

Φίλη μαθήτριά, φίλε μαθητή,

Το βιβλίο αυτό είναι ένα **πλήρες βοήθημα**. Με τη σωστή μελέτη του γίνονται σαφείς και απόλυτα κατανοητές από όλους τους μαθητές οι πρωτοεμφανιζόμενες και συνήθως δύσκολες έννοιες των Μαθηματικών της Γ' Λυκείου.

Η ύλη είναι χωρισμένη σε ενότητες, καθεμία από τις οποίες περιέχει:

- **βασική θεωρία**,
- **βασικές λυμένες ασκήσεις**, οι οποίες πρέπει να μελετηθούν όλες με προσοχή, διότι περιέχουν όλη τη **μεθοδολογία** για τη λύση των ασκήσεων,
- **προτεινόμενες ασκήσεις για λύση**, διαβαθμισμένης δυσκολίας, οι οποίες είναι χωρισμένες σε κατηγορίες,
- **συνδυαστικά θέματα**, στα οποία οι πρωτοεμφανιζόμενες έννοιες κάθε ενότητας συνδυάζονται με παλαιότερες από προηγούμενες ενότητες,
- **θέματα των οποίων η λύση απαιτεί ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη**, αντίστοιχου επιπέδου με τα απαιτητικά ερωτήματα των Πανελληνίων Εξετάσεων,
- κριτήρια αξιολόγησης.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν **απαντήσεις**, **υποδείξεις** και **λύσεις** σε όλα τα θέματα προς απάντηση.

Ο συνάδελφος Δημήτρης Τσάκος, με τις εύστοχες παρατηρήσεις του, ήταν πολύτιμος αρωγός σε όλη τη διαδικασία έκδοσης του βιβλίου.

Βασίλης Γ. Παπαδάκης
Μαθηματικός

Περιεχόμενα

1. Συναρτήσεις (I)	11
2. Συναρτήσεις (II)	54
3. Μονότονες συναρτήσεις	77
4. Συνάρτηση $1 - 1$ - Αντίστροφη συνάρτηση	109
5. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Συναρτήσεις.	141
6. Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	147
7. Ιδιότητες των ορίων.	157
8. Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$	210
9. Όριο συνάρτησης στο άπειρο	235
10. Συνέχεια συνάρτησης (I)	280
11. Συνέχεια συνάρτησης (II)	301
12. Συνέχεια συνάρτησης (III)	326
13. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Όριο - Συνέχεια συνάρτησης	351
14. Η έννοια της παραγώγου.	359
15. Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτηση - Κανόνες παραγώγισης.	388
16. Η εξίσωση της εφαπτομένης.	431
17. Ρυθμός μεταβολής	458
Απαντήσεις - Υποδείξεις	483

9

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Βασική θεωρία και εφαρμογές

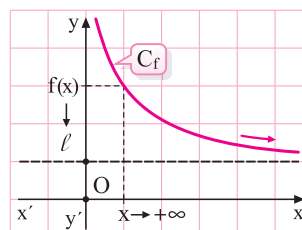
9.1 Όριο συνάρτησης στο $\pm\infty$

Όριο συνάρτησης στο $+\infty$

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Όταν το x αυξάνεται απεριόριστα, δηλαδή $x \rightarrow +\infty$, τότε:

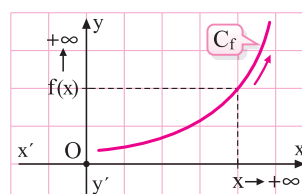
- το $f(x)$ μπορεί να προσεγγίζει έναν αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f στο $+\infty$ έχει όριο το ℓ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$



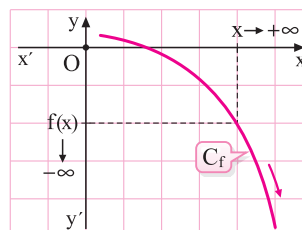
- το $f(x)$ μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



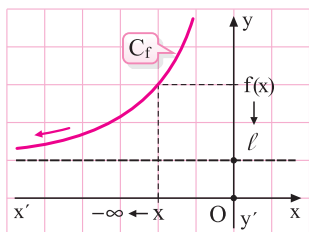
- το $f(x)$ μπορεί να μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

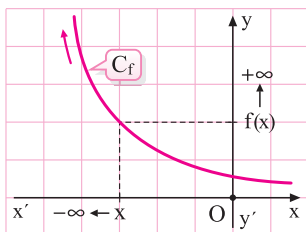


Όριο συνάρτησης στο $-\infty$

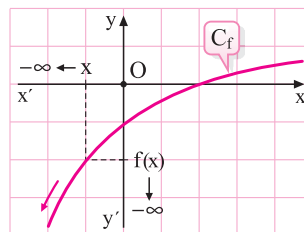
Αν η συνάρτηση f ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, και το x μειώνεται απεριόριστα, δηλαδή $x \rightarrow -\infty$, τότε ισχύουν για την f ανάλογα τα παρακάτω:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Βασικά όρια

Ιδιαίτερα χρήσιμα στον υπολογισμό ορίων στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ είναι τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$, $v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος, } v \in \mathbb{N}^* \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός, } v \in \mathbb{N} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^6$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5}$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$

στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^8}$

Λύση

Σύμφωνα με τα παραπάνω βασικά όρια στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ έχουμε:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 = +\infty$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} = 0$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^8} = 0$

9.2 Όριο στο $\pm \infty$ πολωνυμικής συνάρτησης

Για την πολωνυμική συνάρτηση:

$$P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{με } a_v \neq 0$$

ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_v x^v) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_v x^v)$$

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 5x^2 + 7x - 6)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + 7x^2 - 5x + 6)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + x^2 - 3)$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^6 + 5x^3 - 7x^2 + 13)$

Λύση

α) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 5x^2 + 7x - 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) \stackrel{2(+\infty)}{=} +\infty$$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + 7x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4) \stackrel{3(+\infty)}{=} +\infty$$

γ) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3) \stackrel{(-5)(-\infty)}{=} +\infty$$

δ) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^6 + 5x^3 - 7x^2 + 13) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^6) \stackrel{(-2)(+\infty)}{=} -\infty$$

9.3 Όριο στο $\pm \infty$ αθροίσματος ή διαφοράς πολωνύμων τα οποία είναι υψωμένα σε δυνάμεις

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 - 5x + 7)^3 - (-2x^4 + 3x^2 - 5)^5]$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(2x^3 + 2x^2 - 6)^4 + (-3x^4 + 5x^3 + 4x)^3]$

9.15 Όρια συναρτήσεων της μορφής $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(\alpha^x, \beta^x, \dots)}{g(\alpha^x, \beta^x, \dots)}$

Αν σε ένα όριο της μορφής:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(\alpha^x, \beta^x, \dots)}{g(\alpha^x, \beta^x, \dots)}$$

εμφανιστεί απροσδιόριστη μορφή, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

- Αν $x \rightarrow +\infty$, τότε στον αριθμητή και στον παρονομαστή βγάζουμε κοινό παράγοντα το εκθετικό με τη **μεγαλύτερη βάση**.
- Αν $x \rightarrow -\infty$, τότε στον αριθμητή και στον παρονομαστή βγάζουμε κοινό παράγοντα το εκθετικό με τη **μικρότερη βάση**.

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x - 6}{2^x + 4} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+2} + 2^x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1} + 2^{x+3}}{5^x - 2^{x+1}}$$

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

Επομένως είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x - 6}{2^x + 4} = \frac{0 + 0 - 6}{0 + 4} = -\frac{3}{2}$$

β) Το όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+2} + 2^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2 \cdot 2^x}{9 \cdot 3^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(1 + \frac{2 \cdot 2^x}{3^x}\right)}{3^x \left(9 + \frac{2^x}{3^x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^x}{9 + \left(\frac{2}{3}\right)^x} = \frac{1 + 2 \cdot 0}{9 + 0} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

γ) Το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1} + 2^{x+3}}{5^x - 2^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 \cdot 5^x + 8 \cdot 2^x}{5^x - 2 \cdot 2^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x \left(\frac{5 \cdot 5^x}{2^x} + 8 \right)}{2^x \left(\frac{5^x}{2^x} - 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 \left(\frac{5}{2} \right)^x + 8}{\left(\frac{5}{2} \right)^x - 2} = \frac{5 \cdot 0 + 8}{0 - 2} = -4$$

9.16 Εκθετικά όρια με παράμετρο

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - a^x}{2^x + a^{x+1}}$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ με:

$$a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $a > 2$, το όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - a^x}{2^x + a^{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2^x - a^x}{2^x + a \cdot a^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \left(\frac{2 \cdot 2^x}{a^x} - 1 \right)}{a^x \left(\frac{2^x}{a^x} + a \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \left(\frac{2}{a} \right)^x - 1}{\left(\frac{2}{a} \right)^x + a} = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 + a} = -\frac{1}{a} \end{aligned}$$

διότι είναι $0 < \frac{2}{a} < 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{a} \right)^x = 0$.

- Αν $0 < a < 2$ με $a \neq 1$, το όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - a^x}{2^x + a^{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2^x - a^x}{2^x + a \cdot a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \left(2 - \frac{a^x}{2^x} \right)}{2^x \left(1 + \frac{a \cdot a^x}{2^x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \left(\frac{a}{2} \right)^x}{1 + a \left(\frac{a}{2} \right)^x} = \frac{2 - 0}{1 + a \cdot 0} = 2 \end{aligned}$$

διότι είναι $0 < \frac{a}{2} < 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{2} \right)^x = 0$.

- Αν $a = 2$, το όριο γίνεται:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - 2^x}{2^x + 2^{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2^x - 2^x}{2^x + 2 \cdot 2^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3 \cdot 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

9.17 Εκθετικά όρια που υπολογίζονται με αλλαγή μεταβλητής

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x^2+3}{x+5}}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x+1} - 4^x + 2^x + 5}{8^x + 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} + 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3^x}{\pi^x} \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)^x \right]$

Λύση

α) Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x^2+3}{x+5}} = \ell$, θέτουμε $u = \frac{-x^2+3}{x+5}$.
Είναι:

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+3}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

Επομένως:

$$\ell = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

β) Το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2^{3x} - 2^{2x} + 2^x + 5}{2^{3x} + 3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(2^x)^3 - (2^x)^2 + 2^x + 5}{(2^x)^3 + 3(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x + 1} = \ell$$

Θέτουμε $u = 2^x$. Είναι $u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$, οπότε:

$$\ell = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2u^3 - u^2 + u + 5}{u^3 + 3u^2 + 2u + 1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2u^3}{u^3} = 2$$

γ) Το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3^x}{\pi^x} \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)^x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)^x}{\frac{\pi^x}{3^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)^x}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^x} = \ell$$

Θέτουμε $u = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.

Είναι:

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^x = 0$$

διότι $\frac{\pi}{3} > 1$. Επομένως:

$$\ell = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta \mu u}{u} = 1$$

9.18 Όριο λογαριθμικής συνάρτησης

- Αν $a > 1$, τότε ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

και:

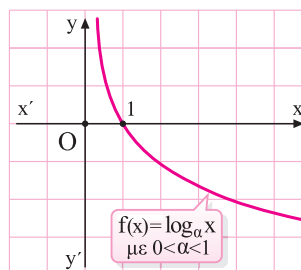
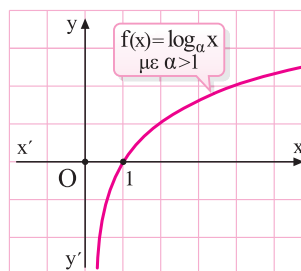
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

- Αν $0 < a < 1$, τότε ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

και:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$



Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$

β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x + \ln x)$

Λύση

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, οπότε είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x + \ln x) = \underline{\underline{(-\infty) + (-\infty)}} = -\infty$$

9.19 Λογαριθμικά όρια που υπολογίζονται με αλλαγή μεταβλητής

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\ln^2 x - 5\ln x + 4}{3\ln^2 x + 2\ln x - 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2 - \eta\mu x}{x}$$

Λύση

$\alpha)$ Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\ln^2 x - 5\ln x + 4}{3\ln^2 x + 2\ln x - 1} = \ell$, θέτουμε $u = \ln x$. Είναι:

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Επομένως είναι:

$$\ell = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{6u^2 - 5u + 4}{3u^2 + 2u - 1} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{6u^2}{3u^2} = \lim_{u \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

$\beta)$ Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2 - \eta\mu x}{x} = \ell$, θέτουμε $u = \frac{2 - \eta\mu x}{x}$. Είναι:

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \eta\mu x}{x} \quad (1)$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \eta\mu x \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{2 - \eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{x}$$

Ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \eta\mu x}{x} = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} u_0 = 0$$

Επίσης με $x > 0$ είναι και $u = \frac{2 - \eta\mu x}{x} > 0$. Επομένως:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2 - \eta\mu x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

9.20 Όρια συναρτήσεων της μορφής $\ln f(x) - \ln g(x)$

Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^3 - 5x) - 2\ln(x + 2))$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2^x + 1) - x)$$

Λύση

α) Το όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^3 - 5x) - 2\ln(x+2)) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^3 - 5x) - \ln(x+2)^2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^3 - 5x}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 4x + 4} = \ell \end{aligned}$$

Θέτουμε $u = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 4x + 4}$. Είναι:

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Επομένως είναι:

$$\ell = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

β) Το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2^x + 1) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2^x + 1}{e^x} = \ell$$

Θέτουμε $u = \frac{2^x + 1}{e^x} > 0$. Είναι:

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{2}{e} \right)^x + \frac{1}{e^x} \right] = 0 + 0 = 0$$

Επομένως είναι:

$$\ell = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

9.21 Όριο στο $\pm\infty$ και κριτήριο παρεμβολής

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2x^3 - 3x^2 \leq (x^3 - 5x + 2)f(x) \leq 2x^3 + 3x^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν $a, \beta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν:

- $\ln a + \ln \beta = \ln(a\beta)$
- $\ln a - \ln \beta = \ln \frac{a}{\beta}$
- $\kappa \cdot \ln a = \ln a^\kappa$
- $\ln e^\kappa = \kappa$

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Άρα όταν $x \rightarrow -\infty$ ισχύει ότι $x^3 - 5x + 2 < 0$.

Δηλαδή υπάρχει $a < 0$, ώστε $x^3 - 5x + 2 < 0$ για κάθε $x < a$. Έτσι για $x < a$ έχουμε:

$$2x^3 - 3x^2 \leq (x^3 - 5x + 2)f(x) \leq 2x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 3x^2}{x^3 - 5x + 2} \geq f(x) \geq \frac{2x^3 + 3x^2}{x^3 - 5x + 2}$$

Όμως ισχύουν:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2}{x^3 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x^2}{x^3 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

β) Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Άρα όταν $x \rightarrow +\infty$ ισχύει ότι $x^3 - 5x + 2 > 0$.

Δηλαδή υπάρχει $\beta > 0$, ώστε $x^3 - 5x + 2 > 0$ για κάθε $x > \beta$. Έτσι για $x > \beta$ έχουμε:

$$2x^3 - 3x^2 \leq (x^3 - 5x + 2)f(x) \leq 2x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 3x^2}{x^3 - 5x + 2} \leq f(x) \leq \frac{2x^3 + 3x^2}{x^3 - 5x + 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 3x^2}{x(x^3 - 5x + 2)} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2x^3 + 3x^2}{x(x^3 - 5x + 2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 3x^2}{x^4 - 5x^2 + 2x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2x^3 + 3x^2}{x^4 - 5x^2 + 2x}$$

Όμως ισχύουν:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2}{x^4 - 5x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \alpha_v = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{6v^2 - 3v + 2}{2v^2 - v + 3} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{6v^2}{2v^2} = \lim_{v \rightarrow +\infty} 3 = 3$$

Θέματα προς απάντηση

Όρια στο $\pm \infty$ πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων

9.25 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 5x^2 + 6x - 3)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 7x^3 - 5x - 6)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 7x^4 + 6x^2 - 1)$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^4 - x^3 - x - 1)$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x - 6)$

στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^6 + x^5 + 7x^3 + x^2 - 2)$

9.26 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^3 + 5x - 6)(-2x^2 + 3x + 1)]$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(-2x^5 + 3x^2 + 5)(x^4 + 3x - 2)]$

9.27 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 1}{2x^3 + 5x^2 - x - 6}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^3 + 2x + 1}{3x - 11}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{x^3 + 7x - 1}$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 3x - 2}{3x^3 - 5x^2 + 7}$

9.28 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x - 6}{x^2 - 3x + 1} + \frac{2x - 3}{x + 1} \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x - 3}{x^2 + 2x - 6} - \frac{3x^2 - 5x}{x^3 - 6x + 2} \right)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^6 - 7x^3 + x^2 - 1}{3x^3 - x^2 + x} - \frac{3x^4 + 2x - 6}{x^2 + 11x} \right)$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x - 2} + \frac{x^2}{x + 3} \right)$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x + 1} - \frac{x^3}{x - 3} \right)$

στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x + 1} - \frac{x^2 - 4x}{x - 1} \right)$

9.29 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 5x^2 + x - 3}{x - 2} \cdot \frac{3x^4 - 7x^3 + 4}{x^3 - 5}, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{x - 3}{x^2 + x} \cdot \frac{x^3 - 2}{x^2 + 3}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

9.30 Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^6 - 5x^2 + 2)^2 - (x^3 + 7x - 3)^5]$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(2x^3 - x^2 + 5)^6 - (7x^9 + 5x^4 + 2x - 1)^2]$

9.31 Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+3)^{12}(x^2-2x-4)^9}{(2x^3-5x+1)^{10}}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^7(x+4)^{10}}{(x^2+x+1)^6}$

9.32 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{20} + (x+2)^{20} + (x+3)^{20}}{(x^5+1)^4 + (x^2+1)^{10}}$$

Όριο στο $\pm\infty$ και απόλυτη τιμή

9.33 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x^3 - 5x^2 + 3x - 2| - x^3)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^3 + 2x^2 - x + 1| + x^3)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^3 + 3x^2 - 1| - |2x^3 - 7x + 13|)$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^2 + 3x - 5| - |x^3 - 3x^2 + 2| - x^3)$

9.34 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 5x + 13| - 7x^2}{|x^3 - 3x^2 + 5| - x^3}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 + 6x^2 - 7x + 6| + x^3}{|x^2 - 2x + 3| - x^2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + |4x^3 - 5x^2 + 2x - 1|}{-x^3 + 2x^2 - |x^3 + 3x^2 - 2|}$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - |x^2 - 6x + 3|}{x^3 - |x^3 - 5x^2 + 2|}$

9.35 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{|x^3 - 10x + 5| + x^3 - 2x^2}{2x^3 + 3x - 5}$$

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f ,

β) τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Όρια στο $\pm\infty$ άρρητων συναρτήσεων

9.36 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} + 2x \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 5} - 4x \right)$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 3x} \right)$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x\sqrt{x^2 + 4x + 2} - \sqrt{x^2 + 5x} \right)$

9.37 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 5x + 1} - x \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 5x - 3} + x \right)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{16x^2 + 7x - 13} + 6x \right)$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 - 7} - 2x + 1 \right)$

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

9.38 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 + 1})$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 8x + x})$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + x})$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 7x + 2x})$

9.39 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{25x^2 + 4x - 3} - \sqrt{x^2 - x + 2})$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 4})$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 5x + 6} - \sqrt{4x^2 + 2x - 7})$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 + x - 1} - \sqrt{9x^2 - x + 6})$

9.40 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 1} - x)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^2 + 3x - 2} + 2x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt[3]{x^2 - 3})$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[4]{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 + 5x + 3})$

9.41 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3x + 1} - x\sqrt{x + 1})$$

9.42 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5}{\sqrt{4x^2 + 7}}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x - 1}}{5 - x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 7x - 1}}{x^2 - 3x + 1}$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 + x - 2}}{x - 3}$

9.43 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3x}}{x - 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5} - \sqrt{4x^2 + 3x}}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 3x + 2} + 2x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 3x} - \sqrt[4]{7x^2 - 13}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt[5]{x^3 - 2x + 1}}$

9.44 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 2x})$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 3x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x - 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{4x^2 + 3x - 2})$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{9x^2 + 5x} - \sqrt{16x^2 - 7})$

9.45 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x + 1} - \frac{3x^2 + 2x}{3x - 2}, & \text{αν } x < -1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2x, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$$

Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

9.46 Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 4} - \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - x + 2} \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} \right)$

9.47 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$$

Όριο εκθετικής συνάρτησης

9.48 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^x \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{4^x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x}{6^x} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+3}}{3^{x+2}} \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{2x}}{2^{3x}}$$

9.49 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^x - 8}{5^x + 7^x + 4} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^x + 5}{3^x + 4}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{2^x - 5}$$

9.50 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 7^x}{2^x + 3^x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 5^{x+2} + 5 \cdot 3^{x+1}}{2 \cdot 5^{x+1} - 3^{x+2}}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 2^x - 6^{x+2}}{3^{2x} - 2^{x+1}} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^x + 3 \cdot 2^{2x}}{2e^{x+1} - 2^{2x+2}}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+2} + 5^{x-1}}{7^{x+1} + 3^{x+1}}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 2^{x+2} + 3 \cdot 6^x + 11}{6^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 2^{x-1}}$$

9.51 Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{2^x + 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{2^x + 3^x}$$

9.52 Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\pi}{4}\right)^x}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^x + e^x}{\left(\frac{e}{3}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x}$$

9.53 Να βρείτε τα επόμενα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2^x}{3^x} - 5x^3\right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5^x + x^3 + x^2)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 5 \cdot 2^x)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \left(\frac{e}{3}\right)^x - 7x\right)$$

9.54 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^x}{x^2 + x - 4} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 e^x}$$

9.55 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4^{x+2} + 6^x}{x+1} \cdot \frac{6x-5}{4^x + 6^{x+1}} \right)$$

9.56 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot 3^x + 2^{x+1}}{x \cdot 3^{x+2} - 2^x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot 3^{x+2} - 5^{x+1}}{3 \cdot 5^x - x \cdot 3^x}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 3^{x+2} - x \cdot 2^{x+3} + 4x^2 \cdot 5^x}{x^2 \cdot 5^{x+1} + 3x \cdot 2^{x+2} - 7}$$

9.57 Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8^x + 4^x + 2} - \sqrt{4^x - 2^x + 3} \right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^x + 1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^x - \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^x - 1}}$$

9.58 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{x^3-5x+6}{x+4}} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} 3^{\frac{1}{\sin x - 1}}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2x+1+\sqrt{9x^2+5x-4}}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x \cdot \eta\mu 5^{-x}) \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu e^x - 1}{e^x}$$

9.59 Να βρείτε τα επόμενα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^3}{x^2-2} - \frac{2x^2}{x+1}}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{9x^2+2x-1} - \sqrt{x^2-4x+7}}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{2} \right)^{\frac{|x^3 - x - 2016|}{x^3 - |x^3 - x^2 - 7|}}$$

9.60 Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 5}{e^{2x} - 2e^x}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 5}{x \cdot 3^{x+1} - 3x \cdot 2^x - 3^x + 2^x}$$

9.61 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{4 \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

9.62 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(2^x + 3^{x+1})}{\eta\mu(3^x + 2^{x+1})}$$

9.63 Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3^{\frac{3x^4 - x + 1}{x+1}} - 3^{x^2} \right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\sqrt{4x^2 + 2x + 5}} - e^{\sqrt{9x^2 - 7x + 1}} \right)$$

Όριο λογαριθμικής συνάρτησης

9.64 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x^2 + 3x)]$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 3x)]$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(x^4 + 3) - \ln(x^2 + 3) \right]$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(3^x + 5^x) - x]$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2^x - 7) - x]$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + \eta\mu x) - 3\ln x]$$

9.65 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6\ln^2 x - 4\ln x + 3}{2\ln^2 x + 3\ln x - 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\ln^2 x + 3} + 2\ln x}{\sqrt{\ln^2 x + 1} + \sqrt{\ln^2 x + 2}}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\ln(x)} - 5^{\ln x}}{2^{\ln x} + 3 \cdot 2^{\ln x^2}}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{\ln(2^{x+1} - 1)}}{3^x}$$

9.66 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(1 - \sin x) - \ln x$$

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f ,

β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

9.67 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f ,

β) το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, **γ)** το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

9.68 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(2^x - 4^x) - e^{\frac{2-x^3}{x^2+x}}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

9.69 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x^2 - \eta\mu^2 x) - \ln x^2$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

9.70 Να βρείτε το όριο $\lim_{v \rightarrow +\infty} a_v$ όταν:

α) $a_v = \frac{-6v^2 + 5v - 1}{4v^2 - 3v + 2}$

β) $a_v = \frac{2v^2 - v - 1}{v^3 - 5v^2 - 7v + 2016}$

9.71 Να βρείτε το όριο $\lim_{v \rightarrow +\infty} a_v$ όταν:

α) $a_v = \sqrt{v^2 + v + 1} - v$

β) $a_v = \frac{\sqrt{v^2 + 3v - 2} - \sqrt{4v^2 - 5v + 1}}{v + 1}$

9.72 Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_v) με $a_1 = 7$ και

διαφορά 6 και αριθμητική πρόοδος (β_v) με $\beta_1 = 5$ και διαφορά 2. Αν S_v και S'_v είναι τα αθροίσματα των πρώτων v όρων των (a_v) και (β_v) αντίστοιχα, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{S_v}{S'_v}$$

9.73 Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (a_v) με $a_1 = 5$ και λόγο $\lambda = \frac{2}{3}$. Αν S_v είναι το άθροισμα των πρώτων v όρων της (a_v) , να βρείτε το όριο:

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$$

Όριο στο $\pm \infty$ και κριτήριο παρεμβολής

9.74 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{9x^2 + 1} - 2x \leq f(x) + x \leq \sqrt{x^2 + 1}$$

για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(f^2(x) - 3f(x))}{f^2(x) + f(x)}$

9.75 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2x(f(x) + 1) \leq 1 + f(x)\sqrt{4x^2 - 3x + 1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^5(x) + 2f(x) - 5}{f^2(x) + 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f^2(x) - 3f(x) + 2} - f(x)}{2f(x) - 1}$

9.76 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2x^3 - x^2 - 3 \leq f(x) \leq 2x^3 + 3x^2 + 5$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3}$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) - x^3 + 5x - 2}{f(x) + 3x^3 - x^2 + 1}$

9.77 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{4x^2 + x - 2}{1 - x^2} \leq f^2(x) - 4f(x) \leq \frac{4x^3 + x - 2}{1 - x^3}$$

για κάθε $x > 1$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 6x^2 - x - 1}{f(x) - 3x^2 + 2x - 5}$

Όριο στο $\pm \infty$ με τριγωνομετρικούς όρους

9.78 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigmaυν x}{x}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5\eta\mu x}{2x - 7\sigmaυν x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \sigmaυν x)$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

9.79 Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sigmaυν \frac{1}{x} - x \right)$$

9.85 Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3^x \cdot \eta\mu \frac{1}{2^x} \right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu(\ln x)}{\ln x}$$

9.80 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right) \eta\mu 5x \right]$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x - \sqrt{9x^4 + 3}}{x \cdot \sigmaυν x - \sqrt{x^4 + 1}}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[7^x \cdot \eta\mu \frac{1}{5^x} \cdot \eta\mu \left(\frac{5}{7} \right)^x \right]$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(6x + 2) \eta\mu \frac{5}{3x + 7} \right]$$

9.81 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x^3 - 5x^2 + 2}{2x^2 + 3x - 5} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x} \right) \eta\mu \frac{1}{x} \right]$$

9.86 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^{12} \cdot \eta\mu \frac{1}{2x} - x^{11} \cdot \sigmaυν \frac{1}{3x}$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

9.82 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 5}{2x + 7} + 3\eta\mu x \right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{5 + \eta\mu x}$$

9.87 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 + x \leq f(x) \leq 2x^2 - 3x + 4$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \eta\mu x}{x^3}$$

9.83 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x \cdot \eta\mu x}{2 + \eta\mu x}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - f(x) \sigmaυν \frac{1}{f(x)} \right]$$

9.84 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \cdot \eta\mu x}{3^x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{\ln x}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\eta\mu x \cdot \ln \frac{2^x + 1}{3^x + 1} \right)$$

9.88 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2^x \cdot \eta\mu x}{3^x}$. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

9.89 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|(x^3 + 1)f(x) - 2x^3| \leq x^2 + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \eta\mu x \right)$$

9.90 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{2x^3 - x^2}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x^3 + 3x^2}{x^2 + 1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

9.91 Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x} \cdot \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} \cdot \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \right)$$

9.92 Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{x^2 + x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^3 + 1} - \sqrt{x^4 + 3x^3 + 5}}{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + \eta\mu x}$$

Παραμετρικά όρια

9.93 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 4)x^3 + (\lambda + 2)x - 3]$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.94 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda - 3)x^3 + (\lambda - 5)x^2 + x - 2]$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.95 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda - 2)x^3 + (\mu - 3\lambda)x^2 + (\lambda - \mu)x + 2017]$$

για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

9.96 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda^2 - 9)x^3 + (\lambda - 3)x^2 + (\lambda + 1)x - 2}{x^2 + 3x - 5}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.97 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda^2 - 3\lambda)x^3 + \lambda x^2 + (\lambda + 3)x - 5}{(\lambda^2 - 9)x^2 + (1 - \lambda)x - 2}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.98 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6x^2 + \lambda x - 7}{2x - 5} + \lambda x \right)$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.99 Να βρείτε το όριο:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x^3 + \mu x^2 + x + 1}{(\mu - 1)x^3 + (\lambda - 2)x + 1}$$

για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

9.100 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + \lambda x \right)$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.101 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{16x^2 - 7x + 13} + \lambda^2 x \right)$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.102 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{|a|x^2 - x + 1} - \sqrt{4x^2 - 2x + 3} \right)$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

9.103 Να βρείτε το όριο:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + \sqrt{x^2 - 5x + 7} + \lambda x \right)$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.104 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+2} + a^x}{3^x + a^{x+1}}$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

9.105 Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x + a^{x+2}}{a^x - 5^{x+1}}$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

9.106 Να βρείτε το όριο:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(a^{x+1} + 1) - x$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Προσδιορισμός παραμέτρων

9.107 Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-2)x^2 + (3a-2\beta)x + 7}{(\beta+3)x - 13} = 4$$

9.108 Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 2} + ax + \beta \right) = 5$$

9.109 Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{24x^3 + ax^2 - 2}{3x^2 + x + 1} - a^3 x \right) = \beta$$

9.110 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{6x^3 + ax^2 - 5}{2x^2 - 3x + 1} \quad \text{με } a \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ισούται με έναν πραγματικό αριθμό λ , τον οποίο και να βρείτε.

β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = 2$, να βρείτε την τιμή του a .

9.111 Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x - 5} + ax + \beta \right) = -5$$

9.112 Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, με $\beta > 0$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{\beta x^2 - 12x + 5} \right) = 3$$

9.113 Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 + 6x^2 + 5} - ax^2 + \beta x + \gamma \right) = 1$$

9.114 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$$

και:

$$g(x) = ax + \beta - \frac{x^2 - 1}{x - 3}$$

Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

9.115 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{|x^3 - x^2 - 5x - 7| - |5x^3 - 2x|}{9|1 - x| + |2x^3 - 2x^2 + x - 1|}$$

και:

$$g(x) = \sqrt{4x^2 + 8x} + \sqrt{x^2 + 2} + ax + \beta$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

9.116 Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, αν ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[f(x) \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} \right] = \mu$$

Θεωρητικές ασκήσεις

9.117 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(4^{x+1} + 2^x)}{f(4^x - 3^x)}$.

9.118 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2)}{f(x)} = 2$$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+4)}{f(x-2)}$.

9.119 Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$x^4 |f(x)| + x^2 g^2(x) \leq |x+1| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

β) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f^2(x) + 1)\eta\mu g(x)}{(g^2(x) - g(x))\eta\mu^2 f(x)}$$

9.120 Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x) + g^2(x) \leq 2e^x(f(x) + g(x)) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

Όριο στο $\pm\infty$ και βοηθητική συνάρτηση

9.121 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - \sqrt{x^2 + x + 2}}{2x + 1} = 3$$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

9.122 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4x) = 3$$

α) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + 7x}{xf(x) - 4x^2 + 2x + 1}$$

β) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + ax^2 + 3x}{xf(x) - ax^2 + 13} = 3$.

9.123 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 2x^3}{x^3 + x^2 + 1} = 3$$

α) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$$

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η f είναι περιττή, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

9.124 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \sqrt{4x^2 + 1} \right) = 6$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{α)} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{β)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\eta \mu \frac{1}{x}}$$

$$\text{γ)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \eta \mu f(x)}{f^4(x) - 2f^3(x)}$$

9.125 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - x \sqrt{x^2 + 1} + x^2 \right) = 3$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{α)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{β)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x^2)$$

$$\text{γ)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2} \quad \text{δ)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 4x^2 + 2x}{f(x) - x + 3}$$

$$\text{ε)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f^2(x) + 3f(x)| + f^2(x) + 1}{f^2(x) + 2}$$

9.126 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^x + 3^x)f(x) + \eta \mu x}{2^{x+2} - 3^{x+1}} = 2$$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

9.127 Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 3x} = 6 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{2x^2 + \eta \mu^2 x} = 3$$

Να βρείτε:

$$\text{α)} \text{ το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{β)} \text{ το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + (5x + 2)g(x)}{(x + 1)f(x) + (x + 3)g(x)}$$

γ) το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda f(x) + g(x) + \text{συν} x}{f(x) + \lambda g(x) + x^2} = \frac{18}{19}$$

Συνδυαστικά θέματα

9.128 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\eta \mu \frac{2}{x} + \frac{3}{x}}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x - 1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

9.129 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9x^2 + x + 6} - \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{\alpha x^2 + \beta x + 5}{x - x^2}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

για την οποία υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Να βρείτε:

α) τους πραγματικούς αριθμούς α και β ,

β) τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

9.130 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1}{4x^2 - 3x - 1}$$

για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{7}{5}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς β και γ .

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(4f^2(x) - 9)}{\eta\mu(2f^2(x) + 3f(x))}$.

9.131 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \alpha x + \beta$$

για την οποία ισχύει:

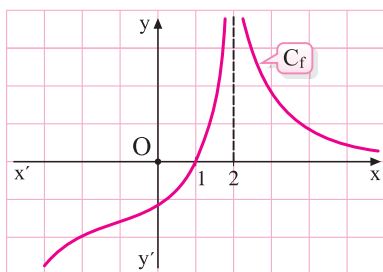
$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x)}{\eta\mu(x^2 - 7x)} = \frac{1}{84}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 1$.

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

9.132 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^3 + 2x^2)f(x)]$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} e^{f(x)}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x))$ δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$

9.133 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)) = 2$$

Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \eta\mu x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta\mu f(x))$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^6(x) + \eta\mu^4 \frac{1}{x}}{f^2(x) + \eta\mu^2 \frac{1}{x}}$

9.134 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3 - |x^3 + \alpha x^2 + 6x - 4|}{x^2 - 5x + 6}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

γ) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, να βρείτε:

i) τον αριθμό α , ii) το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

9.135 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 + 2x - 8}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x))$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \eta\mu x)$

9.136 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{\eta\mu x + 2x^2 + 10x}{x + 2} \leq f(x) \leq \frac{2x^2 + 8x + 7}{x + 1}$$

για κάθε $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 6$$

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x + x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{xf(x) - 2x^2 - 4x + 3}$.

9.137 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$(e^x + 1)f(x) \geq 3^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6x+1)f^2(x) - 5f(x) - x}{(2x+3)f^2(x) - xf(x) + 7}$

9.138 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\ln x - \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4f^2(x) - 3f(x) + 1}{2f^2(x) + f(x) - 5}$

9.139 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5^x}{3^x + 2}$ με $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{f^2(x) + 2f(x) - 3} - f(x) \right]$

9.140 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$-x^3 - 5x^2 \leq (x-1)f(x) \leq -x^3 + 2x^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^2(x) + 3f(x) - 2)$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{4f^2(x) + 3f(x) + 2} + 2f(x) \right]$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

9.141 Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ και η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 3x + 2}$$

για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού.

β) Να βρείτε το $P(x)$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} f(2\eta\mu x)$.

9.142 Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x) - x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - 1 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

και:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x^2 - 2x}{x^2 + 3} = 2$$

Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x) + 6f(x)}{f^2(x) - 2f(x) + \sqrt{f(x) + 4} - 2}$

9.143 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = 4 - x^3 + e^{-x}$$

α) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha, \beta)$, $B(0, 8)$ και $\Gamma(0, 2)$ για τα οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\overrightarrow{AB}|x^3 + 7x^2 - 13}{|\overrightarrow{A\Gamma}|x^3 + 4x - 21} = 2$$

i) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{A\Gamma}|$.

ii) Αν $\lambda \in (-\infty, 0)$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{|\overrightarrow{OA}|}{f(\lambda)} \right)^x$$

Θέματα των οποίων η λύση απαιτεί ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη

9.144 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = x^3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) + x^3 f\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

9.145 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\eta\mu x + 3} = 1$$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \eta\mu x)$.

9.146 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α και β , με $\alpha \leq 1 \leq \beta$, για τους οποίους ισχύει:

$$2^{\alpha x} + 3^{\beta x} = \alpha \cdot 2^{x+\alpha-1} + \beta \cdot 3^{x+\beta-1} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

Ερωτήσεις θεωρίας

9.147 Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2v} = \dots$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = \dots$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

γ) Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \dots$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \dots$

δ) Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \dots$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \dots$

ε) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = \dots$

στ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \dots$