Αγαπητή μαθήτρια, αγαπητέ μαθητή,

Το βιβλίο αυτό έχει γραφτεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ο κάθε μαθητής να ξεκινά από τη θεωρία και τις βασικές εφαρμογές της, να συνεχίζει με τη λύση ασκήσεων, η δυσκολία των οποίων προοδευτικά αυξάνεται, και να φτάνει σταδιακά στο επίπεδο να λύνει σύνθετα και συνδυαστικά θέματα.

Κάθε κεφάλαιο του βιβλίου περιέχει:

- βασική θεωρία και εφαρμογές της,
- λυμένες ασκήσεις,
- θέματα προς απάντηση, όλων των επιπέδων δυσκολίας,
- τα θέματα της Τράπεζας Θεμάτων υποδειγματικά λυμένα,
- συνδυαστικά θέματα,
- θέματα που απαιτούν ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη,
- κριτήρια αξιολόγησης.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Δημήτρη Τσάκο, που επιμελήθηκε την παρούσα έκδοση.

Η συνάδελφος Αντιγόνη Λυκοτραφίτη, με τις εύστοχες παρατηρήσεις της, ήταν πολύτιμη αρωγός σε όλη τη διαδικασία έκδοσης του βιβλίου.

Βασίλης Γ. Παπαδάκης
Μαθηματικός

Περιεχόμενα

11 Ο ΚΥΚΛΟΣ

Βασική θεωρία και εφαρμογές

11.1 Εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο O(0, 0)

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

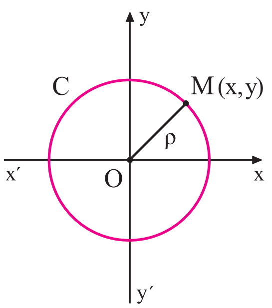
$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Απόδειξη

Ένα σημείο M(x, y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$OM = \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$$



Μοναδιαίος κύκλος

Ο κύκλος με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα ρ = 1 λέγεται **μοναδιαίος κύκλος** και έχει εξίσωση:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$$

Εφαρμογή

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O και:

α) ακτίνα ρ = 3, **β) διέρχεται από το σημείο A(3, − 4).**

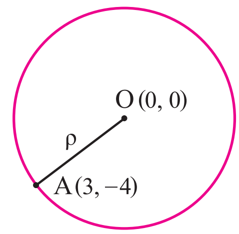
Λύση

α) Ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0) και ακτίνα ρ = 3 έχει εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$$

β) Η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho = OA = \sqrt{(0-3)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



Επομένως ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0) και ακτίνα $\rho = 5$, άρα η εξίσωσή του είναι:

$$x^2 + y^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

11.2 Εξίσωση κύκλου με κέντρο τυχαίο σημείο $K(x_0, y_0)$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Ο κύκλος C με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

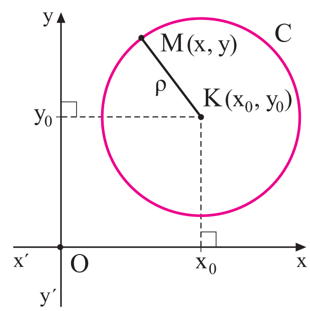
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Απόδειξη

Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του K απόσταση ίση με ρ, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$KM = \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$



Εφαρμογή

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος:

α) έχει κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα 4,

β) έχει κέντρο $K(-8, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$,

γ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(-6, 14)$ και $B(2, 8)$,

δ) έχει κέντρο $K(3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία ε: $4x - 3y + 6 = 0$.

Λύση

α) Ο κύκλος που έχει κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα $\rho = 4$ έχει εξίσωση:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \big(y - (-3)\big)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

11.3 Σχετική θέση σημείου και κύκλου

Έστω C ένας κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ. Ισχύουν τα εξής:

- Ένα σημείο A **ανήκει** στον κύκλο C, αν και μόνο αν:

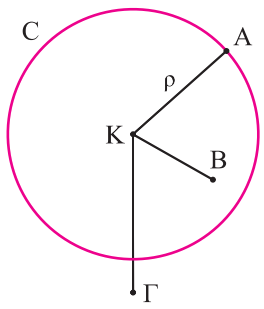
$$\mathbf{KA = \rho}$$

- Ένα σημείο B είναι **εσωτερικό σημείο** του κύκλου C, αν και μόνο αν:

$$\mathbf{KB < \rho}$$

- Ένα σημείο Γ είναι **εξωτερικό σημείο** του κύκλου C, αν και μόνο αν:

$$\mathbf{K\Gamma > \rho}$$



Εφαρμογή

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x+2)^2+(y-1)^2=25$ και τα σημεία A(− 6, 4), B(2, 3) και Γ(4, 5). Να βρείτε:

α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C,

β) τη σχετική θέση των σημείων A, B και Γ ως προς τον κύκλο C.

Λύση

α) Η εξίσωση του κύκλου C γράφεται:

$$\big(x-(-2)\big)^2+(y-1)^2=5^2$$

Επομένως το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο K(− 2, 1) και η ακτίνα του είναι ρ = 5.

β) • Για το σημείο A(− 6, 4) έχουμε:

$$KA=\sqrt{(-6+2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5=\rho$$

Άρα το σημείο A(−6, 4) ανήκει στον κύκλο C.

• Για το σημείο B(2, 3) έχουμε:

$$KB=\sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}<5=\rho$$

Άρα το σημείο B(2, 3) είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C.

• Για το σημείο Γ(4, 5) έχουμε:

$$K\Gamma=\sqrt{(4+2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}>5=\rho$$

Άρα το σημείο Γ(4, 5) είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C.

11.4 Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής:

$$\mathbf{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \quad με \quad A^2+B^2-4\Gamma>0} \qquad (1)$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει κύκλο.

Απόδειξη

Ευθύ

Θα αποδείξουμε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής (1). Αν ο κύκλος C έχει κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ, τότε η εξίσωσή του είναι:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2 \Leftrightarrow x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2=\rho^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+(-2x_0)\cdot x+(-2y_0)\cdot y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$.

Αντίστροφο

Θα αποδείξουμε ότι κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει κύκλο. Είναι:

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \Leftrightarrow x^2+Ax+y^2+By=-\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{A}{2}x+y^2+2\cdot\frac{B}{2}y=-\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}+y^2+2\cdot\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4} \qquad (2)$$

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, τότε η εξίσωση (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.
- Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$, τότε η εξίσωση (2) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

- Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$, τότε η εξίσωση (2) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x, y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

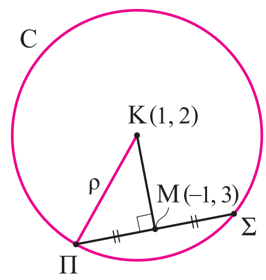
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΜΠ έχουμε:

$$\Pi M^2 = K\Pi^2 - KM^2 \Leftrightarrow \Pi M^2 = \sqrt{10}^2 - \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi M^2 = 5 \Leftrightarrow \Pi M = \sqrt{5}$$

Άρα το μήκος της χορδής ΠΣ είναι:

$$\Pi\Sigma = 2\Pi M = 2\sqrt{5}$$



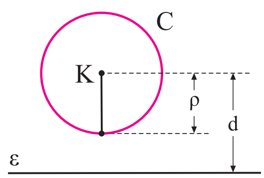
11.8 Σχετική θέση ευθείας και κύκλου

Έστω C ένας κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ και ε μια ευθεία. Ισχύουν τα εξής:

- Η ευθεία ε **δεν έχει κοινά σημεία** με τον κύκλο C, αν και μόνο αν:

  $$\mathbf{d(K, \varepsilon) > \rho}$$

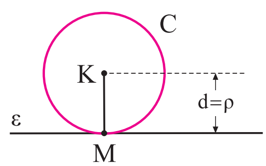
  Στην περίπτωση αυτή **το σύστημα** των εξισώσεων του κύκλου C και της ευθείας ε **είναι αδύνατο**.



- Η ευθεία ε **έχει ένα κοινό σημείο** με τον κύκλο C (**εφάπτεται** στον C), αν και μόνο αν ισχύει:

  $$\mathbf{d(K, \varepsilon) = \rho}$$

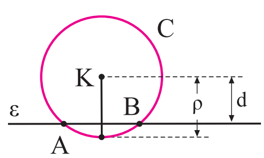
  Στην περίπτωση αυτή **το σύστημα** των εξισώσεων του κύκλου C και της ευθείας ε **έχει μοναδική λύση** $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$, που είναι και οι συντεταγμένες του σημείου επαφής M.



- Η ευθεία ε **έχει δύο (διαφορετικά) κοινά σημεία** με τον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει:

  $$\mathbf{d(K, \varepsilon) < \rho}$$

  Στην περίπτωση αυτή **το σύστημα** των εξισώσεων του κύκλου C και της ευθείας ε **έχει δύο λύσεις**, που είναι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων A και B της ε και του C.



Εφαρμογή

Δίνεται ο κύκλος C: $(\mathbf{x-2})^2 + (\mathbf{y-1})^2 = \mathbf{10}$ και οι ευθείες:

$$\mathbf{\varepsilon_1: 3x - 4y + 18 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 2x - y - 8 = 0}$$

Να βρείτε:

α) τη σχετική θέση του κύκλου C με καθεμία από τις ευθείες ε_1 και ε_2,

β) τα κοινά σημεία του κύκλου C με όποια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 τον τέμνει,

γ) την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία ζ: $\alpha x - y + \alpha + 2 = 0$ να εφάπτεται στον κύκλο C.

Λύση

Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(2, 1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{10}$.

α) Βρίσκουμε τις αποστάσεις του κέντρου Κ από τις ευθείες ε_1 και ε_2. Έχουμε:

- $d(K, \varepsilon_1) = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 18|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{20}{5} = 4 > \sqrt{10}$

  Άρα η ευθεία ε_1 δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C, δηλαδή δεν τέμνει τον κύκλο C.

- $d(K, \varepsilon_2) = \dfrac{|2 \cdot 2 - 1 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|-5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < \sqrt{10}$

  Άρα η ευθεία ε_2 τέμνει τον κύκλο C.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής του κύκλου C και της ευθείας ε_2, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x - y - 8 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y = 2x - 8 & (1) \\ (x-2)^2 + (2x-9)^2 = 10 & (2) \end{array}\right.$$

Έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 36x + 81 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 40x + 75 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = 5)$$

Από την εξίσωση (1) για $x = 3$ βρίσκουμε $y = -2$ και για $x = 5$ βρίσκουμε $y = 2$. Άρα ο κύκλος C και η ευθεία ε_2 τέμνονται στα σημεία:

$$M(3, -2) \quad \text{και} \quad N(5, 2)$$

γ) Η ευθεία ζ: $\alpha x - y + \alpha + 2 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο C, αν και μόνο αν:

$$d(K, \zeta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2\alpha - 1 + \alpha + 2|}{\sqrt{\alpha^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |3\alpha + 1| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\alpha^2 + 1} \Leftrightarrow |3\alpha + 1|^2 = \left(\sqrt{10} \cdot \sqrt{\alpha^2 + 1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

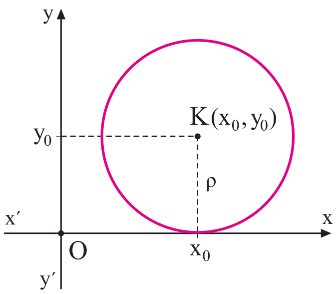
$$\Leftrightarrow (3\alpha + 1)^2 = 10(\alpha^2 + 1) \Leftrightarrow 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 10\alpha^2 + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

11.9 Κύκλος που εφάπτεται στον άξονα $x'x$ ή στον άξονα $y'y$

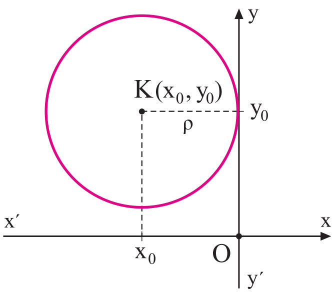
- Ένας κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ εφάπτεται στον άξονα $x'x$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\rho = |y_0|$$



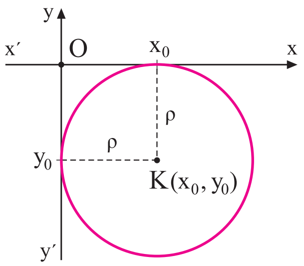
- Ένας κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ εφάπτεται στον άξονα $y'y$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\rho = |x_0|$$



- Ένας κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ εφάπτεται και στους δύο άξονες $x'x$ και $y'y$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\rho = |x_0| = |y_0|$$



Εφαρμογή

Δίνεται το σημείο $K(-1, 3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ και εφάπτεται:

i) στον άξονα $x'x$, ii) στον άξονα $y'y$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έχει κέντρο το σημείο Λ που ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο και για το οποίο ισχύει $|\overrightarrow{K\Lambda}| = 2\sqrt{5}$.

Λύση

α) i) Ο κύκλος C_1 με κέντρο $K(-1, 3)$ που εφάπτεται στον άξονα $x'x$ έχει ακτίνα:

$$\rho = |y_K| = |3| = 3$$

Άρα ο κύκλος C_1 έχει εξίσωση $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$.

ii) Ο κύκλος C_2 με κέντρο $K(-1, 3)$ που εφάπτεται στον άξονα $y'y$ έχει ακτίνα:

$$\rho = |x_K| = |-1| = 1$$

Άρα ο κύκλος C_2 έχει εξίσωση $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1$.

β) Έστω $\Lambda(x_1, y_1)$ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου C_3. Το Λ είναι σημείο του 4ου τεταρτημορίου, άρα ισχύει ότι $x_1 > 0$ και $y_1 < 0$. Ο κύκλος C_3 εφάπτεται και στους δύο άξονες, άρα ισχύουν:

$$\rho = |x_1| = x_1 \quad \text{και} \quad \rho = |y_1| = -y_1$$

Επομένως ισχύει $x_1 = -y_1$, άρα είναι $\Lambda(-y_1, y_1)$, οπότε $\overrightarrow{K\Lambda} = (-y_1 + 1, y_1 - 3)$.
Έχουμε:

$$|\overrightarrow{K\Lambda}| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(1-y_1)^2 + (y_1-3)^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2y_1 + y_1^2 + y_1^2 - 6y_1 + 9 = 20 \Leftrightarrow 2y_1^2 - 8y_1 - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 - 4y_1 - 5 = 0 \Leftrightarrow (y_1 = 5 \;\text{ ή }\; y_1 = -1)$$

Όμως $y_1 < 0$, άρα δεκτή είναι η τιμή $y_1 = -1$. Επομένως ο κύκλος C_3 έχει κέντρο $\Lambda(1, -1)$ και ακτίνα $\rho = 1$, άρα η εξίσωσή του είναι:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

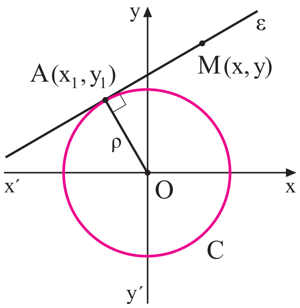
11.10 Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο το σημείο O(0, 0)

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Η εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

Απόδειξη

Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην εφαπτομένη ε, αν και μόνο αν:



$$OA \perp AM \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \qquad (1)$$

Όμως είναι $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$, άρα:

$$(1) \Leftrightarrow (x_1, y_1) \cdot (x - x_1, y - y_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xx_1 - x_1^2 + yy_1 - y_1^2 = 0 \Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 \qquad (2)$$

Όμως το σημείο $A(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = \rho^2$, άρα ισχύει ότι $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$.
Επομένως έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

Εφαρμογή

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του $A(-4, 3)$,

β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία:

$$\zeta:\ 4x - 3y + 2017 = 0$$

γ) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $P(5, 10)$.

Λύση

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο του $A(-4, 3)$ είναι:

$$-4x + 3y = 25 \Leftrightarrow 4x - 3y + 25 = 0$$

β) Έστω ε_1 η ζητούμενη εφαπτομένη και $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Το σημείο M ανήκει στον κύκλο C, άρα ισχύει:

$$x_1^2 + y_1^2 = 25 \qquad (1)$$

Η εφαπτομένη ε_1 του C στο M έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_1 : xx_1 + yy_1 = 25$$

Ισχύει ότι:

$$\varepsilon_1 \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{4}{3} = -1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4} y_1 \qquad (2)$$

Άρα έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} y_1\right)^2 + y_1^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{16} y_1^2 + y_1^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{25 y_1^2}{16} = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 = 16 \Leftrightarrow (y_1 = 4 \ \text{ ή } \ y_1 = -4)$$

Από τη σχέση (2) για $y_1 = 4$ βρίσκουμε $x_1 = 3$ και για $y_1 = -4$ βρίσκουμε $x_1 = -3$. Επομένως έχουμε δύο σημεία επαφής, τα $M(3, 4)$ και $M'(-3, -4)$, στα οποία οι εφαπτομένες του C είναι αντίστοιχα:

$$\varepsilon_1:\ 3x + 4y = 25 \quad \text{και} \quad \varepsilon_1':\ -3x - 4y = 25$$

γ) Έστω ε_2 η ζητούμενη εφαπτομένη και $N(x_2, y_2)$ το σημείο επαφής. Το σημείο N ανήκει στον κύκλο C, άρα ισχύει:

$$x_2^2 + y_2^2 = 25 \qquad (3)$$

11.12 Εφαπτομένη κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ που έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης

Έστω C ένας κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ. Για να βρούμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε του κύκλου C που έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ, εργαζόμαστε ως εξής:

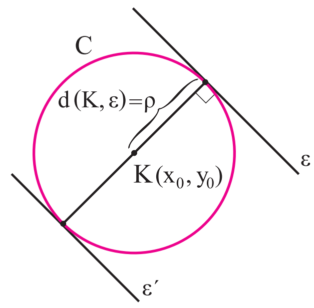
- Θεωρούμε ότι η ε έχει εξίσωση της μορφής:

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow \lambda x - y + \beta = 0 \qquad (1)$$

- Η ευθεία ε εφάπτεται στον κύκλο C, αν και μόνο αν:

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \ldots$$

- Από την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός β, τις οποίες αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1) και προκύπτουν έτσι οι εξισώσεις των ζητούμενων εφαπτομένων.



Εφαρμογή

Δίνεται ο κύκλος C: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία:

$$\zeta: \ \mathbf{3x - 6y - 2017 = 0}$$

Λύση

Έστω ε η ζητούμενη εφαπτομένη. Ισχύει ότι:

$$\varepsilon \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$$

Επομένως η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση της μορφής:

$$\varepsilon: y = -2x + \beta \Leftrightarrow 2x + y - \beta = 0$$

Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(2, 1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{20}$. Η ευθεία ε εφάπτεται στον κύκλο C, αν και μόνο αν:

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 2 + 1 - \beta|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |5 - \beta| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} \Leftrightarrow |5 - \beta| = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5 - \beta = 10 \ \text{ ή } \ 5 - \beta = -10) \Leftrightarrow (\beta = -5 \ \text{ ή } \ \beta = 15)$$

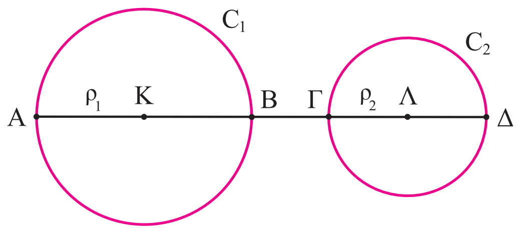
Άρα οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι:

$$\varepsilon: \ y = -2x - 5 \quad \text{και} \quad \varepsilon': \ y = -2x + 15$$

ii) Η ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του C_1 από ένα σημείο του C_2 είναι:

$$d_{min} = B\Gamma = K\Lambda - KB - \Gamma\Lambda =$$

$$= K\Lambda - \rho_1 - \rho_2 = 10 - 3 - 2 = 5$$



Η μέγιστη απόσταση ενός σημείου του C_1 από ένα σημείο του C_2 είναι:

$$d_{max} = A\Delta = K\Lambda + AK + \Lambda\Delta = K\Lambda + \rho_1 + \rho_2 = 10 + 3 + 2 = 15$$

Θέματα προς απάντηση

Εξίσωση κύκλου

11.19 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0) και:

α) ακτίνα $\rho = 3$,

β) διέρχεται από το σημείο $A(-6, 8)$,

γ) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 5 = 0$.

11.20 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-2, 3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 7)$.

11.21 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-4, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία:

$$\varepsilon: 3x - 4y + 1 = 0$$

11.22 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με:

$$A(-2, -1) \quad \text{και} \quad B(6, 3)$$

11.23 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(5, -3)$ και εφάπτεται:

α) στον άξονα $x'x$, **β)** στον άξονα $y'y$.

11.24 Δίνεται κύκλος C που εφάπτεται στον άξονα $x'x$, διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(0, 1)$ και το κέντρο του ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.

11.25 Δίνεται κύκλος C κέντρου K, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 1)$ και $B(6, 5)$, και το διάνυσμα $\overrightarrow{KB}$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης 3.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Gamma(2, 5)$ ανήκει στον κύκλο C και να βρείτε το αντιδιαμετρικό του σημείο.

γ) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 6 = 0$. Να βρείτε:

i) τη σχετική θέση της ευθείας ε και του κύκλου C,

ii) την εξίσωση του κύκλου C' που είναι συμμετρικός του κύκλου C ως προς την ευθεία ε.

11.26 Θεωρούμε τον κύκλο C_1 που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$ και τον κύκλο C_2 που έχει διάμετρο ΒΓ με $B(3, 2)$ και $\Gamma(-1, 4)$. Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2,

β) τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2.

11.27 Δίνεται κύκλος με εξίσωση:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$$

α) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου.

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

β) Να εξετάσετε ποια από τα $M(3, 0)$, $N(0, -4)$, $P(3, -7)$ και $\Sigma(1, 1)$ είναι σημεία του κύκλου.
γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $O(0, 0)$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του κύκλου.

11.28 Δίνονται τα σημεία $A(3, 9)$, $B(9, 7)$, $\Gamma(7, 1)$ και $\Delta(1, 3)$.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.
β) Να βρείτε την εξίσωση:
i) του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓΔ,
ii) του εγγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓΔ.

11.29 Δίνεται κύκλος C με κέντρο $K(4\alpha - 5, \alpha)$, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(5, 6)$. Να βρείτε:
α) την εξίσωση του κύκλου C,
β) τα σημεία τομής Γ, Δ του κύκλου C με τον άξονα $x'x$,
γ) την εξίσωση του κύκλου C_1 που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

11.30 Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(1, 0)$, $B(3, -2)$ και την ευθεία:

$$\varepsilon:\ x + y + 1 = 0$$

Να βρείτε:
α) την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος ΑΒ,
β) την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε.
(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

11.31 Δίνεται ο κύκλος C_1 με κέντρο:

$$K(-2, -2)$$

ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(-5, -3)$ και ο κύκλος C_2 με κέντρο $\Lambda(1, 4)$, ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y - 17 = 0$. Να βρείτε:
α) τις εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2,
β) τα κοινά σημεία Β και Γ των κύκλων C_1 και C_2,
γ) την εξίσωση του κύκλου C_3 που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

11.32 Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $K(2, -1)$ και $A(-6, 5)$.
α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Κ που διέρχεται από το Α έχει εξίσωση:

$$C:\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 100$$

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο Α και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C.
(Τράπεζα Θεμάτων - 2ο θέμα)

11.33 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με:

$$A(1, 4), \quad B(-2, 3) \quad \text{και} \quad \Gamma(4, -5)$$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90°$.
β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

11.34 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-3, 1)$, $B(3, 7)$ και $\Gamma(-1, -5)$. Να βρείτε:
α) τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών ΑΒ και ΑΓ,
β) την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

11.35 Να βρείτε τι παριστάνει καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$
β) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 = 0$
γ) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 10 = 0$
δ) $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

11.36 Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \qquad (1)$$

και:

$$x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0 \qquad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστά-

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο την αρχή των αξόνων.

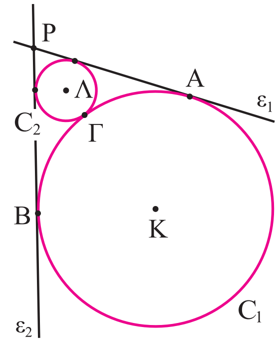
γ) Θεωρούμε σταθερό σημείο $P(\alpha, 0)$ με $\alpha > 5$. Από το P φέρνουμε μεταβλητή ευθεία ζ που τέμνει τον κύκλο C στα σημεία Σ και Τ. Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ του ΣΤ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα ως συνάρτηση του α.

11.114 Στο επόμενο σχήμα φαίνεται κύκλος C_1 με κέντρο $K(\alpha, -\alpha-1)$ και ε_1, ε_2 είναι οι εφαπτομένες του στα σημεία του $A\left(-\frac{9}{5}, -\frac{32}{5}\right)$ και $B(11, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 7$ και να βρείτε την εξίσωση του C_1.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ο οποίος εφάπτεται στις ευθείες ε_1 και ε_2 και στον κύκλο C_1.



Θέματα των οποίων η λύση απαιτεί ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη

11.115 Δίνεται κύκλος C ο οποίος εφάπτεται στον άξονα y′y. Αν τα σημεία $\Sigma(\alpha, \beta)$ και $T(\gamma, \delta)$ αποτελούν τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου C, να αποδείξετε ότι $(\delta - \beta)^2 = 4\alpha\gamma$.

11.116 Από το σημείο $M(x_1, y_1)$ του κύκλου:

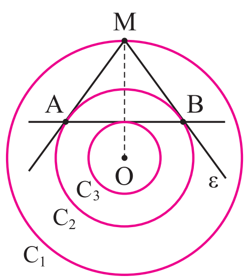
$$C_1:\ x^2 + y^2 = \alpha^2$$

φέρνουμε εφαπτομένες ΜΑ και ΜΒ προς τον κύκλο:

$$C_2:\ x^2 + y^2 = \beta^2$$

Αν η χορδή ΑΒ εφάπτεται στον κύκλο:

$$C_3:\ x^2 + y^2 = \gamma^2$$



να αποδείξετε ότι τα α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

11.117 Δίνεται η ευθεία:

$$\varepsilon:\ y = x + 2$$

και ο κύκλος:

$$C:\ x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y = 0$$

Να προσδιορίσετε το λ, ώστε:

α) η ε να τέμνει τον κύκλο C,

β) η χορδή που ορίζει η ε στον κύκλο C να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

11.118 Δίνεται ο κύκλος:

$$C:\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

και η εφαπτομένη ε του C στο σημείο του $A(0, 3)$. Να βρείτε σημείο P της ε τέτοιο, ώστε οι εφαπτομένες του C που διέρχονται από το P να είναι κάθετες.

11.119 Θεωρούμε σημείο Α που κινείται στον άξονα y′y και σημείο Β που κινείται στην ευθεία $\varepsilon:\ y = x$ έτσι, ώστε $AB = 4$. Από το Α φέρουμε ευθεία ε_1 κάθετη στον άξονα y′y και από το Β φέρουμε ευθεία ε_2 κάθετη στην $y = x$. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής Μ των ε_1 και ε_2 κινείται σε κύκλο.

11.120 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2, y_1 και y_2 για τους οποίους ισχύουν:

$$x_1^2 + y_1^2 = 4(x_1 + y_1)$$

και:

$$x_2^2 + y_2^2 = 4(x_2 + y_2)$$

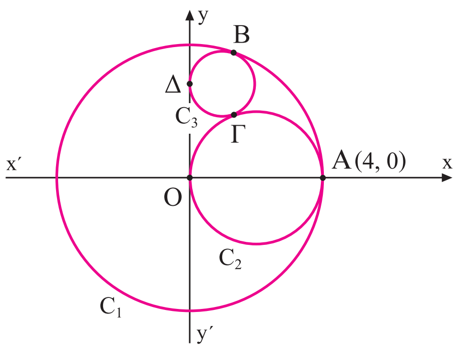
Να αποδείξετε ότι:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq 32$$

11.121 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 3 - \sqrt{-x^2 + 8x - 12}$$

11.122 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ο κύκλος C_1 που έχει κέντρο $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, 0)$, ο κύκλος C_2 που έχει διάμετρο ΟΑ και ο κύκλος C_3 που εφάπτεται στον άξονα $y'y$ και στους κύκλους C_1 (εσωτερικά στο Β) και C_2 (εξωτερικά στο Γ).



α) Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2.

β) Να αποδείξετε ότι το κέντρο του κύκλου C_3 είναι το $K(1, 2\sqrt{2})$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

11.123 Θεωρούμε τους κύκλους με εξίσωση:

$$(x-\alpha)^2+(y-2\alpha)^2=4\alpha^2$$

με $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

Ερωτήσεις τύπου Σωστό ή Λάθος

11.124 Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α) Η εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $x^2+y^2+6x-4y+14=0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-3, 2)$.

γ) Η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ που διέρχεται από το σημείο $M(x_1, y_1)$ εκτός του C έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

δ) Οι συντεταγμένες του κέντρου ενός κύκλου επαληθεύουν την εξίσωσή του.

ε) Αν $\Gamma<0$, τότε η εξίσωση:

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

παριστάνει κύκλο.

Ερωτήσεις θεωρίας

11.125 **α)** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$x^2+y^2=\rho^2$$

β) Ποιος κύκλος λέγεται μοναδιαίος;

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$xx_1+yy_1=\rho^2$$

δ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$.

ε) Να αποδείξετε ότι:
«Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής:

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \quad \text{με } A^2+B^2-4\Gamma>0 \qquad (1)$$

και αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει κύκλο.»

Κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

Β. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \qquad (1)$$

α) Να γράψετε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί Α, Β και Γ, ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

β) Να γράψετε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που παριστάνει η εξίσωση (1).

Γ. Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

α) Η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 2016$ στο σημείο του $M(x_1, y_1)$, με $x_1, y_1 \neq 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης:

Α: $\dfrac{x_1}{y_1}$ **Β:** $-\dfrac{x_1}{y_1}$ **Γ:** $\dfrac{y_1}{x_1}$ **Δ:** $-\dfrac{y_1}{x_1}$

β) Δίνεται κύκλος C_1 με κέντρο K_1 και ακτίνα ρ_1 και κύκλος C_2 με κέντρο K_2 και ακτίνα ρ_2. Οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εσωτερικά, αν και μόνο αν:

Α: $K_1K_2 = |\rho_1 - \rho_2|$ **Β:** $K_1K_2 = \rho_1 + \rho_2$

Γ: $K_1K_2 > \rho_1 + \rho_2$ **Δ:** $|\rho_1 - \rho_2| < K_1K_2 < |\rho_1 + \rho_2|$

γ) Τα κέντρα των κύκλων $C_1: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma_1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 + Ax - By + \Gamma_2 = 0$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς:

Α: την αρχή των αξόνων. **Β:** την ευθεία $y = x$.

Γ: τον άξονα $y'y$. **Δ:** τον άξονα $x'x$.

δ) Ο κύκλος $C: x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ εφάπτεται στον άξονα $y'y$, αν και μόνο αν:

Α: $\alpha^2 = 4\gamma$ **Β:** $\beta^2 = 4\gamma$ **Γ:** $\alpha^2 + \beta^2 = 4\gamma$ **Δ:** $|\alpha| = |\beta|$

Θέμα 2ο

Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του Α.

γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $P(10, -5)$.

ε) Έστω ΒΓ η χορδή του κύκλου C που έχει μέσο το σημείο $M(-2, 4)$. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ΒΓ,

ii) τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.