχην τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης· δεν μπορώ όμως να την *καταλάβω* κατά τύχην. Διότι σ' εκείνο που καταλαβαίνω έχει εξαφανισθεί ο τρόπος με τον οποίο έφτασα εκεί. [...] Το τυχαίο μπορεί να αναφέρεται πάντοτε σε κάτι εξωτερικό, όπως, λ.χ., όταν λέμε 'το ανακάλυψα αφού είχα πει δυνατό καφέ'. Ο καφές δεν περιέχεται πια σ' αυτό που ανακάλυψα. (ΦΠ §157)

Και σε τί έγκειται η κατανόηση ενός κανόνα; Έγκειται στη σύλληψη της *εσωτερικής σχέσης* του κανόνα με το πεδίο των δυνατών εφαρμογών του (πρβλ. WLC 1930-1932: 56-7). Μ' άλλα λόγια, για τον Wittgenstein του 1931, η ακολουθία ενός κανόνα εξαρτάται από μια πράξη *ενόρασης*: της αναγνώρισης ότι η εν λόγω πράξη ανήκει στο πεδίο εφαρμογής του κανόνα. Αλλά δεν είναι διανοητό να βλέπω μιαν εσωτερική σχέση ανάμεσα στον κανόνα και την πράξη, κι ωστόσο να μην υπάρχει καμία; Το να είμαι, λοιπόν, σε θέση να βλέπω την εσωτερική σχέση δεν μου παρέχει την απαραίτητη αντικειμενικότητα. Ήδη, το 1932, ο Wittgenstein αναγνωρίζει ότι «μπλέκουμε σε δυσκολίες αν πιστεύουμε ότι ακολουθούμε έναν κανόνα. Πρέπει να εξετάσουμε κατά πόσον *πράγματι* τον ακολουθούμε» (WLC 1932-35: 32). Σε μια μεταγενέστερη προσθήκη στην §149 των ΦΠ γράφει: «Πράξη *απόφασης*· όχι *ενόρασης*». Αν είναι έτσι, κάθε πράξη που τελείται κατ' ακολουθίαν ενός κανόνα είναι μια *βουλητική* πράξη. Μ' άλλα λόγια, δεν αναγνωρίζουμε νοητικά ότι ο κανόνας εφαρμόστηκε σ' αυτή την πράξη, αλλά *αποφασίζουμε* να εφαρμόσουμε τον κανόνα σ' αυτή την περίπτωση. Αλλ' αυτή η εκδοχή κάνει τα πράγματα χειρότερα, διότι, όχι απλώς δεν επιτυγχάνει τη διάκριση ανάμεσα στο «ακολουθώ έναν κανόνα» και στο «νομίζω ότι ακολουθώ έναν κανόνα», αλλά, αντίθετα, την *αποκλείει*. Διότι αν η εφαρμογή ενός κανόνα εξαρτάται τελικά από την απλή απόφαση του πράττοντος, η ακολουθία ενός κανόνα γίνεται κάτι εντελώς υποκειμενικό και αυθαίρετο. Συχνά ο Wittgenstein αναφέρεται στην απόφαση σχετικά με τη *θέσπιση* των κανόνων, όχι όμως εν αναφορά προς την *εφαρμογή* τους. «Οι γραμματικοί κανόνες είναι αυθαίρετοι· όχι όμως και η εφαρμογή τους» (WLC 1930-32: 58). Πώς θα πρέπει λοιπόν να εξηγήσει κανείς εκείνη την παράξενη προσθήκη στις ΦΠ; Μια ευμενής ερμηνεία θα ήταν ότι η απόφαση του πράττοντος δεν αναφέρεται στο κατά πόσον ένας κανόνας έχει εφαρμογή στη συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά μάλλον στο ότι

ο πράττων αποφασίζει να υποτάξει τη βούλησή του στα κανονιστικά πρότυπα εφαρμογής του κανόνα. Μ' άλλα λόγια, ο ισχυρισμός του Wittgenstein ότι οι πράξεις κατ' ακολουθίαν ενός κανόνα προέρχονται από βουλητικές πράξεις θα πρέπει να ερμηνευτεί ως ο ισχυρισμός ότι η ακολουθία ενός κανόνα απαιτεί την κατάλληλη *πρόθεση*.¹⁵⁴

Όπως το θέτουν οι Baker και Hacker: για ν' ακολουθείς έναν κανόνα, «πρέπει να καταλαβαίνεις τί ο κανόνας απαιτεί (επιτρέπει κλπ.) και να *προτίθεται* να πράξεις συμμορφούμενος μ' αυτόν».¹⁵⁵

Ωστόσο, την ίδια περίπου εποχή, ο Wittgenstein θ' αρνηθεί ότι το κατά πόσον κάποιος ακολουθεί έναν κανόνα μπορεί ν' αποφασιστεί επί τη βάσει «νοητικών κα-

ταστάσεων» του πράττοντος (LWC 1932-35: 49). Στη ΦΓ και στο MB προσεγγίζει την ιδέα ότι η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα σε ακολουθία και απλή συμφωνία πρέπει να είναι κάτι *δημοσίως ελέγξιμο*, όπως μια πρακτική ικανότητα ή δεξιότητα έκδηλη στην πραγματική χρήση: κάτι που ο πράττων κάνει πριν ή μετά την πράξη. Αλλά, την ίδια εποχή, απορρίπτει την εκδοχή ότι η ειδοποιός διαφορά έγκειται σε συμπεριφορικές κανονικότητες του πράττοντος, θεωρώντας τις ως *ανεπαρκή* συνθήκη για την απόφαση κατά πόσον έχουμε πράγματι να κάνουμε με ακολουθία ενός κανόνα — υπό την πίεση, ασφαλώς, της απαίτησης για ύπαρξη *εσωτερικής* σχέσης μεταξύ κανόνα και πράξης. Ότι «ανήκει στην ιστορία» είναι εμπειρικό, ενδεχόμενο, άρα συνδεόμενο *εξωτερικά* με την πράξη (ΦΓ §§3, 39, 43, MB 40). Και ο κανόνας πρέπει να είναι ρητώς (explicitly) εμπλεκόμενος σ' αυτήν: «Ας υποθέσουμε όμως ότι, για να πάρω τ' αποτελέσματά μου, έγραψα αυτό που θα λέγαμε 'κανόνα τετραγωνισμού', ας πούμε, αλγεβρικά. Σ' αυτή την περίπτωση, ο κανόνας αυτός εμπλέκεται στη διαδικασία υπό μια έννοια που κανένας άλλος δεν το έκανε» (MB 39). Ακολουθία ενός κανόνα έχουμε όταν οι παίκτες «χρησιμοποιούν τους κανόνες, με το να τους συμβουλευόνται κάθε τόσο, για να δουν τί πρέπει να κάνουν. Εδώ, ο κανόνας υπεισέρχεται στην ίδια τη διεξαγωγή του παιχνιδιού και η σχέση του με αυτήν δεν είναι εκείνη της υπόθεσης με την επιβεβαίωσή της» (ΦΓ §43). Αλλά η ρητή εμπλοκή του κανόνα στην πράξη περιορίζει φοβερά την ισχύ του ορισμού. Ο ίδιος ο Wittgenstein παραδέχεται ότι «τα πρωτόγονα παιχνίδια μπορούν να παίζονται δίχως να έχουν καταγραφεί οι κανόνες τους, καμιά φορά μάλιστα δίχως να έχει διατυπωθεί ο παραμικρός κανόνας» (ΦΓ §26/92, πρβλ. MB 54). Επιπλέον, «στις περισσότερες περιπτώσεις εκτέλεσης υπολογισμών, δεν συμβουλευόμαστε ούτε διατυπώνουμε τους κανόνες ενός λογισμού, όπως ακριβώς οι ικανοί σκακιστές σπάνια αναφέρονται σε κανόνες του σκακιού όταν παίζουν».¹⁵⁶

Ο Wittgenstein απορρίπτει ως εξωτερική και τη διαδικασία εκμάθησης του κανόνα: «Η διδασκαλία, ως η υποθετική ιστορία των μετέπειτα πράξεών μας (κατανόησης, υπακοής, εκτίμησης ενός μήκους κλπ.), τίθεται εκτός συζήτησης» (MB 40). Μάλιστα, ονομάζει «κατηγορικό σφάλμα» την εξάρτηση της ακολουθίας ενός κανόνα από το ιστορικό εκμάθησης.¹⁵⁷ Και συνεχίζει λέγοντας ότι, σ' αυτή την περίπτωση, έχουμε να κάνουμε με «εννοιολογική σύγχυση ανάμεσα σε 'λόγο' και 'αιτία'» (ΦΓ §61/128, πρβλ. MB 41-2 και WLC 1932-1935: 28, VW 109-12). Μόνο αν ο κανόνας αναφέρεται ως ο *λόγος* για τον οποίο έπραξα κάτι, υπάρχει *κανονιστική* σχέση ανάμεσα στον κανόνα και την πράξη και, ως εκ τούτου, την *ορίζει*.¹⁵⁸ Αν ο κανόνας αποτελεί την αιτία της πράξης μου, τότε έχει *ενδεχομενική* σχέση μ' αυτήν. «Ο κανόνας που μάθαμε και που τώρα μας ωθεί να συμπεριφερόμαστε κατά τον άλφα ή βήτα τρόπο δεν παρουσιάζει για μας κανένα ενδιαφέρον, ενόσω τον βλέπουμε ως την αιτία, την προϊστορία των πράξεών μας» (ΦΓ §43/113). «Ο τρόπος με τον οποίο μάθαμε τη γλώσσα δεν περιέχεται στη χρήση της. (Όπως ακριβώς το αίτιο δεν περιέχεται στο αποτέλεσμα)» (ΦΓ §39). «'Η σύνδεση ανάμεσα στις λέξεις και τα πράγματα τα ιδρύεται με τη διδασκαλία της γλώσσας'. Τί είδους σύνδεση είναι αυτή; Μια μη-

χανική, ηλεκτρική, ψυχολογική σύνδεση μπορεί να λειτουργεί ή να μη λειτουργεί. *Μηχανισμός και λογισμός*» (ΦΓ §56)· «Υποθέσεις γύρω απ' την εκμάθηση και χρήση της γλώσσας ή αιτιώδεις συσχετίσεις ποσώς μας ενδιαφέρουν» (ΦΓ §74/143).

Χαρακτηριστικό γνώρισμα της σκέψης του Wittgenstein την περίοδο αυτή είναι η επιμονή του ότι η θεώρηση της ακολουθίας ενός κανόνα πρέπει να γίνεται με φόντο τί *μπορεί* να γίνει στο γραμματικό πλαίσιο ή τον λογισμό των κανόνων — με φόντο τις λογικές *δυνατότητες* εφαρμογής του κανόνα. Γρήγορα όμως κατάλαβε ότι η εσωτερική σχέση ανάμεσα σε μια συγκεκριμένη πράξη και το πεδίο των γραμματικών δυνατοτήτων ήταν πολύ δυσκολότερα εντοπίσιμη απ' ό,τι αρχικά είχε φανταστεί. Ό,τι μέχρι τότε είχε αποπειραθεί να προσφέρει ως κριτήρια γι' αυτή την εσωτερική σχέση (ενόραση, απόφαση, ρητή διατύπωση του κανόνα κλπ.) είτε δεν είχαν την απαιτούμενη αντικειμενικότητα είτε ίσχυαν για περιορισμένο πεδίο εφαρμογών. Η αποφασιστική στροφή στην όλη πραγμάτευση του θέματος ήταν η σύνδεση της εφαρμοσιμότητας ενός κανόνα με την πραγματική (actual) του χρήση. Αντί να στηρίζει το τί συμβαίνει στη δυνατότητα, αντέστρεψε το σχήμα, εδράζοντας τη δυνατότητα στο τί *πραγματικά* συμβαίνει.¹⁵⁹ Αλλά η πραγματική χρήση δεν έχει την παγιότητα ενός πεδίου λογικών δυνατοτήτων. Στη ΦΓ δηλώνει ότι αντιπαράθεται στην κυμαινόμενη πραγματικότητα ένα σύστημα σταθερών κανόνων, επειδή η μεταβαλλόμενη πραγματικότητα δεν μπορεί να παράσχει πρότυπα ορθότητας.

Όταν παρατηρούμε την πραγματική χρήση μιας λέξης, βλέπουμε κάτι κυμαινόμενο. Στις θεωρήσεις μας αντιπαράθετουμε σ' αυτό το κυμαινόμενο πράγμα κάτι σταθερότερο, όπως ο ζωγράφος που απεικονίζει στατικά την αενάως μεταβαλλόμενη όψη ενός τοπίου. Θεωρούμε τη γλώσσα *μέσα απ' το πρίσμα* ενός παιχνιδιού που παίζεται με σταθερούς κανόνες. Την παρομοιάζουμε μ' αυτό το παιχνίδι, τη μετρούμε μ' αυτό. Όταν θέλουμε, για τους σκοπούς μας, να υποτάξουμε τη χρήση μιας λέξης σε καθορισμένους κανόνες, βάζουμε δίπλα στην κυμαινόμενη χρήση της μιαν άλλη, εκφράζοντας σε κανόνες μια χαρακτηριστική άποψη της πρώτης. (ΦΓ §36, πρβλ. MB 54)

Στο MB όμως καταθέτει τους ενδοιασμούς του γι' αυτού του είδους τις εξιδανικεύσεις: «Το να θεωρείς ότι η γλώσσα είναι ένας λογισμός που βαδίζει σύμφωνα με ακριβείς κανόνες [...] συνιστά μια πολύ μονόπλευρη θεώρηση της γλώσσας», διότι «εν γένει, δεν χρησιμοποιούμε τη γλώσσα σύμφωνα με αυστηρούς κανόνες» (MB 54). Η αναγνώριση αυτού του γεγονότος συμπίπτει με την εισαγωγή της έννοιας των «γλωσσικών παιχνιδιών» εις αντικατάστασιν του στατικού προτύπου του «λογισμού».¹⁶⁰ Το γλωσσικό παιχνίδι δεν είναι μια αυστηρά οροθετημένη περιοχή της γλώσσας, περιγράψιμη από ένα σύστημα κανόνων. «Μπαίνουμε στον πειρασμό να φανταζόμαστε έναν λογισμό ως, τρόπον τινά, το *πάγιο υπόστρωμα* κάθε πρότασης που εκφέρουμε» (MB 74).¹⁶¹ Το MB μάς εφιστά την προσοχή στο τί *δεν* είναι η γλώσσα, προσπαθεί να μας προστατεύσει από υπεραπλουστεύσεις, αλλά δεν κάνει καμία υπόδειξη για το πού θα πρέπει να αναζητηθεί η κανονιστικότητα των πρωτόγωνων χρήσεων της γλώσσας μας (μια και για τις πιο εξελιγμένες χρήσεις, όπως

στα μαθηματικά, υπάρχουν ρητώς διατυπωμένοι κανόνες). Στο KB ο Wittgenstein αναλαμβάνει τη διασάφηση της κανονιστικότητας γλωσσικών δραστηριοτήτων όλων των ειδών, από τις πιο απλές, όπως το να φέρνεις αντικείμενα και να φωνάζεις ονόματα (KB 124-5) μέχρι τις πιο περίπλοκες, όπως το να υπολογίζεις βάσει του τύπου ' $a_n = n^2 + n - 1$ ' (KB 160). Σε όλα τα παραδείγματα γλωσσικών παιχνιδιών υπογραμμίζει το γεγονός ότι μια κανονιστική δραστηριότητα προϋποθέτει ορισμένο χαρακτηριστικό περιβάλλον, ένα δεδομένο 'φόντο'¹⁶². Κι αυτό το 'φόντο' δεν είναι κάποιος αυτόνομος λογισμός κανόνων με τις δυνατές τους εφαρμογές, αλλά οι πραγματικές μας *πρακτικές* χρήσης.¹⁶³ Δεν μπορούμε ν' αποσπάσουμε το παιχνίδι από το υπόστρωμα πάνω στο οποίο όντως παίζεται, διότι μόνο χάρη σ' αυτό το υπόστρωμα μπορούν οι κανόνες να έχουν οποιαδήποτε κανονιστική σημασία. Και μια κανονιστική δραστηριότητα δεν απαιτεί την παρουσία ρητώς διατυπωμένων κανόνων, διότι δεν υπάρχει *τίποτε* ιδιαίτερο στη ρητή διατύπωση. Εμπλεκόμαστε σε κανονιστική δραστηριότητα μόνο όταν οι πράξεις μας μπορούν να κριθούν ορθές ή εσφαλμένες πάνω στο φόντο των πραγμάτων που οι πράττοντες όντως κάνουν. «Ένα παιχνίδι παίζεται σύμφωνα μ' έναν κανόνα, ακόμη κι αν ο κανόνας δεν είναι όργανο είτε της εκπαίδευσης είτε της πρακτικής του παιχνιδιού» (KB 142).

Στις αρχές της δεκαετίας του 1930, ο Wittgenstein φανταζόταν αυτό το φόντο ως έναν «λογικό» ή «γραμματικό χώρο» αποτελούμενο από εκείνες τις προτάσεις προς τις οποίες η θεωρούμενη πρόταση σχετίζεται παραγωγικά. Θα μπορούσαμε —ακολουθώντας την Williams— να βαφτίσουμε μια τέτοια στάση «ομοιογενή ολισμό»¹⁶⁴, υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει ποιοτική διαφορά μεταξύ του όλου και των μερών του: αυτό που χρειάζεσαι για να κατανοήσεις το νόημα μιας πρότασης είναι «περισσότερο απ' το ίδιο» (δηλαδή, προτάσεις). Αντίθετα, από τα μέσα της δεκαετίας του 1930, ο Wittgenstein υιοθετεί ένα είδος «ετερογενούς ολισμού»¹⁶⁵, εγκαταλείποντας τη λογισμική αντίληψη για τη γλώσσα και υιοθετώντας την άποψη ότι το πλαίσιο στο οποίο εντίθεται μια εκφορά δεν είναι ένας *αυτόνομος* λογισμός σημείων οριζόμενος από κανόνες, αλλά μια πρακτική συντιθέμενη από *πραγματικές πράξεις και το περιβάλλον τους*. Το πλαίσιο αυτό δεν είναι ένας *αμετάβλητος* γραμματικός χώρος, το αιώνιο βασίλειο των δυνατοτήτων, αλλά ένα πλαίσιο με χρονική ή ιστορική διάσταση.¹⁶⁶ Η αλλαγή αυτή σήμανε μιαν αντιστροφή στην εξηγητική τάξη της αντίληψης του Wittgenstein για την ακολουθία ενός κανόνα. Ενώ πριν θεωρούσε ότι οι εσωτερικές σχέσεις μεταξύ των κανόνων και των εφαρμογών τους προηγούνταν οποιασδήποτε πραγματικής πρακτικής εφαρμογής, τώρα υπογραμμίζει ότι η κανονιστική σχέση ανάμεσα στον κανόνα και την εφαρμογή του *προϋποθέτει* μια κανονική δραστηριότητα χρήσης. Οι εσωτερικές σχέσεις είναι *παράγωγα* της τεχνικής: «Ο κλητήρας [...] *πρέπει* να συμπεράνει έτσι αν συμπεραίνει διαφορετικά, θα τον τιμωρούσαν. Όποιος συμπεραίνει διαφορετικά έρχεται σε σύγκρουση, π.χ., με την κοινωνία, αλλά και με άλλες πρακτικές συνέπειες (ΠΘΜ Ι §116.3). «Εξηγούμε τις λέξεις 'καλή φωτογραφία' μέσω της λέξης 'μοιάζω' κλπ. Αυτό είναι αποδεκτό, εφόσον γνωρίζεις τί σημαίνει 'μοιάζω'. Αλλά αν η τεχνική της σύγκρισης

της εικόνας με την πραγματικότητα δεν έχει κατατεθεί, αν η χρήση του 'μοιάζω' δεν είναι σαφής, τότε το να το λες είναι άχρηστο. Διότι μπορεί να υπάρχουν διάφορες τεχνικές σύγκρισης και διάφορα είδη ομοιότητας» (LFM 69). «Εκείνο που, σε ένα περίπλοκο περιβάλλον, ονομάζουμε 'ακολουθώ έναν κανόνα', σίγουρα δεν θα το ονομάζαμε έτσι αν έσπεκε απομονωμένο» (ΠΘΜ VI §33.2).

Όμως, αυτή η αντιστροφή ή, αλλιώς, η στήριξη των λογικών δυνατοτήτων στις πραγματικές πρακτικές δεν σημαίνει, άραγε, ουσιαστικώς την εξάρτηση του λογικού απ' το εμπειρικό, ένα είδος φυσικοποίησης της λογικής, ή μετάπτωση σ' ένα είδος ψυχολογισμού¹⁶⁷ — θέσεις που ο Wittgenstein αποστρεφόταν σ' όλη του τη ζωή;¹⁶⁸ Την ίδια εποχή που εισηγείται αυτή την αντιστροφή, δεν συνεχίζει να επιμένει πως οι λογικοί και μαθηματικοί νόμοι πρέπει να διακρίνονται σαφώς από τις εμπειρικές προτάσεις; Και αυτή δεν είναι η πεποίθηση που αντανακλάται σε τόσο όψιμες παρατηρήσεις, όπως αυτή: «Είναι σαν να σκληρύνουμε την εμπειρική πρόταση και την κάναμε κανόνα. Και δεν έχουμε τώρα πια μιαν υπόθεση η οποία ελέγχεται από την εμπειρία, αλλά ένα υπόδειγμα, με το οποίο συγκρίνουμε και κρίνουμε την εμπειρία» (ΠΘΜ VI §22.2);¹⁶⁹ Ο Wittgenstein εξακολουθεί να πιστεύει ότι ο ρόλος της λογικής και των μαθηματικών δεν είναι περιγραφικός, αλλά καθοδηγητικός: τα μαθηματικά δεν μας λένε πώς σκεφτόμαστε, αλλά πώς *οφείλουμε* να σκεφτόμαστε. Ωστόσο, δεν πιστεύει πια ότι ο ρόλος αυτός είναι αποκομμένος, ανεξάρτητος από αυτό που *πραγματικά* συμβαίνει. Διότι τόσο η λογική όσο και τα μαθηματικά παίζουν αυτόν τον ρόλο στο *φόντο* μιας ομοφωνίας επί των πράξεων. *Επειδή* ακριβώς συμφωνούμε όλοι σ' αυτά που κάνουμε, μπορούμε να θεσπίζουμε κανόνες που διέπουν τις πρακτικές μας. Αν δεν υπήρχε ομοφωνία στις πρακτικές μας, δεν θα υπήρχε περιθώριο για κανονιστικές ρυθμίσεις.¹⁷⁰ Και η αναγκαιότητα της λογικής και των μαθηματικών δεν απορρέει από την κρυμμένη λογική μορφή των συμβολισμών μας, αλλά από την κανονιστική στάση εκείνων που ακολουθούν κανόνες, που εκδηλώνεται στις πράξεις και τις εκφορές τους. Στις ΠΘΜ, ο Wittgenstein αποκαλύπτει τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι στάσεις γεννώνται, με το να εξετάζει τις διαδικασίες μέσα από τις οποίες μαθαίνουμε ν' ακολουθούμε έναν κανόνα.

Μιλάμε, τώρα, για το 'ανένδοτο' της λογικής· και φανταζόμαστε τους νόμους της λογικής ως ανένδοτους, πιο ανένδοτους κι από τους νόμους της φύσης. [Αλλά...] στους νόμους της λογικής μας αντιστοιχούν πολύ γενικά γεγονότα της καθημερινής εμπειρίας. Εκείνα είναι που μας δίνουν τη δυνατότητα ν' αποδεικνύουμε αυτούς τους νόμους με απλό τρόπο (με μελάνι και χαρτί, π.χ.). Και είναι ανάλογα με εκείνα τα γεγονότα τα οποία καθιστούν ευχερή και χρήσιμη τη μέτρηση με το μέτρο. Αυτό μας υποβάλλει τη χρήση ακριβώς αυτών των νόμων συμπερασμού και τώρα είμαστε *εμείς* ανένδοτοι στην εφαρμογή αυτών των νόμων. Διότι '*μετρούμε*' και είναι μέρος της έννοιας της μέτρησης το ότι όλοι έχουμε τα ίδια μέτρα. (ΠΘΜ I §118.3)

Η εφαρμογή των λογικών ή μαθηματικών νόμων γίνεται «στα τυφλά» (ΠΘΜ I §109), σαν να υπακούουμε σε κάποια εντολή: «Ο κανόνας στέκει εδώ, σαν μια εντολή· και

το *αποτέλεσμά* του είναι επίσης όπως εκείνο της εντολής» (ΠΘΜ VII §39.4).¹⁷¹ Οι τεχνικές μας (ή, μάλλον, η στάση μας απέναντι σ' αυτές) είναι υπεύθυνες γι' αυτό το παράξενο 'ανένδοτο στοιχείο' των μαθηματικών. Το μαθηματικό 'πρέπει' είναι «η έκφραση μιας στάσης απέναντι στην τεχνική του υπολογισμού, η οποία κάνει την εμφάνισή της παντού στη ζωή μας. Η έμφαση στο πρέπει αντιστοιχεί στο ανένδοτο αυτής της στάσης, τόσο προς την τεχνική του υπολογισμού όσο και προς ένα σωρό άλλες τεχνικές» (ΠΘΜ VII §67.2). «[...] οι άνθρωποι μέσα από την παιδεία (εκπαίδευση) τους έχουν φτάσει να χρησιμοποιούν τον τύπο $y = x^2$ έτσι, ώστε όλοι, όταν αντικαθιστούν το x με τον ίδιο αριθμό, παίρνουν πάντοτε τον ίδιο αριθμό για το y » (ΠΘΜ I §1.1).

Το μέτρημα [...] είναι μια τεχνική η οποία εφαρμόζεται καθημερινά στις πιο ετερόκλητες ασχολίες της ζωής μας. Νά γιατί μαθαίνουμε να μετράμε όπως μαθαίνουμε να μετράμε: με ατέλειωτες ασκήσεις, με αμείλικτη ακρίβεια· κι έτσι, ωθούμαστε όλοι με τον ίδιο αμείλικτο τρόπο να λέμε «δύο» μετά το «ένα», «τρία» μετά το «δύο» κ.ο.κ. — «Ωστε λοιπόν αυτό το μέτρημα δεν είναι παρά μια *χρήση*· δεν αντιστοιχεί κάποια αλήθεια σ' αυτή την ακολουθία;». Η *αλήθεια* έγκειται στο ότι η μέτρηση έχει δοκιμαστεί. — «Θέλεις τότε να πεις ότι 'είναι αληθές' σημαίνει 'είναι χρησιμοποιήσιμο' (ή χρήσιμο);». — «Οχι· θέλω απλώς να πω ότι δεν μπορούμε να πούμε ότι η σειρά των φυσικών αριθμών είναι αληθής — όπως δεν μπορούμε να το πούμε και για τη γλώσσα μας, αλλά ότι είναι χρησιμοποιήσιμη και, πάνω απ' όλα, ότι *χρησιμοποιείται*. (ΠΘΜ I §4)

Για τον Wittgenstein η εκπαίδευσή μας στις τεχνικές είναι κάτι περισσότερο από μιαν επαγωγική διαδικασία ή μια διαδικασία εξάρτησης: είναι μια διαδικασία *δόμησης* της συμπεριφοράς, μέχρις ότου γίνει αυτορρυθμιζόμενη. Αυτές οι διαδικασίες οδηγούν στην υιοθέτηση κανονιστικών προτύπων ή, όπως ο Wittgenstein θα το θέσει στις αρχές τις δεκαετίας του 1940, στην «αποδοχή εννοιών»: «Αυτό το Πρέπει δείχνει ότι αποδέχτηκε μια έννοια» (ΠΘΜ VI §8).¹⁷² «Κατασκευάζω μια διαφορετική έννοια. Μια έννοια στην οποία περιλαμβάνεται κάτι που δεν υπήρχε πριν [...] θεσπίζω κάτι ως κριτήριο της ταυτότητας. Άρα μεταπλάθω την έννοια που έχω της ταυτότητας». Εξακολουθεί να διακρίνει αυστηρά το εμπειρικό από το εννοιολογικό: «Το όριο της εμπειρίας — είναι ο *σχηματισμός εννοιών*». Κι αυτός ο σχηματισμός εννοιών είναι η μετάβαση «απ' το 'θα γίνει έτσι' στο 'πρέπει να είναι έτσι'» (ΠΘΜ IV §29).¹⁷³ Η απόκτηση εννοιών είναι η απόκτηση κριτηρίων ταυτότητας ή προτύπων ομοιότητας. Μόνο μέσα απ' αυτά μπορούμε να δούμε, όχι απλώς ότι έτσι έχουν τα πράγματα, αλλά και ότι έτσι *πρέπει* να γίνουν, *ως κανόνες*: «Ο τρόπος με τον οποίο βλέπουμε τα πράγματα μετασχηματίζεται» (ΠΘΜ IV §30.10). Η ικανότητα να ακολουθώ έναν κανόνα προϋποθέτει την ικανότητα να συλλαμβάνω τί μετράει ως 'κάνω το *ίδιο* πράγμα': «Να ενεργείς σύμφωνα μ' έναν κανόνα προϋποθέτει την αναγνώριση μιας *ομοιομορφίας*» (ΠΘΜ VI §44.5). Αλλά η αναγνώριση της ομοιομορφίας απαιτεί την ικανότητα να εμπλέκεσαι σε ομοιόμορφες δραστηριότητες, «διότι μόνο μέσα από μια τεχνική μπορούμε να *συλλάβουμε* μια κανονικότητα»

(ΠΘΜ VI §2.2). Και «μπορώ να εκπαιδεύσω κάποιον σε μια *ομοιόμορφη* δραστηριότητα» (ΠΘΜ VI §17.3).

Όταν σου γράφω ένα τμήμα μιας σειράς, το ότι εσύ μετά βλέπεις *αυτή* τη νομοτέλεια σε αυτήν μπορεί να ονομαστεί εμπειρικό γεγονός, ψυχολογικό γεγονός. Αλλά, *αν* έχεις διαβλέψει αυτόν τον νόμο σ' αυτήν, το ότι συνεχίζεις τη σειρά *κατ' αυτόν τον τρόπο* δεν είναι πια γεγονός της εμπειρίας. (ΠΘΜ VI §26.2)

Η μαθησιακή διαδικασία είναι ο τόπος στον οποίο σφυρηλατείται το σωστό και το λάθος και, γι' αυτόν τον λόγο, είναι *απολύτως αναγκαία* στην ακολουθία ενός κανόνα. Οι κανονιστικά δομημένες τεχνικές εκπαίδευσης είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα της δραστηριότητας του ν' ακολουθείς έναν κανόνα.¹⁷⁴ Το παράδειγμα με τους χιμπατζήδες (ΠΘΜ VI §42.2) προσφέρεται για τον τονισμό του γεγονότος ότι η ακολουθία ενός κανόνα έχει μια *εγγενή κοινωνική διάσταση*.¹⁷⁵

Θα μπορούσε να υπάρξει αριθμητική χωρίς συμφωνία μεταξύ εκείνων που εκτελούν τους υπολογισμούς; Θα μπορούσε μόνο ένας άνθρωπος να υπολογίζει; Θα μπορούσε να υπάρξει μόνο ένας που ακολουθεί έναν κανόνα; Αυτές οι ερωτήσεις δεν είναι όμοιες, λ.χ., με τούτη: 'Μπορεί κανείς να κάνει εμπόριο μόνάχος του;'; [...] Θα μπορούσαν μήπως δύο άνθρωποι να κάνουν εμπόριο μεταξύ τους; (ΠΘΜ VI §45)

Ο αποχωρισμός της εκμάθησης από την ακολουθία ενός κανόνα, που αρχικά ο Wittgenstein είχε επιδιώξει, είχε ως κίνητρο την εξασφάλιση της αυτεπάρκειας του κανονιστικού, ή —αλλιώς— της «αυτονομίας της γραμματικής». Αυτός όμως ο διαχωρισμός οδηγεί τελικά, κατά παράδοξο τρόπο, στη διάλυση της κανονιστικότητας, καθιστώντας αδύνατη την αντικειμενική διάκριση μεταξύ ορθού και εσφαλμένου. Αυτό το πράγμα θέλουν ν' αποδείξουν τα επιχειρήματα περί απροσδιοριστίας στις ΦΕ που αφορούν το νόημα και την ακολουθία ενός κανόνα και όχι —όπως ο Kripke είχε υποστηρίξει το 1981— το όριο των αντιληπτικών μας ικανοτήτων. Στις ΦΕ, ο Wittgenstein ξεετάζει τα βαθιά ελαττώματα των εικόνων που χρησιμοποιούμε για να εξηγήσουμε την κανονιστικότητα και επιτίθεται στις παρανοήσεις που ανακύπτουν όταν εγκαταλείπουμε το έδαφος μπροστά στα μάτια μας, σε αναζήτηση μεγαλύτερου βάθους, για ασφαλέστερα θεμέλια. Η ακολουθία ενός κανόνα γίνεται απροσδιόριστη μόνο όταν νοείται σαν μια ιδεώδης δραστηριότητα απηλλαγμένη τριβών, ανεπηρέαστη από την πραγματικότητα (actuality). Και η προτροπή του Wittgenstein είναι: «Πίσω, στο τραχύ έδαφος!» (ΦΕ §107).

Υπό μορφήν επιλόγου

Ορισμένοι αναφέρονται στο έργο του Wittgenstein στη φιλοσοφία των μαθηματικών ως «σημείο καμψής». Και θα περίμενε κανείς ότι πολλές, αν όχι όλες οι πλάνες τις οποίες εκείνος είχε εντοπίσει θα είχαν πάψει προ πολλού να εμφιλοχωρούν στα κείμενα των μαθηματικών ή των φιλοσόφων μαθηματικών. Όποιος όμως έχει έστω

αμυδρή ιδέα του τί διαλαμβάνεται στις σύγχρονες συζητήσεις περί της φιλοσοφίας των μαθηματικών, θα καταλάβει, ίσως με κάποια δόση πικρίας ή απογοήτευσης, ότι το περίφημο «σημείο καμπής» δεν ήταν τελικά παρά μια ‘βερίνα’, μια σύντομη ‘αναταραχή’ στα νερά ενός ήρεμου ποταμού, ο οποίος συνεχίζει να κυλά ανεπηρέαστος από τέτοιου είδους ριζοσπαστικές εξάρσεις. Το όνομα του Wittgenstein δεν αναφέρεται πουθενά! (Κι αν κάποτε παρενείρεται, εις ένδειξιν βιβλιογραφικής ενημερότητας, τίποτε ουσιώδες δεν αλλάζει αν αφαιρεθεί).¹⁷⁶ Κανείς δεν έχει την παραμικρή αμφιβολία ότι τα μαθηματικά *χρειάζονται* θεμελίωση ή ενοποίηση ή ομογενοποίηση! Κανείς δεν άκουσε για το «παρδαλό συνονθύλευμα τεχνικών» κι αν το άκουσε δεν το κατάλαβε· κι αν το κατάλαβε, απλώς απάντησε: Μα σε τί θα μας βλάψει η ομογενοποίηση!;

Το ζήτημα είναι απλώς ποια θεωρία θα κάνει καλύτερα τη δουλειά: η παλιά καλή συνολοθεωρία, ή μήπως η σχετικά νεότερη «θεωρία των κατηγοριών» (category theory) που εισηγήθηκαν το 1942 οι Samuel Eilenberg και Saunders Mac Lane;¹⁷⁷ Ορισμένοι διακηρύσσουν με βεβαιότητα ότι «τώρα ξέρουν πως, στην πραγματικότητα, τα μαθηματικά είναι *περί* των συνόλων...», ότι «τα μαθηματικά είναι, στ’ αλήθεια, η *επιστήμη* του βασιλείου των συνόλων... η συνολοθεωρία συλλαμβάνει τις *ουσιώδεις*, δηλαδή τις πιο γενικές, *γνωστικές* λειτουργίες στις οποίες στηρίζεται το σύνολο της μαθηματικής *γνώσης*... τα αξιώματα της συνολοθεωρίας διαθέτουν μια *γνωσιοθεωρητική* ιδιότητα, π.χ., το αυτονόητο, την αλήθεια, το αδιαμφισβήτητο κλπ».¹⁷⁸ (η έμφαση, δική μου). Άλλοι εισηγούνται ότι «η θεωρία των κατηγοριών θα έπρεπε να καταλάβει το κέντρο της θεμελιωτικής σκηνής και ν’ αναγκάσει τη συνολοθεωρία να παραιτηθεί από πρόεδρος του συμβουλίου». Η ανωτερότητα της υποτίθεται ότι έγκειται στο ότι «*ενοποιεί* τα μαθηματικά» με διαφορετικό τρόπο, έχοντας ως ιδεώδες μιαν αυτόνομη θεμελίωση, περισσότερο *μεθοδολογική* παρά *λογική*.¹⁷⁹ Πάντως, και οι δύο θεμελιωτικές προσεγγίσεις «συλλαμβάνουν *ουσιώδεις* απόψεις των μαθηματικών με διαφορετικούς τρόπους». Εκείνο που δεν θα πρέπει να ξεχνάμε είναι ότι οι «*γνωστικές* και *γνωσιοθεωρητικές* διαστάσεις δεν μπορούν να αποχωριστούν από το έργο της θεμελίωσης. Η θεμελιωτική έρευνα συχνά *υποκινείται* από *καθαρά φιλοσοφικές σκέψεις*, οι οποίες μπορεί να απέχουν πολύ από την τρέχουσα μαθηματική πρακτική»¹⁸⁰ (η έμφαση, δική μου).

Ένα είναι σίγουρο. Ότι το ανά χείρας βιβλίο επιτίθεται ακριβώς στις ιδέες που εξακολουθούν ν’ αποτελούν τον εννοιολογικό μαθηματικό ορίζοντα. Έτσι ώστε είτε όλες οι σύγχρονες συζητήσεις περί της θεμελίωσης των μαθηματικών να ηχούν σαν ένας τεράστιος —όσο και απαράδεκτος— αναχρονισμός είτε οι σχετικές συζητήσεις του Wittgenstein να λάμπουν σαν ό,τι πιο επίκαιρο και ρηξικέλευθο έχει ποτέ παρουσιαστεί στον χώρο αυτό.

Και να σκεφτεί κανείς ότι ο θεμελιωτισμός ‘κλασσικού τύπου’ (ότι, δηλαδή, τα μαθηματικά πρέπει να θεμελιωθούν στη λογική) είναι μόνο η Σκύλλα την οποία θα πρέπει ν’ αποφύγει ο συνετός φιλόσοφος των μαθηματικών. Γιατί υπάρχει όπως πάντα, και η Χάρυβδις, στη δίνη της οποίας παρασύρονται όλοι οι μοντερνίζοντες (κα-

τά κανόνα κουαίνικής προέλευσης) θεμελιωτιστές, οι οποίοι δεν βλέπουν τη λογική ως το έσχατο δεδομένο, αλλά ως κάτι που εδράζεται στις εκάστοτε φυσικές επιστήμες, επομένως ως κάτι *εμπειρικό*, που θα είναι, ως εκ τούτου, φορέας κι αυτό της προόδου τους. Έτσι, στη σκηνή των μαθηματικών, με αφορμή την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών λογισμών στη φυσική, έχουν αρχίσει από καιρό να εισβάλλουν «αλλόθροες» ξένοι, όπως η κβαντική φυσική, η θεωρία υπολογισμού (computation theory), η υπολογιστική φυσική (computational physics), η κβαντική θεωρία υπολογισμού (quantum computation theory), οι κβαντικές μηχανές Turing κλπ., κλπ.,¹⁸¹ που θέλουν τη μαθηματική λογική —και, κατ' επέκτασιν, τα ίδια τα μαθηματικά— να εδράζονται σε *εμπειρικούς* νόμους (συγκεκριμένα της κβαντικής φυσικής)¹⁸²: Όποιος λοιπόν θέλει να παρακολουθήσει την εξέλιξη των συγχύσεων για τις οποίες ο Wittgenstein προειδοποιεί δεν έχει παρά να ανατρέξει στα συγγράμματα περί Τεχνητής Νοημοσύνης και τα συναφή, κι εκεί ν' ανακαλύψει τον δρόμο που οδήγησε τη σκέψη του Wittgenstein από τη φιλοσοφία των μαθηματικών στη φιλοσοφία της ψυχολογίας, αλλά και τους μίτους που διατρέχουν όλη του τη φιλοσοφία: το κυνήγι του νοήματος, της κατανόησης και της ακολουθίας ενός κανόνα.

Αν και σποραδικές, υπάρχουν βεβαίως παρήγορες φωνές, όπως του Hilary Putnam, ο οποίος, ενώ αρχικά αδιάφορος ή εχθρικός προς τη φιλοσοφία του Wittgenstein, έγινε, εδώ και αρκετά χρόνια, θερμός της θιασώτης και υπέρμαχος¹⁸³, ή της Penelope Maddy, η οποία αποτελεί σπάνιο φαινόμενο μεταξύ των φιλοσόφων μαθηματικών, καθώς όχι μόνο αποδέχεται ολόκληρη τη βιτγκενσταϊνική κριτική σε όλα τα μαθηματικά μέτωπα, αλλά αφιερώνει ειδική εξηγητική ενότητα στον «αντι-φιλόσοφο» Wittgenstein, παρέχοντας μια σπάνια ευκαιρία στους σπουδαστές να μην επαναλάβουν το σύνθηδες «Ουφ, Wittgenstein!»: «Ο Wittgenstein, ο αντι-φιλόσοφος, μας πάει παραπέρα με το να κηρύσσει την απόσχιση ολόκληρης της φιλοσοφικής παράδοσης και στη θέση της να συνιστά την προσεκτική εξέταση των λεπτομερειών της ίδιας της πρακτικής ... Γιατί σκοπός μου είναι να σχεδιάσω μια παραλλαγή του νατουραλισμού ... που θα ενσωματώνει τις ιδέες που έχουμε αποκτήσει από τον Wittgenstein και τον Gödel» (Maddy 1997: 171, 182). Αν και ο στόχος της δεν ηχεί ιδιαίτερα βιτγκενσταϊνικός, ωστόσο η επίγνωση και αναγνώριση των βιτγκενσταϊνικών προειδοποιήσεων στον χώρο των μαθηματικών είναι σίγουρα μια καλή κληρονομιά για τους μαθητές και αναγνώστες της.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί, με ιδιαίτερη έμφαση, το συνεχιζόμενο κριτικό έργο του Stuart Shanker σε όλους τους σύγχρονους κλάδους του νεοεπιστημονισμού στη φιλοσοφία: Με τα δοκίμιά του «Computer Vision or Mechanist Myopia?» (Υπολογιστικό όραμα ή μηχανιστική μυωπία;), «The Dawning of Machine Intelligence» (Η χαραυγή της μηχανικής νοημοσύνης), «In Search of Bruner» (Αναζητώντας τον Bruner), «Locating Bruner» (Εντοπίζοντας τον Bruner), «Ape Language in a New Light» (Η γλώσσα των πιθήκων σε νέο φως), «Wittgenstein vs Quine on the Nature of Language and Cognition» (Wittgenstein εναντίον Quine περί της φύσεως της γλώσσας και της γνωστικής διαδικασίας), «Reassessing the Cognitive Revolution»

(Επανεξετάζοντας τη γνωστική επανάσταση), «Descartes' Legacy: The Mechanist/Vitalist Debates» (Η κληρονομιά του Descartes: Οι μηχανιστικές/βιταλιστικές διενέξεις) και τα βιβλία του, *Apes, Language, and the Human Mind* (Πίθηκοι, γλώσσα και ανθρώπινος νους), *Wittgenstein's Remarks on the Foundations of AI* (Οι παρατηρήσεις του Wittgenstein για τη θεμελίωση της Τεχνητής Νοημοσύνης) και *Jerome Bruner: Language, Culture, Self* (Jerome Bruner: Γλώσσα, πολιτισμός, εγώ), ο Shanker πασχίζει, με απaráμιλλη επιμονή, οξυδέρκεια, ευαισθησία και επινοητικότητα, απαλλαγμένος από φανατισμούς και έμμονες ιδέες, να εκριζώνει τις παντοειδείς συγχύσεις που αναφύονται σε οποιεσδήποτε επιστημονικές ή επιστημονίζουσες φιλοσοφικές θεωρίες που ασχολούνται με τη γλώσσα, την ψυχή ή τη νόηση.

ΚΩΣΤΗΣ Μ. ΚΩΒΑΙΟΣ

Καλοκαίρι 2005

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΜΕΛΗΤΩΝ
G. H. VON WRIGHT, R. RHEES, G. E. M. ANSCOMBE
ΣΤΗΝ ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗ ΕΚΔΟΣΗ

Τα μετά θάνατον δημοσιευθέντα γραπτά του Wittgenstein, τα οποία εμφανίσθηκαν για πρώτη φορά το 1956 υπό τον τίτλο «Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik», προέρχονται σχεδόν όλα από την περίοδο Σεπτέμβριος 1937-Απρίλιος 1944. Ο Wittgenstein δεν επανήλθε σ' αυτό το θέμα κατά τα τελευταία χρόνια της ζωής του. Από την άλλη, είχε γράψει πολλά γύρω από τη φιλοσοφία των μαθηματικών και τη λογική, μεταξύ 1929 και 1934. Σημαντικό μέρος από τα κείμενα αυτά —μαζί με άλλο υλικό της ίδιας περιόδου— δημοσιεύθηκε υπό τους τίτλους «Φιλοσοφικές παρατηρήσεις» (1964) και «Φιλοσοφική γραμματική» (1969).

Η παρούσα, αναθεωρημένη, έκδοση των *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* περιλαμβάνει ολόκληρο το κείμενο της πρώτης (1956) έκδοσης. Κατά την επανεπεξεργασία, δεν αφήσαμε λοιπόν τίποτε έξω από όσα είχαν ήδη τυπωθεί. Αντίθετα, περιλάβαμε πρόσθετο υλικό. Μόνο τα Μέρη II και III ανατυπώθηκαν, πρακτικώς αναλλοίωτα, ως Μέρη III και IV.

Πήραμε το δεύτερο Παράρτημα στο Μέρος I της πρώτης έκδοσης, μαζί με λιγοστές προσθήκες από τα Χειρόγραφα, και το περιλάβαμε, σ' αυτήν εδώ την έκδοση, ως ανεξάρτητο Μέρος II.

Το Μέρος VI της παρούσας έκδοσης είναι εντελώς νέο. Το Χειρόγραφο περιλαμβάνει ίσως την πλέον ικανοποιητική παρουσίαση των στοχασμών του Wittgenstein γύρω από το πρόβλημα της συμμόρφωσης προς έναν κανόνα — ένα από τα πιο συχνά επανεμφανιζόμενα θέματα. Το MS 164 γράφτηκε την περίοδο 1941-1944· δεν μπορέσαμε να το χρονολογήσουμε ακριβέστερα.* Με την εξαίρεση μερικών, λιγοστών, παρατηρήσεων στο τέλος, οι οποίες δεν ταιριάζουν απολύτως στον κύκλο των προβλημάτων που αποτελούν το κύριο θέμα του, το Χειρόγραφο τυπώθηκε εδώ in extenso.

* Η αρίθμηση των Χειρογράφων και Δακτυλογράφων του Wittgenstein ακολουθεί την αρίθμηση του καταλόγου που έδωσε ο G. H. von Wright στο άρθρο του «The Wittgenstein Papers» (PR 78, 1969). [Βλ. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ]

Το Μέρος I είναι το αρχαιότερο της συλλογής και, ως ένα σημείο, έχει μια ξεχωριστή θέση. Είναι το μόνο που υπήρχε σε δακτυλόγραφο και είναι το πιο δουλεμένο απ' όλα τ' άλλα. Το ίδιο το δακτυλόγραφο προέρχεται από χειρόγραφα που συντέθηκαν, κατά το μεγαλύτερο μέρος τους, από τον Σεπτέμβριο του 1937 ως το τέλος, περίπου, του ίδιου έτους (117, 118, 199). Ωστόσο, οι παρατηρήσεις στην άρνηση αποτελούν εξαίρεση: προέρχονται από ένα χειρόγραφο που συντέθηκε γύρω στη στροφή της χρονιάς 1933-1934 (115).

Στην αρχική του μορφή, το δακτυλόγραφο που αποτελεί τη βάση του Μέρους I αποτελούσε το δεύτερο ήμισυ μιας προγενέστερης παραλλαγής των *Φιλοσοφικών ερευνών*. Αργότερα, ο Wittgenstein έσπασε αυτό το ήμισυ εκείνης της παραλλαγής σε μικρά αποκόμματα, τα οποία εφοδίασε με εκτεταμένες αλλαγές και προσθήκες, και μόνο τότε κατασκεύασε τη συγκεκριμένη σειρά παρατηρήσεων που δημοσιεύουμε εδώ. Σε ένα αρκετά μεταγενέστερο σημειωματάριο (1944), πρότεινε μερικές λιγοστές τροποποιήσεις του δακτυλόγραφου. (Βλ. σελ. 114, υποσημείωση).

Η τελευταία ενότητα της αναδιατεταγμένης συλλογής αποτελείτο από γραπτά τα οποία δεν είχαν κατακερματισθεί, μολονότι περιείχαν πολλές χειρόγραφες προσθήκες, και δεν είναι διόλου σαφές κατά πόσον ο Wittgenstein θεωρούσε ότι ανήκαν στο προηγούμενο κείμενο. Αυτή η ενότητα ασχολείται με το θέμα της άρνησης και, όπως ήδη αναφέραμε, γράφτηκε 3-4 χρόνια νωρίτερα από το υπόλοιπο Μέρος I.

Η συλλογή έχει δύο ακόμη παραρτήματα. Προέρχονται από το ίδιο δακτυλόγραφο απ' όπου και το δεύτερο ήμισυ των (πρώιμων) *Ερευνών* όπως και νά 'χει το πράγμα, είχαν αποχωριστεί από το υπόλοιπο της συλλογής των αποκομμάτων. Το πρώτο ασχολείται με τη «μαθηματική έκπληξη». Το δεύτερο συζητά, μεταξύ άλλων, τις θεωρίες του Gödel περί υπάρξεως μη αποδείξιμων αλλά αληθών προτάσεων στο σύστημα των *Principia Mathematica*. Στην πρώτη έκδοση, είχαμε περιλάβει μόνο το δεύτερο παράρτημα, εδώ όμως δημοσιεύονται και τα δύο (Παραρτήματα II και III).

Με την εξαίρεση μερικών παρατηρήσεων, τις οποίες ο ίδιος ο Wittgenstein είχε αφήσει έξω από το σύνολο των αποκομμάτων, αυτές που δημοσιεύονται εδώ ως Μέρος I περιλαμβάνουν ολόκληρο το δεύτερο ήμισυ της πρώιμης παραλλαγής των *Φιλοσοφικών ερευνών*.

Θα πρέπει να αποτελούσε μέρος των προθέσεων του Wittgenstein η προσθήκη παραρτημάτων για τη θεωρία του Cantor περί του απείρου και τη λογική του Russell, ως συνεισφορές σε προβλήματα της θεμελίωσης των μαθηματικών, τα οποία σχεδίαζε να περιλάβει στις *Φιλοσοφικές έρευνες*. Υπό τον τίτλο «Προσθήκες» έγραψε μερικές σελίδες γύρω από τα προβλήματα που συνδέονται με τη συνολοθεωρία: για τη διαγώνιο διαδικασία και τα διάφορα είδη εννοιών αριθμών. Μεταξύ Απριλίου του 1938 και Ιανουαρίου 1939 έγραψε ένα Χειρόγραφο βιβλίο, στο οποίο, μαζί με άλλες παρατηρήσεις για τη φιλοσοφία των ψυχολογικών εννοιών, περιέλαβε αρκετές σκέψεις περί πιθανοτήτων και αλήθειας (Gödel), καθώς και περί απείρου και ειδών αριθμών (Cantor). Αυτά τα γραπτά τα συνέχισε σ' ένα σημειωματάριο (162a και αρχή του 162b). Αργότερα, τα χρόνια του πολέμου, θα επανερχόταν περιστασιακά σ' αυτά τα θέματα. Η αντιπαράθεσή του με τον Cantor δεν σταμάτησε ποτέ.

Αυτό που εδώ δημοσιεύουμε ως Μέρος II αποτελείται από τις προαναφερθείσες «Προσθήκες» στο 117 και μια συλλογή παρατηρήσεων από το 121. Το όλο συνιστά μια ανάξια λόγου επέκταση του Παραρτήματος II του Μέρους I της πρώτης (1956) έκδοσης. Η διάταξη των προτάσεων και των παραγράφων σε αριθμημένες Παρατηρήσεις αντιστοιχεί στο αρχικό κείμενο (πράγμα που δεν ίσχυε εντελώς για την έκδοση του 1956). Οι ενότητες αριθμήθηκαν από τους επιμελητές.

Η αντιπαράθεση του Wittgenstein με τον Russell, δηλαδή με την ιδέα της παραγωγιμότητας των μαθηματικών από τους λογισμούς της λογικής, απαντά στο Μέρος III αυτής της συλλογής (Μέρος II της έκδοσης του 1956). Αυτά τα γραπτά προέρχονται από την περίοδο Οκτώβριος 1939-Απρίλιος 1940. Το Χειρόγραφο (122, συνεχιζόμενο αμέσως στο δεύτερο ήμισυ του 117) ήταν το πιο εκτενές από όλα όσα αποτελούν τη βάση αυτής της συλλογής. Ούτε ως προς το ύφος ούτε ως προς το περιεχόμενο έχει υποστεί τελειοποίηση. Ο συγγραφέας ανανεώνει τις προσπάθειές του να διασαφίσει τις σκέψεις του γύρω από τη μαθηματική απόδειξη: τί εννοεί, π.χ., όταν λέει ότι η απόδειξη πρέπει να είναι εποπτεύσιμη· ότι μας προσφέρει μια καινούρια εικόνα· ότι δημιουργεί μια νέα έννοια· και τα παρόμοια. Προσπάθειά του είναι να διακηρύξει ότι τα μαθηματικά είναι ένα «συνονθύλευμα» τεχνικών και να καταστήσει σαφή τη σύνδεση ανάμεσα στις διάφορες τεχνικές υπολογισμού. Πασχίζοντας να κάνει αυτό το πράγμα, αποστρέφει ταυτοχρόνως το πρόσωπό του από την ιδέα μιας «θεμελίωσης» των μαθηματικών, είτε υπό τη μορφή ενός ρασελιανού λογισμού είτε υπό τη μορφή της χιλμπέρτιας αντίληψης των μεταμαθηματικών. Η ιδέα της αντίφασης και της αποδειξέως συνεπείας συζητείται εκτενώς.

Οι επιμελητές ήταν της γνώμης ότι αυτό το χειρόγραφο περιείχε ένα θησαυρό από πολύτιμες σκέψεις που δεν απαντούν πουθενά αλλού στα γραπτά του Wittgenstein. Από την άλλη, τους φάνηκε εξίσου σαφές ότι αυτό το χειρόγραφο δεν μπορούσε να δημοσιευθεί χωρίς περικοπές. Ήταν λοιπόν αναγκαία μια επιλογή. Το έργο ήταν δύσκολο και οι επιμελητές δεν είναι απόλυτα ικανοποιημένοι με το αποτέλεσμα.

Το φθινόπωρο του 1940, ο Wittgenstein άρχισε να ασχολείται και πάλι με τη φιλοσοφία των μαθηματικών και έγραψε μερικά πράγματα γύρω από το ερώτημα της συμμόρφωσης προς έναν κανόνα. Αυτά τα γραπτά δεν δημοσιεύονται εδώ (MS 123). Τον Μάιο του 1941 ξανάπιασε δουλειά, που σύντομα οδήγησε στις έρευνες, ένα σημαντικό κομμάτι των οποίων δημοσιεύεται εδώ ως Μέρος VII.

Το πρώτο τμήμα του Μέρους VII (§§1-23) γράφτηκε, ως επί το πλείστον, τον Ιούνιο του 1941. Συζητάει τη σχέση μαθηματικών και εμπειρικών προτάσεων, υπολογισμού και πειράματος, ασχολείται εκ νέου με την έννοια της αντίφασης και της συνέπειας και καταλήγει στη γειτονία του προβλήματος του Gödel. Το δεύτερο ήμισυ γράφτηκε την άνοιξη του 1944. Ασχολείται κυρίως με την έννοια της συμμόρφωσης προς έναν κανόνα, της μαθηματικής απόδειξης και της λογικής συνεπαγωγής και με τη σύνδεση ανάμεσα σε απόδειξη και σχηματισμό εννοιών στα μαθηματικά. Εδώ υπάρχουν πολλά σημεία επαφής, αφ' ενός, με τα χειρόγραφα των μεσολαβουσών περιόδων (Μέρη IV και V), αφ' ετέρου, με σκέψεις των *Φιλοσοφικών ερευνών*. Οι §§47-60 απαρτίζουν ουσιαστικά μια πρωιμότερη παραλλαγή των σκέψεων που σήμερα μπορεί να

βρει κανείς στις *Έρευνες* ως §§209-237. Η ακολουθία των παρατηρήσεων είναι διαφορετική εδώ· με μερικές από αυτές καταπιάστηκε ξανά στη μεταγενέστερη παραλλαγή. — Και τα δύο ημίση του Μέρους VII βρίσκονταν στο ίδιο χειρόγραφο βιβλίο, πράγμα που αποτελεί ένδειξη ότι ο συγγραφέας τους θεωρούσε ότι ανήκουν εκεί.

Το Μέρος V έχει ληφθεί από δύο χειρόγραφα (126 και 127) που γράφτηκαν τις χρονιές 1942 και 1943 — ενώ το Μέρος IV προέρχεται κυρίως από ένα χειρόγραφο (125) του 1942, μαζί με ορισμένες προσθήκες από τα δύο χειρόγραφα που απετέλεσαν τη βάση του Μέρους V. Μεγάλο κομμάτι των δύο αυτών μερών έχει τον χαρακτήρα «προεισαγωγικών σπουδών» για το δεύτερο ήμισυ του Μέρους VII· περιέχουν όμως και άλλο άφθονο υλικό, το οποίο ο συγγραφέας δεν χρησιμοποίησε εκεί.

Στο Μέρος V, ο Wittgenstein συζητάει θέματα που σχετίζονται με τον Brouwer και την εννοασιοκρατία: τον νόμο του αποκλεισμένου τρίτου και τη μαθηματική ύπαρξη· την τομή του Dedekind και τον εκτασιακό και εντασιακό τρόπο θεώρησης των πραγμάτων στα μαθηματικά. Στο δεύτερο ήμισυ αυτού του Μέρους, υπάρχουν παρατηρήσεις πάνω στην έννοια της γενικότητας στα μαθηματικά και, ειδικότερα, σε ένα θέμα που κάνει την παρουσία του ακόμη εντονότερη στο Μέρος VII: τον ρόλο του σχηματισμού εννοιών και τη σχέση μεταξύ έννοιας και αλήθειας στα μαθηματικά.

Η χρονολογική κατάταξη του υλικού είχε ως συνέπεια ένα και το αυτό θέμα να εμφανίζεται σε διαφορετικές θέσεις. Αν ο Wittgenstein είχε συνθέσει ο ίδιος τις παρατηρήσεις του σε ένα βιβλίο, θα είχε κατά πάσαν πιθανότητα αποφύγει πολλές από αυτές τις επαναλήψεις.

Θα πρέπει να τονισθεί ακόμη μια φορά το εξής: Το Μέρος I και, πρακτικώς, και το Μέρος VI, αλλά μονάχα αυτά, αποτελούν πλήρεις αναπαραγωγές κειμένων του Wittgenstein. Έτσι, αυτά που εδώ δημοσιεύονται ως Μέρη II, III, IV, V και VII αποτελούν *επιλογή* από εκτενή χειρόγραφα. Στον Πρόλογο της πρώτης έκδοσης, οι επιμελητές διευκρίνωσαν την εικασία ότι ίσως αργότερα να ήταν επιθυμητή η δημοσίευση όσων είχαν παραλείψει. Εξακολουθούν να είναι της ίδιας γνώμης — αλλά και να πιστεύουν επίσης ότι δεν ήρθε ακόμη ο καιρός να δημοσιευθούν άπαντα τα χειρόγραφα του Wittgenstein επ' αυτού και άλλων θεμάτων.

Οι επιμελητές είναι οι μόνοι υπεύθυνοι για την αρίθμηση των παραγράφων που επιλέχτηκαν. (Ακόμη και στο Μέρος I). Αλλά η διάρθρωση του κειμένου σε «παρατηρήσεις» — εδώ διαχωριζόμενες μεταξύ τους με μεγαλύτερα διάκενα¹⁸⁴ — είναι του ίδιου του Wittgenstein. Με ελάχιστες εξαιρέσεις, δεν θελήσαμε να παρέμβουμε στην τάξη των ενοτήτων. Παρ' όλ' αυτά, ορισμένες φορές (ιδιαίτερα στο τέλος των Μερών IV και V) φέραμε μαζί από διαφορετικές θέσεις υλικό που ανήκε στην ίδια θεματική.

Ο ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ έχει σκοπό να βοηθήσει τον αναγνώστη να εποπτεύσει το όλον και να καταστήσει ευκολότερη την αναζήτηση λημμάτων. Εμείς είμαστε οι μόνοι υπεύθυνοι για τη θεματική διάρθρωση του υλικού που εμφανίζεται στον ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΙΝΑΚΑ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Ι

- 1-5. Το πρόβλημα της ακολουθίας ενός κανόνα (πρβλ. *Φιλοσοφικές έρευνες* §§189-90 και εξής). — Βήματα καθοριζόμενα από έναν τύπο (1-2). Συνέχιση μιας σειράς (3). Το ανένδοτο των μαθηματικών· μαθηματικά και αλήθεια (4-5). Παρατήρηση πάνω στη μέτρηση (5). 83
- 6-23. Λογικός συμπερασμός. — Η λέξη «όλα»· η συνεπαγωγή από την « $(x) \cdot fx$ » στην « fa » (10-16). Συμπερασμός και αλήθεια (17-23). 86
- 24-74. Η απόδειξη. — Η απόδειξη ως σχήμα, πρότυπο, υπόδειγμα. Το παράδειγμα με το χέρι και την πεντάλφα (25 κ.ε.). Η απόδειξη ως εικόνα ενός πειράματος (36). Το παράδειγμα με τους 100 βόλους (36 κ.ε.). Σύθεση σχημάτων από τα μέρη τους (42-72). Η μαθηματική έκπληξη. Απόδειξη και πεποίθηση. Μαθηματικά και ουσία (32, 73, 74). Το βάθος της ουσίας: η βαθιά ανάγκη για σύμβαση (74). 91
- 75-105. Υπολογισμός και πείραμα. — Η «εκδίπλωση» των μαθηματικών ιδιοτήτων. Το παράδειγμα με τους 100 βόλους (75, 86, 88). Εκδίπλωση των ιδιοτήτων ενός πολυγώνου (76) και μιας αλυσίδας (79, 80, 91, 92). Μέτρηση (93, 94). Γεωμετρικά παραδείγματα (96 έως 98). Εσωτερικές ιδιότητες και σχέσεις (102 - 105)· παραδείγματα από τη λογική των χρωμάτων. 104
- 106-112. Μαθηματική πίστη. 111
- 113-142. Λογικός εξαναγκασμός. — Κατά πόσον το λογικό επιχείρημα εξαναγκάζει; (113-117). Το ανένδοτο της λογικής συγκρινόμενο με το ανένδοτο του νόμου. (118). Η 'λογική μηχανή' και η κινηματική των άκαμπτων σωμάτων (119-

125). 'Η σκληρότητα του λογικού Πρέπει' (121). Η μηχανή ως σύμβολο της ίδιας της της λειτουργίας (122). Συλλαμβάνοντας μονομιάς τη χρήση μιας λέξης (123-130). Η δυνατότητα ως ίσκιος της πραγματικότητας (125). Η μη κατανοητή χρήση της λέξης, ερμηνευόμενη ως παράξενη διαδικασία (127). (Πρβλ. τις §§122-130 με τις ΦΕ §§191-197). Οι νόμοι της λογικής ως «νόμοι της σκέψης» (131-133). Κάνοντας λάθος σ' έναν υπολογισμό (136-137). Παρατήρηση πάνω στη μέτρηση (140). Λογική αδυναμία (141). «Αυτό που προσφέρουμε είναι, στην πραγματικότητα, παρατηρήσεις επί της φυσικής ιστορίας του ανθρώπου» (142). 113

143-156. Θεμελίωση μιας υπολογιστικής διαδικασίας και μιας λογικής συνεπαγωγής. — Υπολογισμός χωρίς προτάσεις (143-145). Το παράδειγμα με την πώληση ξύλου (143-152). «Είναι οι νόμοι μας για τη συνεπαγωγή αιώνιοι και αναλλοίωτοι;» (155). Η λογική *προηγείται* της αλήθειας (156). 122

157-171. Μαθηματικά, λογική και εμπειρία. — Απόδειξη και πείραμα (157-169). Τί πράγμα στα μαθηματικά είναι λογική: τα μαθηματικά κινούνται μες στους κανόνες της γλώσσας μας (165). Ο μαθηματικός επινοεί· δεν ανακαλύπτει (168). Οι λόγοι του λογικού Πρέπει (169-171). 125

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

1-7. Δύο είδη άρνησης: η μία αυτοακυρώνεται όταν επαναλαμβάνεται, η άλλη παραμένει άρνηση. Πώς, κατά τη διπλή άρνηση, *εννοούμε* το ένα ή το άλλο είδος. Έλεγχος του νοήματος διά της εκφράσεως του νοήματος (3). Η άρνηση εν συγκρίσει προς τη στροφή κατά 180° στη γεωμετρία (1, 6, 7). 129

8-10. Μπορούμε να φανταστούμε μια πιο «πρωτόγονη» λογική, στην οποία μπορούμε να αρνηθούμε μόνο προτάσεις που δεν περιέχουν άρνηση (8). Το ερώτημα, κατά πόσον η άρνηση έχει το ίδιο νόημα γι' αυτούς τους ανθρώπους με εκείνο που έχει για μας (9). Με το «1» εννοούμε το ίδιο στις προτάσεις «Αυτή η ράβδος έχει μήκος 1 μέτρο» και «Νά 1 στρατιώτης» (10); 131

12-13. Δύο συστήματα μέτρησης μήκους. 1 πόδι = 1W, αλλά 2W = 4 πόδια κ.ο.κ. «W» και «πόδι» σημαίνουν το ίδιο πράγμα; 132

16. Το νόημα ως η *λειτουργία* της λέξης στην πρόταση. 133

17-27. Χρήση της λέξης «είναι» ως συνδετικό ρήμα και ως σημείο ισότητας. Η προσωπική ένωση μέσω της ίδιας λέξης, απλή σύμπτωση. Ουσιώδη και επουσιώδη χαρακτηριστικά μιας σημειογραφίας. Σύγκριση με τον ρόλο ενός πιονιού στο παιχνίδι. Το παιχνίδι δεν έχει μόνο κανόνες, αλλά και πνεύμα (20). 133

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II

- 1-13. Εκείνο που σου προξενεί έκπληξη μπορεί να παίζει στα μαθηματικά δύο εντελώς διαφορετικούς ρόλους. — Μια κατάσταση πραγμάτων μπορεί, μέσα από τη μορφή παράστασής της, να φανεί εκπληκτική. Ή η παροχή ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος μπορεί να φανεί αυτή η ίδια εκπληκτική. Το δεύτερο είδος έκπληξης δεν είναι θεμιτό. Κριτική της άποψης ότι η μαθηματική απόδειξη φέρνει στο φως κάτι κρυμμένο (2). «Εδώ δεν υπάρχει κανένα μυστικό», πάει να πει: Κοίτα ολόγυρά σου! (4). Ένας υπολογισμός συγκρινόμενος με το άνοιγμα ενός χαρτιού της τράπουλας (5). Όταν δεν μπορούμε να έχουμε εποπτεία αυτού που έχουμε κάνει, μας φαίνεται μυστηριώδες. Υιοθετούμε μια ορισμένη μορφή έκφρασης κι ύστερα αυτή εξουσιάζει τις πράξεις και τη σκέψη μας (8). 135

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III

- 1-4. Είδη προτάσεων. — Αριθμητική που γίνεται χωρίς προτάσεις (4). 139
- 5-7. Αλήθεια και αποδειξιμότητα στο σύστημα των *Principia Mathematica*. 140
- 8-19. Συζήτηση μιας πρότασης 'P', η οποία ισχυρίζεται τη μη αποδειξιμότητά της στα *Principia Mathematica*. — Ρόλος της αντίφασης στο γλωσσικό παιχνίδι (11-14, 17). 140
20. Οι προτάσεις της λογικής. 'Πρόταση' και 'προτασιόμορφος σχηματισμός'. 144

ΜΕΡΟΣ II

- 1-22. («Προσθήκες»). — Η διαγώνιος διαδικασία. Σε τί χρησιμεύει ο διαγώνιος αριθμός; (3). «Εδώ το σύνθημα είναι: Κοίτα πιο μακριά ολόγυρά σου!» (6). Θα πρέπει να βλέπουμε με δυσπιστία το εξαγόμενο ενός υπολογισμού εκπεφρασμένο με λέξεις (7). Η έννοια 'μη απαριθμήσιμος' (10-13). Σύγκριση των εννοιών του πραγματικού αριθμού και του πληθάριμου υπό το πρίσμα της διάταξης σε μια σειρά (16-22). 145
23. Η αρρώστια μιας εποχής. 150
- 24-27. Συζήτηση της πρότασης «Δεν υπάρχει μέγιστος πληθάριμος». «Για μian άδεια, λέμε ότι δεν έχει λήξη» (26). 150

- 28-34. Άρρητοι αριθμοί. Δεν υπάρχει σύστημα αρρήτων αριθμών (33), αλλά ο Cantor ορίζει μια *διαφορά ανώτερης τάξης*: συγκεκριμένα, μια διαφορά μεταξύ ενός αναπτύγματος και ενός συστήματος αναπτυγμάτων (34). 151
- 35-39. $\aleph_0$. Το να έχουμε μια χρήση για ένα είδος αριθμητικού, που μας δίνει το πλήθος των όρων μιας άπειρης σειράς, δεν συνεπάγεται πως έχει νόημα να μιλάμε και για το πλήθος της έννοιας «άπειρη σειρά». Δεν υπάρχει καμία γραμματική τεχνική που να μας υποβάλλει τη χρήση μιας τέτοιας έκφρασης. Μια τέτοια χρήση δεν είναι υπό ανακάλυψιν, αλλά υπό *επινόησιν* (38). 152
- 40-48. Συζήτηση της πρότασης: «Δεν μπορούμε να διατάξουμε τα κλάσματα κατά σειράν μεγέθους». 153
- 49-50. Πώς συγκρίνουμε τα παιχνίδια μεταξύ τους; 154
- 51-57. Συζήτηση της πρότασης ότι τα κλάσματα (ζεύγη αριθμών) μπορούν να διαταχθούν σε μιαν άπειρη σειρά. 155
- 58-60. «Μήπως η λέξη 'άπειρος' θα έπρεπε να αποφεύγεται στα μαθηματικά;». 156
61. Περαιτοκρατία και συμπεριφοροκρατία είναι παρόμοιες έννοιες. Και οι δύο αρνούνται την ύπαρξη ενός πράγματος, με σκοπό ν' απαλλαγούν από μια σύγχυση. 157
62. «Αυτό που κάνω δεν είναι να αποδεικνύω ότι ορισμένοι υπολογισμοί είναι λάθος, αλλά να υποβάλλω σε έλεγχο το ενδιαφέρον τους». 157

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

- 1-2. Η απόδειξη. — Η μαθηματική απόδειξη πρέπει να είναι εποπτεύσιμη. Ρόλος των ορισμών (2). 159
- 3-8. Η λογική του Russell και η ιδέα της αναγωγής της αριθμητικής στη συμβολική λογική. — Η εφαρμογή του υπολογισμού πρέπει να φροντίζει η ίδια τον εαυτό της (4). Η απόδειξη στον λογισμό του Russell, στον δεκαδικό λογισμό και στον μοναδιαίο λογισμό. 160
- 9-11. Η απόδειξη. — Η απόδειξη ως εντυπωσιακή εικόνα (9). Η αναπαραγωγή ενός αποδεικτικού σχήματος (10-11). 163
- 12-20. Η λογική του Russell και το πρόβλημα της σχέσης των διαφόρων τεχνικών