Φίλη μαθήτρια, φίλε μαθητή,

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ Λυκείου που θέλουν ένα μεθοδικό και πλήρες βοήθημα στην Άλγεβρα. Το μάθημα αυτό αποτελεί τη γέφυρα ανάμεσα στο γυμνάσιο και το λύκειο και συμβάλλει στη βαθμιαία κατάκτηση των πιο βασικών μαθηματικών εννοιών.

Με το παρόν βιβλίο ο μαθητής θα αποκτήσει βήμα βήμα όλες τις αλγεβρικές και μαθηματικές δεξιότητες που θα του εξασφαλίσουν στέρεα θεμέλια για την ομαλή πορεία του και στις τρεις τάξεις του λυκείου, αλλά και για την απόκτηση κριτικής και συστηματικής ορθολογικής σκέψης, ανεξάρτητα από τις σπουδές που θα θελήσει να ακολουθήσει. Ένας ακόμα ουσιαστικός σκοπός του είναι να βοηθήσει τον μαθητή στην καθημερινή του μελέτη, ώστε να ανταποκρίνεται με απόλυτη επιτυχία στις απαιτήσεις του σχολείου ή των εξετάσεων.

Το βιβλίο αυτό περιέχει:

- Τη βασική θεωρία με σχόλια ή διευκρινίσεις, όπου αυτό κρίνεται σκόπιμο.
- Μεθόδους και τεχνικές για τη λύση των ασκήσεων, όπου κάτι τέτοιο είναι εφικτό.
- Πολλές υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις, κλιμακούμενης δυσκολίας, καθώς και θέματα με απαιτήσεις.
- Ασκήσεις για εξάσκηση και προτεινόμενα θέματα σε κάθε ενότητα.
- Ασκήσεις που απευθύνονται σε μαθητές με κλίση στα μαθηματικά και επιθυμούν να συμμετάσχουν σε μαθηματικούς διαγωνισμούς.
- Ενδιάμεσες επαναληπτικές ενότητες με σκοπό την ανακεφαλαίωση και τη σύνδεση όλης της προηγούμενης ύλης.
- Διαγωνίσματα ανά κεφάλαιο, που δίνουν τη δυνατότητα για παραπάνω εξάσκηση και αφορμή για σύνθεση της διδαχθείσας ύλης, αλλά και γενικά διαγωνίσματα στο τέλος του βιβλίου.
- Επαναληπτικά θέματα με όλη τη θεωρία αλλά και ασκήσεις για την άριστη οργάνωση της επανάληψης πριν από την περίοδο των εξετάσεων.
- Τις απαντήσεις και τις υποδείξεις σε όλα τα προτεινόμενα θέματα.

Πιστεύουμε ότι η ποιότητα, το πλήθος και η διάταξη των θεμάτων, σε συνδυασμό με τα σχόλια και τις αναγκαίες μεθοδεύσεις, θα καταστήσουν το παρόν βιβλίο ένα χρήσιμο καθημερινό εργαλείο γνώσης και μελέτης για κάθε μαθητή.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τη συνάδελφο Φωτεινή Καλδή για τις παρατηρήσεις της, τη φοιτήτρια Αρετή Δεσίπρη που βοήθησε στον έλεγχο των αποτελεσμάτων, καθώς και τον συνάδελφο Δημήτρη Τσάκο για τις συζητήσεις που είχαμε κατά τη συγγραφή του βιβλίου.

Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

1. Σύνολα 11

2. Οι πραγματικοί αριθμοί: Πράξεις και ιδιότητες 28

3. Διάταξη πραγματικών αριθμών 78

4. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού 100

5. Ρίζες πραγματικών αριθμών 121

♦ *Επανάληψη 1η* 147

6. Εξισώσεις 1ου βαθμού 154

7. Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$ 181

8. Εξισώσεις 2ου βαθμού 187

♦ *Επανάληψη 2η* 219

9. Ανισώσεις 1ου βαθμού 225

10. Ανισώσεις 2ου βαθμού 241

♦ *Επανάληψη 3η* 264

11. Ακολουθίες - Πρόοδοι 268

♦ *Επανάληψη 4η* 298

12. Η έννοια της συνάρτησης 300

13. Γραφική παράσταση συνάρτησης 309

14. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ 329

15. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ 351

♦ *Επανάληψη 5η* 365

16. Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων 368

17. Θέματα θεωρίας 392

18. Επαναληπτικά διαγωνίσματα 404

♦ *Γενική Επανάληψη 6η* 421

Υποδείξεις - Απαντήσεις 441

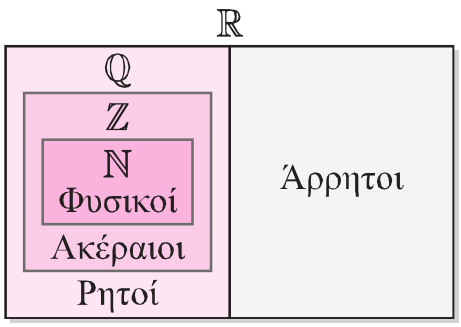
Λύσεις ασκήσεων σχολικού βιβλίου 689

2 Οι πραγματικοί αριθμοί: Πράξεις και ιδιότητες

Θεωρία και εφαρμογές

Α1. Οι πραγματικοί αριθμοί

Οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά του λυκείου λέγονται πραγματικοί. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$. Οι πραγματικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο μεγάλα σύνολα:



- Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών.
- Το σύνολο των άρρητων αριθμών.

Ρητοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β είναι ακέραιοι αριθμοί με $\beta \neq 0$.

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός και αντιστρόφως: Κάθε δεκαδικός αριθμός ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός είναι ρητός, δηλαδή μπορεί να πάρει την κλασματική μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\beta \neq 0$.

Παραδείγματα:

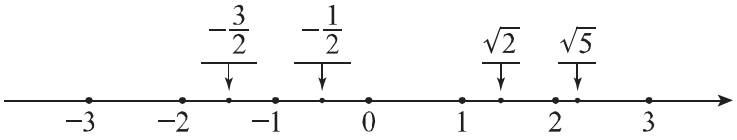
- Οι αριθμοί 3, -7, $\frac{2}{9}$, $-\frac{3}{5}$ είναι ρητοί.
- Οι αριθμοί:

i) $0{,}52$ ii) $2{,}7131$ iii) $-6{,}4252525$

είναι ρητοί.

- Οι αριθμοί $0{,}3333\ldots$ και $2{,}728282828\ldots$ είναι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί, οπότε είναι ρητοί.
- Οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$, $1{,}010010001\ldots$, είναι άρρητοι.

Θυμίζουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν σε έναν άξονα, που λέγεται άξονας των πραγματικών αριθμών.



Εφαρμογή 2.1

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

α) -7 **β)** $+10$ **γ)** $\frac{3}{8}$ **δ)** $-\frac{7}{13}$ **ε)** $\sqrt{7}$ **στ)** $-\sqrt{13}$

ζ) $\sqrt{25}$ **η)** $-\sqrt{144}$ **θ)** $0,2222\ldots$ **ι)** $2,353535\ldots$ **ια)** $3,4151515\ldots$

Λύση

α) Ο αριθμός -7 είναι ρητός και μάλιστα είναι ακέραιος. Ας παρατηρήσουμε ότι:

$$-7 = \frac{-7}{1}$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha = -7$ και $\beta = 1$.

β) Ο αριθμός $+10$ είναι ρητός και μάλιστα είναι φυσικός (αλλά και ακέραιος).

γ) Ο αριθμός $\frac{3}{8}$ είναι ρητός και μάλιστα θετικός.

δ) Ο αριθμός $-\frac{7}{13}$ είναι ρητός και μάλιστα αρνητικός.

ε), στ) Οι αριθμοί $\sqrt{7}$ και $-\sqrt{13}$ είναι άρρητοι αριθμοί, διότι οι αριθμοί 7 και 13 δεν είναι τετράγωνα φυσικών αριθμών.

ζ), η) Επειδή $\sqrt{25} = 5$ και $-\sqrt{144} = -\sqrt{12^2} = -12$, οι αριθμοί $\sqrt{25}$ και $-\sqrt{144}$ είναι ρητοί.

θ) Ο αριθμός $x = 0,2222\ldots$ είναι περιοδικός δεκαδικός αριθμός (με περίοδο 2), οπότε είναι ρητός. Μπορούμε να γράψουμε:

$$x = 0,222\ldots = 0,\overline{2} = \frac{2}{9}$$

ι) Ο αριθμός:

$$x = 2,353535\ldots$$

έχει περίοδο 35, οπότε είναι ρητός. Μπορούμε να γράψουμε:

$$x = 2,\overline{35} = 2 + \frac{35}{99} = \frac{233}{99}$$

Μετατροπή περιοδικού σε κλάσμα

- $0,\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{9}$
- $0,\alpha\overline{\beta} = \frac{\alpha\beta - \alpha}{90}$
- $0,\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_3} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2}{900}$
- $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\overline{\alpha_4} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3}{9000}$
- $0,\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_3\alpha_4\alpha_5} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 - \alpha_1\alpha_2}{99900}$

Η παύλα δείχνει την περίοδο.

ια) Ο αριθμός $x = 3{,}4151515\ldots$ είναι περιοδικός δεκαδικός αριθμός με περίοδο 15. Είναι:

$$x = 3{,}4\overline{15} = \frac{3415-34}{990} = \frac{3381}{990}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι στον παρονομαστή βάζουμε τόσα «9», όσα ψηφία έχει η περίοδος και στο τέλος τόσα μηδενικά, όσα είναι τα ψηφία από την υποδιαστολή μέχρι την περίοδο.

Μπορούμε λοιπόν αντιστοίχως να γράψουμε:

- $7{,}2567567\ldots = 7{,}2\overline{567} = \dfrac{72567-72}{9990} = \dfrac{72495}{9990}$
- $2{,}456121212\ldots = 2{,}\underbrace{456}_{3\ \psi\eta\phi\acute{\iota}\alpha}\,\overline{12} = \dfrac{245612-2456}{99\,\underbrace{000}_{3\ \psi\eta\phi\acute{\iota}\alpha}} = \dfrac{243156}{99000}$

Γενικός τύπος

$$\alpha,\underbrace{\beta_1\beta_2\ldots\beta_\rho}_{\rho}\,\overline{\underbrace{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_\nu}_{\nu}} = \frac{\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_\rho\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_\nu - \alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_\rho}{\underbrace{999\ldots9}_{\nu}\,\underbrace{000\ldots0}_{\rho}}$$

Α2. Πράξεις - Ιδιότητες στο $\mathbb{R}$

Α. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός. Με τη βοήθεια αυτών ορίζεται η αφαίρεση και η διαίρεση.

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot1=\alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος αριθμού	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

- Ο αριθμός 0 λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το 1 ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, αφού:

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha \quad \text{και} \quad \alpha\cdot1=1\cdot\alpha=\alpha$$

για κάθε πραγματικό αριθμό α.

♦ Η αφαίρεση και η διαίρεση στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζονται ως εξής:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \quad \text{και} \quad \alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}, \ \beta \neq 0$$

Β. α) Στα δύο μέλη μιας ισότητας μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό:

$$\alpha = \beta \iff \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

Η ιδιότητα αυτή λέγεται **ιδιότητα της διαγραφής για την πρόσθεση**.

β) Τα δύο μέλη μιας ισότητας μπορούμε να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό:

$$\text{Αν } \gamma \neq 0, \text{ τότε } \alpha = \beta \iff \alpha\gamma = \beta\gamma$$

Η ιδιότητα:

$$\alpha\gamma = \beta\gamma \implies \alpha = \beta, \text{ όπου } \gamma \neq 0$$

λέγεται **ιδιότητα της διαγραφής για τον πολλαπλασιασμό**.

Επειδή δεν υπάρχει διαίρεση με το 0, τονίζουμε ότι στη διαγραφή πρέπει ο διαγραφόμενος παράγοντας να είναι διάφορος του μηδενός.

γ) Το γινόμενο δύο ή περισσότερων πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς αυτούς είναι ίσος με το μηδέν:

$$\alpha\beta = 0 \iff (\alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0)$$

Από την ιδιότητα αυτή παίρνουμε ότι:

$$\alpha\beta \neq 0 \iff (\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0)$$

Εφαρμογή 2.2

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\mathbf{A = -(\alpha - 2\beta) - [-(-2\alpha + \beta) + 2(\beta - 2\alpha)]}$

β) $\mathbf{B = -2(3\beta - \alpha) - [3(2\alpha - \beta) - 2(\beta + 2\alpha) - 1]}$

γ) $\mathbf{\Gamma = 2(-\alpha + \beta + \gamma) - [3(\beta - \gamma) + 2(\gamma - \alpha) + 3\gamma]}$

Λύση

α) Απαλείφουμε τις παρενθέσεις από μέσα προς τα έξω:

$$\begin{aligned} A &= -(\alpha - 2\beta) - [-(-2\alpha + \beta) + 2(\beta - 2\alpha)] = \\ &= -\alpha + 2\beta - (2\alpha - \beta + 2\beta - 4\alpha) = \\ &= -\alpha + 2\beta - 2\alpha + \beta - 2\beta + 4\alpha = \alpha + \beta \end{aligned}$$

β) Ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφει το σχόλιο, εκτελώντας τις πράξεις με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\begin{aligned} B &= -2(3\beta - \alpha) - [3(2\alpha - \beta) - 2(\beta + 2\alpha) - 1] = \\ &= -6\beta + 2\alpha - (6\alpha - 3\beta - 2\beta - 4\alpha - 1) = \\ &= -6\beta + 2\alpha - 6\alpha + 3\beta + 2\beta + 4\alpha + 1 = 1 - \beta \end{aligned}$$

γ) $$\begin{aligned} \Gamma &= 2(-\alpha + \beta + \gamma) - [3(\beta - \gamma) + 2(\gamma - \alpha) + 3\gamma] = \\ &= -2\alpha + 2\beta + 2\gamma - (3\beta - 3\gamma + 2\gamma - 2\alpha + 3\gamma) = \\ &= -2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 3\beta + 3\gamma - 2\gamma + 2\alpha - 3\gamma = -\beta \end{aligned}$$

Για την απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων πρέπει να έχουμε υπόψιν τα εξής:

1. Ισχύει ότι:

$$-(\alpha - \beta) = -\alpha + \beta \quad \text{και} \quad (\alpha - \beta) = \alpha - \beta$$

Έτσι, για να παραλείψουμε μια παρένθεση που μπροστά έχει το σύμβολο (−), αλλάζουμε το πρόσημο όλων των όρων που περιέχονται σε αυτή.

2. Αν υπάρχουν παρενθέσεις, αγκύλες ή άγκιστρα, τότε η εξαγωγή των παρενθέσεων γίνεται –εφόσον είναι δυνατόν– από μέσα προς τα έξω.

Εφαρμογή 2.3

Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $A = \dfrac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{3}{4}} \cdot \dfrac{\frac{11}{5}}{\frac{4}{3}}$ **β)** $B = \left(2 - \dfrac{3-\frac{5}{2}}{2+\frac{1}{2}}\right) : \left(4 - \dfrac{3+\frac{2}{3}}{3-\frac{4}{3}}\right)$

Λύση

α) $$A = \frac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{11}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{3+2}{3}}{\frac{8+3}{4}} \cdot \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 5} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{11}{4}} \cdot \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 5} =$$

$$= \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 11} \cdot \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11}{3 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 5} = 1$$

β) Επειδή οι όροι της παράστασης Β είναι επίσης αριθμητικές παραστάσεις, είναι προτιμότερο να απλοποιήσουμε ξεχωριστά τον αριθμητή από τον παρονομαστή. Έχουμε:

- $$2 - \frac{3-\frac{5}{2}}{2+\frac{1}{2}} = 2 - \frac{\frac{3 \cdot 2 - 5}{2}}{\frac{2 \cdot 2 + 1}{2}} = 2 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = 2 - \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 5} =$$

$$= 2 - \frac{1}{5} = \frac{10-1}{5} = \frac{9}{5}$$

Σύνθετο κλάσμα

- $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$
- $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{1}} = \dfrac{\alpha}{\beta\gamma}$
- $\dfrac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}} = \dfrac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\beta}{\gamma}} = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta}$
- $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha}{\beta} : \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\delta}{\gamma}$

♦ $4-\dfrac{3+\frac{2}{3}}{3-\frac{4}{3}}=4-\dfrac{\frac{3\cdot 3+2}{3}}{\frac{3\cdot 3-4}{3}}=4-\dfrac{\frac{11}{3}}{\frac{5}{3}}=4-\dfrac{11\cdot 3}{3\cdot 5}=4-\dfrac{11}{5}=\dfrac{20-11}{5}=\dfrac{9}{5}$

Άρα θα είναι:

$$B=\frac{9}{5}:\frac{9}{5}=1$$

Εφαρμογή 2.4

Δίνεται ο αριθμός $A(x)=(x-1)(2-x)(6+2x)$.

α) Για ποιες τιμές του x είναι $A(x)=0$;

β) Να βρεθούν οι τιμές του x, ώστε $A(x)\neq 0$.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του x, ώστε ο $A(x)$ να έχει αντίστροφο.

Λύση

α) Για να είναι ένα γινόμενο μηδέν, πρέπει και αρκεί ένας τουλάχιστον από τους παράγοντές του να είναι ίσος με μηδέν. Επομένως:

$$A(x)=0 \iff$$
$$\iff (x-1)(2-x)(6+2x)=0 \iff$$
$$\iff (x-1=0 \text{ ή } 2-x=0 \text{ ή } 6+2x=0) \iff$$
$$\iff (x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } 2x=-6) \iff$$
$$\iff (x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-3)$$

Βασική ιδιότητα

♦ $\alpha\beta=0 \iff$
$\iff (\alpha=0 \text{ ή } \beta=0)$

♦ $\alpha\beta\gamma=0 \iff$
$\iff (\alpha=0 \text{ ή } \beta=0 \text{ ή } \gamma=0)$

Για να είναι λοιπόν ένα γινόμενο ίσο με μηδέν, αρκεί ένας τουλάχιστον από τους παράγοντές του να είναι ίσος με το μηδέν.

β) Για να είναι ένα γινόμενο διάφορο του μηδενός, πρέπει και αρκεί κάθε παράγοντάς του να είναι διαφορετικός από το μηδέν. Έτσι:

$$A(x)\neq 0 \iff (x-1)(2-x)(6+2x)\neq 0 \iff$$
$$\iff (x-1\neq 0 \text{ και } 2-x\neq 0 \text{ και } 6+2x\neq 0) \iff$$
$$\iff (x\neq 1 \text{ και } x\neq 2 \text{ και } x\neq -3)$$

♦ Για να έχει ένας αριθμός α αντίστροφο, πρέπει $\alpha\neq 0$.

♦ Για να είναι $\alpha\beta=0$ πρέπει:
$\alpha=0 \text{ ή } \beta=0$

♦ Ισχύει ότι:
$\alpha\beta\neq 0 \iff (\alpha\neq 0 \text{ και } \beta\neq 0)$

Είναι προφανές ότι η απάντηση μπορεί να δοθεί αμέσως, από τη στιγμή που έχει απαντηθεί το πρώτο ερώτημα.

γ) Για να έχει ένας αριθμός αντίστροφο, πρέπει αυτός να είναι διαφορετικός από το μηδέν. Επομένως ο $A(x)$ έχει αντίστροφο, μόνο αν:

$$x\neq 1 \quad \text{και} \quad x\neq 2 \quad \text{και} \quad x\neq -3$$

Β. Ιδιότητες των δυνάμεων

Α. α) Έστω α ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας φυσικός αριθμός. Τότε ορίζουμε:

$$\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu - \text{παράγοντες}} = \alpha^{\nu}$$

Ο α λέγεται **βάση** και ο ν **εκθέτης** της δύναμης α^{ν}.

β) Ισχύει επιπλέον ότι:

- $\alpha^{0} = 1$, όπου $\alpha \neq 0$
- $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$, όπου $\alpha \neq 0$

γ) Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^{\kappa} = \beta^{\kappa}$ για κάθε ακέραιο αριθμό κ. (Αν ο κ είναι αρνητικός, τότε πρέπει $\alpha, \beta \neq 0$.)

δ) Για τη δύναμη ενός κλάσματος ισχύει η ιδιότητα:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$$

Β. α) Οι σημαντικότερες ιδιότητες για τις δυνάμεις με **ακέραιο εκθέτη** είναι οι παρακάτω:

- $\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$
- $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$
- $(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}$, $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
- $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$

β) Υπενθυμίζουμε ότι:

$$(-\alpha)^{2\nu} = \alpha^{2\nu} \quad \text{και} \quad (-\alpha)^{2\nu+1} = -\alpha^{2\nu+1}$$

Για παράδειγμα:

- $(-2)^{4} = 2^{4} = 16$, διότι ο εκθέτης 4 είναι άρτιος
- $(-2)^{5} = -2^{5} = -32$, διότι ο εκθέτης 5 είναι περιττός

Αξίζει να τονίσουμε ότι $-\alpha^{2\nu} \neq (-\alpha)^{2\nu}$.

Για παράδειγμα είναι:

$$-2^{4} = -16 \quad \text{και} \quad (-2)^{4} = 16$$

Γ. Μια δύναμη μπορεί να αλλάζει θέση από τον αριθμητή στον παρονομαστή ενός κλάσματος ή αντίστροφα, αρκεί να αλλάζουμε το πρόσημο του εκθέτη της δύναμης:

$$\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{-\lambda}} = \alpha^{\kappa}\beta^{\lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{-\lambda}} = \frac{1}{\alpha^{-\kappa}\beta^{-\lambda}} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{-\lambda}} = \frac{\beta^{\lambda}}{\alpha^{-\kappa}}$$

Εφαρμογή 2.5

Να γραφούν ως μία δύναμη οι παραστάσεις:

α) $\mathbf{A = \dfrac{8^7 \cdot 32^4}{4^6 \cdot 16^6}}$ **β)** $\mathbf{B = \dfrac{9^6 \cdot 27^5}{81^6}}$

γ) $\mathbf{\Gamma = \dfrac{54^3 \cdot 52^9}{26^9 \cdot 2^3}}$ **δ)** $\mathbf{\Delta = \dfrac{(4^{-2})^{-3}(8^{-3})^{-5}}{(16^{-4})^2(32^{-3})^{-4}}}$

Λύση

α) Είναι:

$$A = \frac{8^7 \cdot 32^4}{4^6 \cdot 16^6} = \frac{(2^3)^7(2^5)^4}{(2^2)^6(2^4)^6} = \frac{2^{21} \cdot 2^{20}}{2^{12} \cdot 2^{24}} = \frac{2^{41}}{2^{36}} = 2^5$$

β) Είναι:

$$B = \frac{9^6 \cdot 27^5}{81^6} = \frac{(3^2)^6(3^3)^5}{(3^4)^6} = \frac{3^{12} \cdot 3^{15}}{3^{24}} = \frac{3^{27}}{3^{24}} = 3^3$$

γ) Είναι:

$$\Gamma = \frac{54^3 \cdot 52^9}{26^9 \cdot 2^3} = \frac{54^3}{2^3} \cdot \frac{52^9}{26^9} = \left(\frac{54}{2}\right)^3 \left(\frac{52}{26}\right)^9 = 27^3 \cdot 2^9 =$$

$$= (3^3)^3 \cdot 2^9 = 3^9 \cdot 2^9 = (3 \cdot 2)^9 = 6^9$$

δ) Είναι:

$$\Delta = \frac{(4^{-2})^{-3}(8^{-3})^{-5}}{(16^{-4})^2(32^{-3})^{-4}} = \frac{4^6 \cdot 8^{15}}{16^{-8} \cdot 32^{12}} = \frac{(2^2)^6(2^3)^{15}}{(2^4)^{-8}(2^5)^{12}} = \frac{2^{12} \cdot 2^{45}}{2^{-32} \cdot 2^{60}} = \frac{2^{57}}{2^{28}} = 2^{29}$$

Εφαρμογή 2.6

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathbf{A = [(\alpha^2\beta^3)^{-2}(\alpha\beta^3)^4] : (\alpha^3 : \beta^{-1})^{-3}} \quad \textbf{και} \quad \mathbf{B = \frac{(\alpha^2\beta)^3(\alpha\beta^2)^{-2}(\beta^{-2})^3}{(\alpha\beta^3)^{-3}(\alpha^2\beta^4)^2(\beta^{-3})^3}}$$

με $\mathbf{\alpha = 2017}$ **και** $\mathbf{\beta = 2017^{-1}}$**.**

Να αποδειχθεί ότι $\mathbf{A = 1}$ **και** $\mathbf{B = 1}$**.**

Λύση

Θα εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων. Είναι:

- $A = [(\alpha^2\beta^3)^{-2}(\alpha\beta^3)^4] : (\alpha^3 : \beta^{-1})^{-3} = [(\alpha^{-4}\beta^{-6})(\alpha^4\beta^{12})] : (\alpha^{-9} : \beta^3) =$
  $= (\alpha^{-4+4}\beta^{-6+12}) : (\alpha^{-9}\beta^{-3}) = (\alpha^0\beta^6)(\alpha^9\beta^3) = \alpha^9\beta^{6+3} =$
  $= \alpha^9\beta^9 = (\alpha\beta)^9 = (2017 \cdot 2017^{-1})^9 = 1^9 = 1$
- $B = \dfrac{(\alpha^2\beta)^3(\alpha\beta^2)^{-2}(\beta^{-2})^3}{(\alpha\beta^3)^{-3}(\alpha^2\beta^4)^2(\beta^{-3})^3} = \dfrac{\alpha^6\beta^3 \cdot \alpha^{-2}\beta^{-4} \cdot \beta^{-6}}{\alpha^{-3}\beta^{-9} \cdot \alpha^4\beta^8 \cdot \beta^{-9}} = \dfrac{\alpha^4\beta^{-7}}{\alpha\beta^{-10}} =$
  $= \alpha^3\beta^{-7+10} = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = (2017 \cdot 2017^{-1})^3 = 1^3 = 1$

Εφαρμογή 2.7

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 25^8 \cdot 8^4$ και $\beta = (5^2)^3(4^3)^2$. Πόσα μηδενικά έχουν στο τέλος οι αριθμοί αυτοί;

Λύση

α) Για να βρούμε πόσα μηδενικά έχει στο τέλος ο αριθμός $\alpha = 25^8 \cdot 8^4$, αρκεί να γράψουμε τον α στη μορφή $\beta \cdot 10^\nu$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ και β ένας αριθμός που το τελευταίο ψηφίο του δεν είναι μηδέν.

Στην περίπτωση αυτή, που είναι δηλαδή $\alpha = \beta \cdot 10^\nu$, ο α τελειώνει σε ν μηδενικά. Είναι λοιπόν:

$$\alpha = 25^8 \cdot 8^4 = (5^2)^8(2^3)^4 = 5^{16} \cdot 2^{12} = 5^4 \cdot 5^{12} \cdot 2^{12} = 5^4(5 \cdot 2)^{12} = 5^4 \cdot 10^{12} = 625 \cdot 10^{12}$$

Επομένως ο α τελειώνει σε 12 μηδενικά.

β) Για τον αριθμό $\beta = (5^2)^3(4^3)^2$ παρατηρούμε ότι:

$$\beta = (5^2)^3(4^3)^2 = 5^6 \cdot 4^6 = (5 \cdot 4)^6 = 20^6 = (2 \cdot 10)^6 = 2^6 \cdot 10^6 = 64 \cdot 10^6$$

Άρα ο β τελειώνει σε 6 μηδενικά. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι:

$$\beta = 5^6 \cdot 4^6 = 5^6(2^2)^6 = 5^6 \cdot 2^{12} = 5^6 \cdot 2^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6 \cdot 2^6 = 2^6 \cdot 10^6 = 64 \cdot 10^6$$

Γ. Ταυτότητες

Α. α) Οι ταυτότητες είναι ισότητες που χρησιμοποιούνται για τη γρηγορότερη εκτέλεση πράξεων ή απλοποίηση παραστάσεων. Υπάρχει ένα μεγάλο πλήθος ταυτοτήτων και καθένας μπορεί να δημιουργήσει μία ακόμα. Οι πιο χρήσιμες όμως από αυτές είναι οι επόμενες:

- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

β) Σε ορισμένες περιπτώσεις χρήσιμες είναι και οι ταυτότητες:

- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ και $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$
- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$
- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$ *(Ταυτότητα Euler)*
- $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

Β. Ενώ οι προηγούμενες ταυτότητες ισχύουν για κάθε τιμή των μεταβλητών τους, υπάρχουν και ταυτότητες που ισχύουν όταν οι μεταβλητές τους υπόκεινται σε περιορισμούς. Τέτοιες ταυτότητες λέγονται «υπό συνθήκη». Από τις ταυτότητες υπό συνθήκη αξίζει να γνωρίζουμε τις εξής:

- Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.
- Αν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$, τότε $\alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$.

Εφαρμογή 2.8

Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2-2(\alpha^2+\beta^2-1)=2$

β) $(\alpha+2\beta)^2-(2\alpha-\beta)^2-3(\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta)=2\alpha\beta$

γ) $(\alpha+2)^3+(\alpha-2)^3-2\alpha(\alpha^2+10)=4\alpha$

δ) $2(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2-(\beta+\gamma)^2-(\gamma+\alpha)^2=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

Λύση

Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα που έχει τη μορφή $A = B$, ακολουθούμε συνήθως έναν από τους εξής τρόπους:

- Ξεκινάμε από το α΄ μέλος και καταλήγουμε στο β΄ μέλος.
- Ξεκινάμε από το β΄ μέλος και καταλήγουμε στο α΄ μέλος.
- Υπολογίζουμε ξεχωριστά το κάθε μέλος και οδηγούμαστε στο ίδιο αποτέλεσμα Γ.
- Εργαζόμαστε συγχρόνως με ισοδυναμίες στην ισότητα $A = B$ και καταλήγουμε σε μια σχέση που ισχύει.

α) Εκτελούμε τις πράξεις στο α΄ μέλος:

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2-2(\alpha^2+\beta^2-1)=$$
$$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-2\alpha^2-2\beta^2+2=2$$

Οι υπόλοιποι όροι απλοποιούνται στην αναγωγή.

β) $(\alpha+2\beta)^2-(2\alpha-\beta)^2-3(\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta)=$

$=(\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2)-(4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2)-3\beta^2+3\alpha^2-6\alpha\beta=$

$=\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-4\alpha^2+4\alpha\beta-\beta^2-3\beta^2+3\alpha^2-6\alpha\beta=$

$=8\alpha\beta-6\alpha\beta=2\alpha\beta$

γ) $(\alpha+2)^3+(\alpha-2)^3-2\alpha(\alpha^2+10)=$

$=(\alpha^3+3\alpha^2\cdot 2+3\alpha\cdot 2^2+2^3)+(\alpha^3-3\alpha^2\cdot 2+3\alpha\cdot 2^2-2^3)-2\alpha^3-20\alpha=$

$=(\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8)+(\alpha^3-6\alpha^2+12\alpha-8)-2\alpha^3-20\alpha=$

$=24\alpha-20\alpha=4\alpha$

δ) Επειδή $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$, παίρνουμε:

$$2(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2-(\beta+\gamma)^2-(\gamma+\alpha)^2=$$
$$=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)-(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2)-(\gamma^2+2\gamma\alpha+\alpha^2)=$$
$$=2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+4\alpha\beta+4\beta\gamma+4\gamma\alpha-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2-\beta^2-2\beta\gamma-\gamma^2-\gamma^2-2\gamma\alpha-\alpha^2=$$
$$=2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

Εφαρμογή 2.9

Αν $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1007$, να αποδειχθεί ότι:

$$2(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2-(\beta+\gamma)^2-(\gamma+\alpha)^2=2014$$