

Φίλη μαθήτριά, φίλε μαθητή,

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ Λυκείου που θέλουν ένα μεθοδικό και πλήρες βοήθημα στη Γεωμετρία, στο μάθημα δηλαδή που ασκεί τη φαντασία, την κριτική σκέψη, την παρατηρητικότητα και τη δημιουργική σύνθεση από την εποχή ακόμα του Ευκλείδη.

Σκοπός του είναι να βοηθήσει τους μαθητές στην καθημερινή τους μελέτη, ώστε να ανταποκρίνονται με απόλυτη επιτυχία στις απαιτήσεις του σχολείου ή των εξετάσεων και συγχρόνως να προσφέρει γερές γεωμετρικές βάσεις σε όλους εκείνους που έχουν υψηλούς στόχους.

Περιέχει:

- ♦ Τη βασική θεωρία με τις αποδείξεις των θεωρημάτων, καθώς και σχόλια ή διευκρινίσεις, όπου αυτό κρίνεται σκόπιμο.
- ♦ Μεθόδους και τεχνικές για τη λύση των ασκήσεων, όπου κάτι τέτοιο είναι εφικτό.
- ♦ Πολλές υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις, κλιμακούμενης δυσκολίας, καθώς και θέματα με απαιτήσεις.
- ♦ Ασκήσεις για εξάσκηση και προτεινόμενα θέματα σε κάθε ενότητα.
- ♦ Ερωτήσεις κατανόησης που αφορούν τη θεωρία και τις άμεσες συνέπειές της.
- ♦ **Όλα τα θέματα της Τράπεζας θεμάτων, ταξινομημένα ανά διδακτική ενότητα**, με πλήρεις και κατανοητές λύσεις .
- ♦ Επαναληπτικά θέματα και ασκήσεις για την άριστη οργάνωση της επανάληψης στην περίοδο των εξετάσεων.
- ♦ Τις απαντήσεις και τις υποδείξεις σε όλα τα προτεινόμενα θέματα.
- ♦ Τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου.

Πιστεύουμε ότι η ποιότητα, το πλήθος και η διάταξη των θεμάτων, σε συνδυασμό με τα σχόλια και τις αναγκαίες μεθοδεύσεις, θα καταστήσουν το παρόν βιβλίο ένα χρήσιμο καθημερινό εργαλείο γνώσης και μελέτης για κάθε μαθητή.

Θέλουμε από τη θέση αυτή να ευχαριστήσουμε τους συναδέλφους Φωτεινή Καλδή, Νίκο Φραγκάκη και Νίκο Κατσίπη, καθώς και τον συνάδελφο Δημήτρη Τσάκο που είχε την επιμέλεια του βιβλίου.

Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

Ενότητα 1.	Ευθεία - Ευθύγραμμο τμήμα, Γωνίες - Απλές σχέσεις γωνιών.....	7
Ενότητα 2.	Έννοια και στοιχεία του κύκλου, Επίκεντρη γωνία και αντίστοιχο τόξο, Μέτρο τόξου και γωνίας.....	35
Ενότητα 3.	Κριτήρια ισότητας τριγώνων	46
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	68
Ενότητα 4.	Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου, Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.....	71
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	86
Ενότητα 5.	Βασικοί γεωμετρικοί τύποι, Συμμετρικά σχήματα.....	89
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	95
Ενότητα 6.	Ανισοτικές σχέσεις, Κάθετες και πλάγιες.....	96
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	112
Ενότητα 7.	Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, Εφαπτόμενα τμήματα, Σχετικές θέσεις δύο κύκλων.....	114
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	125
Ενότητα 8.	Ευκλείδειο αίτημα, Ιδιότητες παράλληλων ευθειών, Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου.....	126
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	145
Ενότητα 9.	Άθροισμα γωνιών τριγώνου, Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου.....	147
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	171
	♦ Επαναληπτικές ασκήσεις.....	177
Ενότητα 10.	Παραλληλόγραμμα.....	179
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	193
Ενότητα 11.	Είδη παραλληλογράμμων.....	198
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	218
Ενότητα 12.	Εφαρμογές των παραλληλογράμμων	223
	▪ Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων	260

Ενότητα 13.	Τραπεζίο, Ισοσκελές τραπέζιο.....	276
▪	Ασκήσεις Τράπεζας θεμάτων.....	292
♦	Επαναληπτικές ασκήσεις.....	303
Ενότητα 14.	Εγγεγραμμένη γωνία	309
▪	Ασκήσεις Τράπεζας θεμάτων.....	325
Ενότητα 15.	Εγγεγραμμένα τετράπλευρα, Εγγράψιμα τετράπλευρα	329
▪	Ασκήσεις Τράπεζας θεμάτων.....	345
Ενότητα 16.	Γεωμετρικές κατασκευές, Γεωμετρικοί τόποι, Προβλήματα ελαχίστου δρόμου.....	348
♦	Γενική επανάληψη.....	356

Υποδείξεις - Απαντήσεις

Υποδείξεις - απαντήσεις προτεινόμενων ασκήσεων	367
Λύσεις Τράπεζας θεμάτων.....	479
Λύσεις ασκήσεων σχολικού βιβλίου	583

Ενότητα 3



Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Βασική θεωρία και εφαρμογές

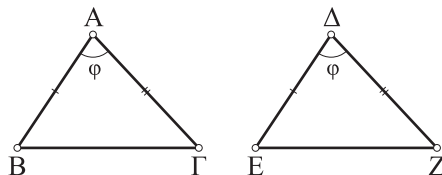
1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων

Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, δεν χρειάζεται να αποδείξουμε ότι όλες οι πλευρές είναι μία προς μία ίσες και ότι όλες οι (αντίστοιχες) γωνίες είναι μία προς μία ίσες. Αρκεί η ισότητα ανάμεσα σε ορισμένα από τα παραπάνω έξι στοιχεία (3 πλευρές και 3 γωνίες). Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο τρίγωνα και να αποδείξουμε ότι αυτά είναι ίσα, έχουμε ορισμένα κριτήρια (προτάσεις). Το πρώτο από αυτά είναι το παρακάτω:

1ο κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Έτσι, αν στα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ του διπλανού σχήματος είναι:



$$AB = \Delta E, \quad A\Gamma = \Delta Z \quad \text{και} \quad \hat{A} = \hat{\Delta}$$

τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ είναι ίσα.

Τονίζουμε ότι στο 1ο κριτήριο χρησιμοποιήσαμε δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες. Το κέρδος (όφελος) που προκύπτει από την ισότητα των δύο αυτών τριγώνων είναι:

- ♦ Μία ισότητα πλευρών $B\Gamma = EZ$.
- ♦ Δύο ισότητες γωνιών $\hat{B} = \hat{E}$ (διότι $A\Gamma = \Delta Z$) και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ (διότι $AB = \Delta E$).

Γενική πρόταση

- ♦ Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε οι αντίστοιχες πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες.
- ♦ Σε δύο ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές (λέγονται **ομόλογες** πλευρές).

Εφαρμογή 3.1

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΓA παίρνουμε τμήμα $A\Delta = AB$, ενώ στην προέκταση της BA παίρνουμε τμήμα $AE = A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\Delta E = B\Gamma$

β) $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{E} = \hat{\Gamma}$

Λύση

α) Αφού θέλουμε να αποδείξουμε ότι τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ είναι ίσα, προσπαθούμε να βρούμε δύο τρίγωνα που το ένα έχει πλευρά τη ΔE και το άλλο τη $B\Gamma$. Αυτά τα τρίγωνα είναι προφανώς τα $\Delta A E$ και $A B \Gamma$.

Ας συγκρίνουμε λοιπόν τα τρίγωνα αυτά. Έχουν:

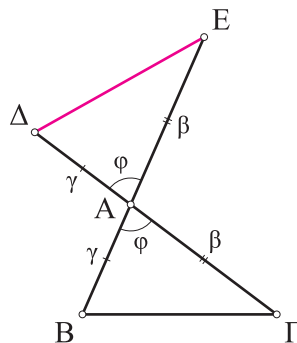
- ♦ $A\Delta = AB = \gamma$, από την υπόθεση,
- ♦ $AE = A\Gamma = \beta$, επίσης από την υπόθεση,
- ♦ $\widehat{\Delta A E} = \widehat{B A \Gamma} = \varphi$, ως κατακορυφήν.

Σύμφωνα λοιπόν με το προηγούμενο (1ο) κριτήριο, τα τρίγωνα $\Delta A E$, $A B \Gamma$ είναι ίσα. Επομένως και τα υπόλοιπα στοιχεία τους είναι ίσα. Άρα $\Delta E = B\Gamma$, διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta A E}$, $\widehat{B A \Gamma}$ αντίστοιχα.

β) Έχουμε ήδη αναφέρει ότι στη σύγκριση τριγώνων «θυσιάζουμε» τρία στοιχεία (τρεις ισότητες), ώστε να έχουμε ως όφελος τα υπόλοιπα τρία στοιχεία, δηλαδή τρεις ακόμα ισότητες. Μία από τις ισότητες αυτές ($\Delta E = B\Gamma$) την είδαμε στο πρώτο ερώτημα. Οι άλλες δύο ισότητες είναι οι:

- ♦ $\hat{A} = \hat{B}$, διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AE και $A\Gamma$ αντίστοιχα,
- ♦ $\hat{E} = \hat{\Gamma}$, διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $A\Delta$, AB αντίστοιχα.

Αλλά οι ισότητες $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{E} = \hat{\Gamma}$ είναι ακριβώς οι ισότητες του ερωτήματος (β) και έτσι έχουμε το συμπέρασμα.



Εφαρμογή 3.2

Ένας κύκλος (O, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό ενός κύκλου (O, R) . Οι ακτίνες OA, OB του μεγάλου κύκλου τέμνουν τον μικρό κύκλο στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

α) $A\Delta = B\Gamma$

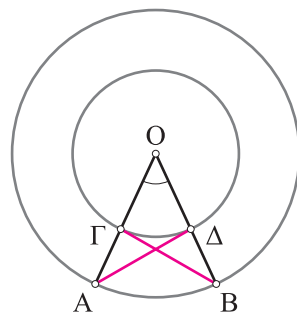
β) $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{A\Delta B}$

Λύση

α) Αφού το τμήμα $A\Delta$ είναι πλευρά του τριγώνου $O A \Delta$ και το $B\Gamma$ πλευρά του τριγώνου $O B \Gamma$, θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $O A \Delta$ και $O B \Gamma$. Τα τρίγωνα λοιπόν αυτά έχουν:

- ♦ $OA = OB = R$,
- ♦ $OD = OG = \rho$,
- ♦ $\widehat{A O \Delta} = \widehat{B O \Gamma}$, ως κοινή γωνία.

Άρα τα τρίγωνα $O A \Delta$, $O B \Gamma$ είναι ίσα, οπότε $A\Delta = B\Gamma$.



β) Παρατηρούμε ότι η γωνία $\widehat{AGB}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{OGB}$ και η $\widehat{ADB}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{ODA}$. Επειδή όμως τα τρίγωνα OAD , OGB είναι ίσα, είναι και $\widehat{ODA} = \widehat{OGB}$. Άρα $\widehat{ADB} = \widehat{AGB}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{ODA}$ και $\widehat{OGB}$ αντίστοιχα.

Μέθοδος

- ♦ Όταν δύο γωνίες έχουν την ίδια συμπληρωματική ή την ίδια παραπληρωματική γωνία είναι ίσες.
- ♦ Όταν δύο γωνίες έχουν ίσες συμπληρωματικές ή ίσες παραπληρωματικές γωνίες, τότε είναι ίσες.

Χρήσιμα θεωρήματα - Συνέπειες

Με τη βοήθεια του 1ου κριτηρίου ισότητας τριγώνων μπορούμε να αποδείξουμε ορισμένες βασικές προτάσεις, τις οποίες στη συνέχεια θα τις χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη. Τις προτάσεις αυτές, επειδή απορρέουν εύκολα (άμεσα σχεδόν) από το 1ο κριτήριο, τις λέμε **πορίσματα**.

Πόρισμα Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- ♦ Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- ♦ Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$.

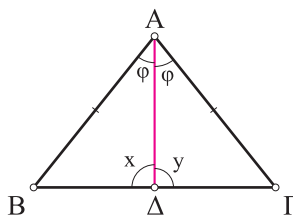
Θα αποδείξουμε ότι οι γωνίες της βάσης είναι ίσες, δηλαδή ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Φέρνουμε τη διχοτόμο AD , οπότε σχηματίζονται τα τρίγωνα $A\Delta B$, $A\Delta \Gamma$. Αυτά έχουν:

- ♦ Την πλευρά AD κοινή.
- ♦ $AB = A\Gamma$, από την υπόθεση, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- ♦ $\widehat{DAB} = \widehat{DAG} = \varphi$, διότι η AD είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

Άρα τα τρίγωνα $A\Delta B$, $A\Delta \Gamma$ είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού αυτές είναι γωνίες των τριγώνων, που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους πλευρά AD .

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η AD είναι διάμεσος και ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$.

- ♦ Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta B$, $A\Delta \Gamma$ είναι ίσα, είναι και $\Delta B = \Delta \Gamma$. Άρα το Δ είναι μέσο του $B\Gamma$ και έτσι η AD είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.



- ♦ Επειδή τα τρίγωνα $\triangle A\Delta B$, $\triangle A\Delta \Gamma$ είναι ίσα, είναι και $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Delta \Gamma}$, δηλαδή $x = y$.
Όμως:

$$x + y = 180^\circ \Leftrightarrow 2x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 90^\circ$$

Επειδή λοιπόν $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Delta \Gamma} = 90^\circ$ είναι $A\Delta \perp B\Gamma$ και έτσι το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Πόρισμα II

Οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

Πόρισμα III

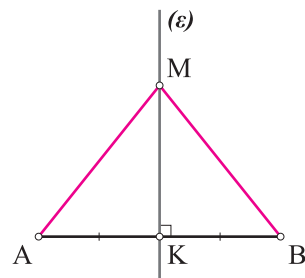
Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Έστω (ε) η μεσοκάθετος ενός τμήματος AB και M ένα τυχαίο σημείο της. Θα αποδείξουμε ότι $MA = MB$. Τα τρίγωνα KMA και KMB είναι ίσα. Πραγματικά έχουμε:

- ♦ $KA = KB$, αφού το K είναι μέσο του AB .
- ♦ Η MK είναι κοινή πλευρά.
- ♦ $\widehat{MKA} = \widehat{MKB} = 90^\circ$, αφού $\varepsilon \perp AB$.

Άρα τα τρίγωνα KMA , KMB είναι ίσα, οπότε $MA = MB$.



Πόρισμα IV

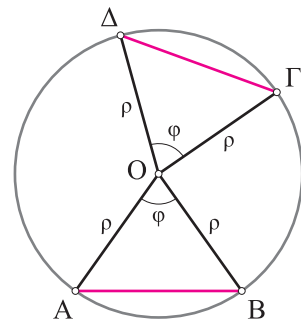
Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω ότι $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (O, ρ) . Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν:

- ♦ $OA = O\Gamma = \rho$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου,
- ♦ $OB = O\Delta = \rho$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου,
- ♦ $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma O\Delta} = \varphi$, διότι είναι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα.

Άρα τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$.



Εφαρμογή 3.3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$, και οι διάμεσοι $B\Delta$, ΓE . Να αποδειχθεί ότι:

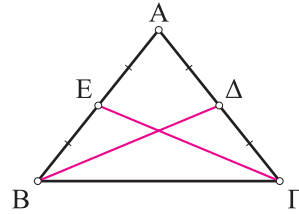
α) τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$, $\Gamma B E$ είναι ίσα,

β) $B\Delta = \Gamma E$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ έχουν:

- ♦ την πλευρά $B\Gamma$ κοινή,
- ♦ $BE = \Gamma\Delta$, ως μισά των ίσων τμημάτων AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα,
- ♦ $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.



Άρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$, $\Gamma B E$ είναι ίσα.

β) Αφού τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα. Επομένως $B\Delta = \Gamma E$.

Ας σημειώσουμε ότι για την απόδειξη της ισότητας $B\Delta = \Gamma E$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$, $A\Gamma E$ είναι ίσα ($A\Delta = A\Gamma$, $AB = A\Gamma$, $\hat{A}$ κοινή).

2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων

Για τη σύγκριση τυχαίων τριγώνων έχουμε επίσης το παρακάτω κριτήριο:

2ο κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ)

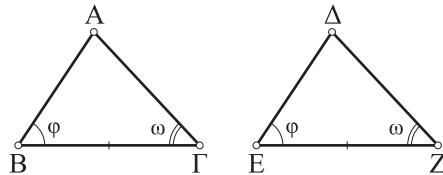
Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

Αν λοιπόν τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta E Z$ έχουν:

$$B\Gamma = EZ, \quad \hat{B} = \hat{E} \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma} = \hat{Z}$$

τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι:

$$AB = \Delta E, \quad A\Gamma = \Delta Z, \quad \hat{A} = \hat{\Delta}$$



Εφαρμογή 3.4

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$, φέρνουμε τις διχοτόμους $B\Delta$ και ΓE . Να αποδειχθεί ότι:

α) τα τρίγωνα $A\Delta B$, $A\Gamma E$ είναι ίσα,

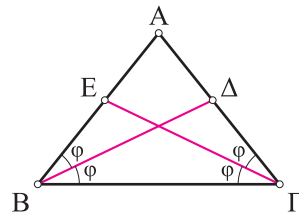
β) ισχύει $B\Delta = \Gamma E$,

γ) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Λύση

α) Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- ♦ $AB = A\Gamma$, ως πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$,
- ♦ $\hat{A}$ κοινή γωνία,
- ♦ $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma E} = \varphi$, ως μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.



Άρα τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα (σύμφωνα με το 2ο κριτήριο).

β) Αφού τα τρίγωνα $\triangle ADB$, $\triangle AEG$ είναι ίσα, θα είναι και $BD = GE$, αφού βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους γωνία $\hat{A}$.

γ) Επειδή τα τρίγωνα $\triangle ADB$, $\triangle AEG$ είναι ίσα, είναι επίσης $AD = AE$. Άρα το τρίγωνο $\triangle ADE$ είναι ισοσκελές.

3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων

Για τη σύγκριση τυχαίων τριγώνων έχουμε τέλος και το εξής κριτήριο:

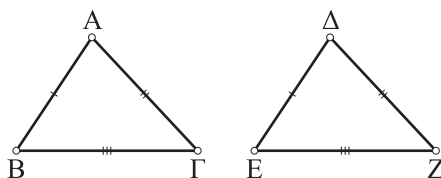
3ο κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

Αν λοιπόν δύο τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle EZ$ έχουν $AB = DE$, $AG = EZ$ και $B\Gamma = EZ$,

τότε είναι ίσα. Επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή:

$$\hat{A} = \hat{E}, \quad \hat{B} = \hat{Z}, \quad \hat{\Gamma} = \hat{Z}$$



Πόρισμα I

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

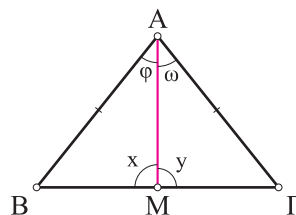
Έστω το ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, με $AB = AG$, και η διάμεσός του AM . Τα τρίγωνα $\triangle AMB$, $\triangle AM\Gamma$ έχουν:

- ♦ AM κοινή πλευρά,
- ♦ $AB = AG$, ως ίσες πλευρές του ισοσκελούς $\triangle AB\Gamma$,
- ♦ $MB = M\Gamma$, διότι η AM είναι διάμεσος (υπόθεση).

Άρα τα τρίγωνα $\triangle AMB$, $\triangle AM\Gamma$ είναι ίσα, οπότε:

- ♦ $\varphi = \omega$, που σημαίνει ότι η AM είναι και διχοτόμος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$,
- ♦ $x = y$ και αφού $x + y = 180^\circ$, είναι $x = y = 90^\circ$.

Άρα η AM είναι και ύψος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.



Πόρισμα II

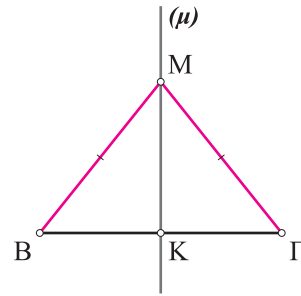
Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Απόδειξη

Έστω ότι το σημείο M ισαπέχει από τα άκρα B και Γ ενός τμήματος $B\Gamma$, δηλαδή ότι $MB = M\Gamma$ (δες το επόμενο σχήμα). Θα αποδείξουμε ότι το M βρίσκεται στη μεσοκάθετο (μ) του $B\Gamma$.

Έστω K το μέσο του $B\Gamma$. Επειδή το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $MB = M\Gamma$, η MK ως διάμεσος θα είναι και ύψος, δηλαδή $MK \perp B\Gamma$.

Άρα η MK είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$, δηλαδή το M βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$.



Πρόταση

Ένα σημείο βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος, αν και μόνο αν ισαπέχει από τα άκρα του.

Πόρισμα III

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω ότι οι χορδές AB , $\Gamma\Delta$ του κύκλου (O, ρ) είναι ίσες. Θα αποδείξουμε ότι τα κυρτά τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$ (δηλαδή αυτά που είναι μικρότερα του ημικυκλίου) είναι ίσα. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$. Αυτά έχουν:

$$OA = O\Gamma = \rho, \quad OB = O\Delta = \rho,$$

$$AB = \Gamma\Delta \text{ (από υπόθεση)}$$

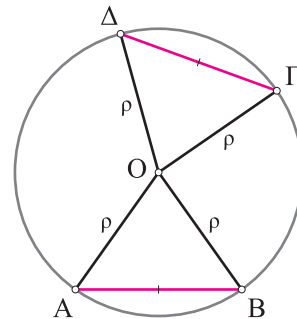
Άρα τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε:

$$\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma O\Delta}$$

Άρα $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, αφού σε ίσες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Αντίστοιχα ισχύει ότι:

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μεγαλύτερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα αυτά είναι ίσα.



Εφαρμογή 3.5

Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = \Gamma\Delta$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι:

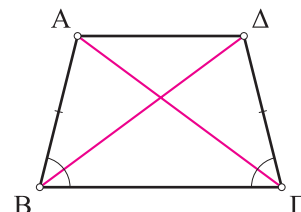
α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα, β) $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ έχουν:

- ♦ $B\Gamma$ κοινή πλευρά,
- ♦ $AB = \Delta\Gamma$, από την υπόθεση,
- ♦ $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma B}$, αφού από την υπόθεση είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Επομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα.



β) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ παίρνουμε ότι $AG = BD$. Ψάχνουμε δύο τρίγωνα από τα οποία το ένα να περιέχει τη γωνία $\hat{A}$ και το άλλο τη γωνία $\hat{\Delta}$. Δύο τέτοια τρίγωνα είναι τα BAD και ΓAD . Αυτά έχουν:

- ♦ την πλευρά AD κοινή,
- ♦ $AB = \Gamma D$, από την υπόθεση,
- ♦ $AG = BD$, διότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα (ερώτημα (α)).

Άρα τα τρίγωνα BAD , ΓAD είναι ίσα, οπότε θα είναι και $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Εφαρμογή 3.6

Δύο κύκλοι (K, ρ) και (Λ, R) τέμνονται στα σημεία A, B . Να αποδειχθεί ότι:

- α) η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της $\widehat{AKB}$ και η ΛK είναι διχοτόμος της $\widehat{ALB}$,
 β) $AB \perp K\Lambda$.

Λύση

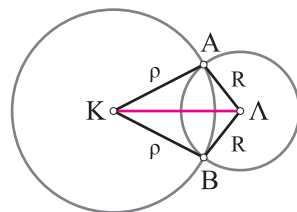
α) Φέρνουμε την $K\Lambda$. Τα τρίγωνα $AK\Lambda$, $BK\Lambda$ έχουν:

$$KA = KB = \rho, \quad \Lambda A = \Lambda B = R$$

και την $K\Lambda$ κοινή. Άρα τα τρίγωνα $AK\Lambda$, $BK\Lambda$ είναι ίσα, οπότε:

$$\widehat{AK\Lambda} = \widehat{BK\Lambda} \quad \text{και} \quad \widehat{A\Lambda K} = \widehat{B\Lambda K}$$

Άρα η $K\Lambda$ διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{AKB}$ και $\widehat{ALB}$.



β) Το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές, διότι $KA = KB = \rho$. Επειδή η ευθεία $K\Lambda$ διχοτομεί τη γωνία $\hat{K}$ της κορυφής, θα είναι κάθετη στη βάση AB . Άρα $K\Lambda \perp AB$.

Άλλος τρόπος

- ♦ Επειδή $KA = KB = \rho$, το K βρίσκεται στη μεσοκάθετο του AB .
- ♦ Επειδή $\Lambda A = \Lambda B = R$, το Λ βρίσκεται επίσης στη μεσοκάθετο του AB .

Άρα η ευθεία $K\Lambda$ είναι η μεσοκάθετος του AB και έτσι:

- ♦ $K\Lambda \perp AB$,
- ♦ η $K\Lambda$ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{K}$, $\hat{\Lambda}$ των κορυφών των ισοσκελών τριγώνων KAB και ΛAB .

Λυμένες ασκήσεις

3.7 Δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AD\epsilon$ έχουν κοινή την κορυφή A και ίσες τις γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{DA\epsilon}$. Να αποδειχθεί ότι $BD = \Gamma\epsilon$.

Λύση

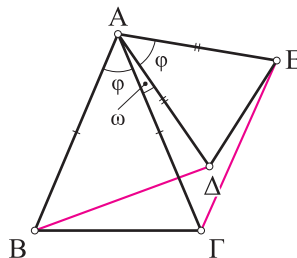
Θέτουμε για ευκολία $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{DA\epsilon} = \varphi$ και $\widehat{\Gamma A\Delta} = \omega$ (δες το επόμενο σχήμα). Από την υπόθεση έχουμε ότι $AB = A\Gamma$ και $AD = A\epsilon$.

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma A E$ έχουν:

♦ $AB = A\Gamma$ και $A\Delta = AE$

♦ $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma A E} = \varphi + \omega$

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε $B\Delta = \Gamma E$.

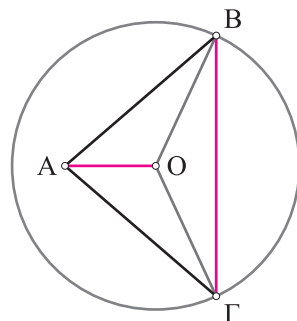


3.8 Ένα σημείο A , εσωτερικό ενός κύκλου (O, R) , ισαπέχει από δύο σημεία B και Γ του κύκλου. Να αποδειχθεί ότι $AO \perp B\Gamma$.

Λύση

Φέρνουμε τις ακτίνες OB και OG . Τα τρίγωνα OAB και OAG είναι ίσα, διότι $AB = A\Gamma$, $OB = OG$ και η AO είναι κοινή. Άρα $\widehat{BAO} = \widehat{\Gamma AO}$.

Αυτό σημαίνει ότι στο τρίγωνο $AB\Gamma$, η AO είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Άρα $AO \perp B\Gamma$.



3.9 Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Να αποδειχθεί ότι οι διαγώνιοι είναι κάθετες, δηλαδή $A\Gamma \perp B\Delta$.

Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\Delta A\Gamma$ και $BA\Gamma$. Αυτά έχουν:

♦ $A\Delta = AB$,

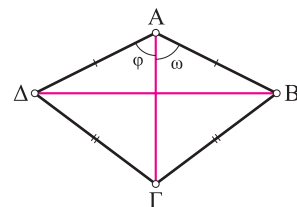
♦ $\Gamma\Delta = \Gamma B$,

♦ την πλευρά $A\Gamma$ κοινή.

Τα τρίγωνα λοιπόν αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν και:

$$\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{BA\Gamma}, \text{ δηλαδή } \varphi = \omega$$

Παρατηρούμε τώρα ότι στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta B$, η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επειδή στα ισοσκελή τρίγωνα η διχοτόμος από την κορυφή είναι και ύψος, συμπεραίνουμε ότι $A\Gamma \perp B\Delta$.



Γιατί συγκρίνουμε τρίγωνα;

Σύγκριση τριγώνων κάνουμε κάθε φορά που επιδιώκουμε να αποδείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα ή δύο γωνίες είναι ίσες. Έτσι ακολουθούμε τα επόμενα βήματα:

1ο: Χαράσσουμε ένα ικανοποιητικό (όσο πιο ακριβές είναι δυνατόν) σχήμα.

2ο: Εντοπίζουμε δύο τρίγωνα, τα οποία με μια πρώτη παρατήρηση να δείχνουν ίσα και να έχουν **απαραίτητα ως στοιχεία τα ζητούμενα τμήματα ή τις ζητούμενες γωνίες**.

3ο: Προσέχουμε στα παραπάνω τρίγωνα ανάμεσα στα ίσα στοιχεία τους να υπάρχει και μια πλευρά. Μόνο με ισότητα γωνιών **δεν προκύπτει ποτέ** ισότητα τριγώνων.

4ο: Ενδεχομένως τα ίσα στοιχεία των δύο τριγώνων, που συγκεντρώθηκαν για τη σύγκριση, να μην αρκούν. Σ' αυτές τις περιπτώσεις πιθανόν να απαιτείται πρώτα η σύγκριση δύο άλλων τριγώνων, τα οποία να είναι τελικά ίσα και να μας εφοδιάσουν με νέα δεδομένα.

5ο: Αν δεν υπάρχουν κατάλληλα τρίγωνα, τα οποία να είναι ίσα, φέρνουμε βοηθητικό τμήμα για να δημιουργήσουμε τρίγωνα ή άλλα χρήσιμα στοιχεία.

6ο: Ο νόμος (αρχή), τον οποίο εφαρμόζουμε **μετά την ισότητα** των τριγώνων, ο οποίος είναι: «Απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.»

Τονίζουμε ότι εφαρμόζουμε την παραπάνω αρχή μόνο σε ίσα τρίγωνα.

3.10 Στο διπλανό σχήμα είναι:

$$AB = \Gamma\Delta \text{ και } A\Delta = B\Gamma$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma\Gamma$ είναι ίσα,

β) $OA = OG$ και $OB = OD$.

Λύση

α) Φέρνουμε την $A\Gamma$. Τα τρίγωνα $\Delta A\Gamma$ και $B A\Gamma$ είναι ίσα, διότι $\Delta A = B\Gamma$, $\Delta\Gamma = BA$ και η $A\Gamma$ είναι κοινή. Άρα:

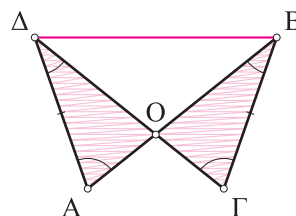
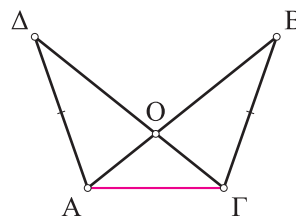
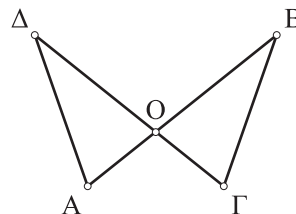
$$\hat{\Delta} = \hat{B}$$

Φέρνουμε τη ΔB . Τα τρίγωνα ΔAB και ΓB είναι ίσα, διότι $\Delta A = B\Gamma$, $AB = \Gamma\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κοινή. Επομένως $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma\Gamma$ είναι τώρα ίσα, διότι:

$$A\Delta = B\Gamma, \hat{\Delta} = \hat{B} \text{ και } \hat{A} = \hat{\Gamma}$$

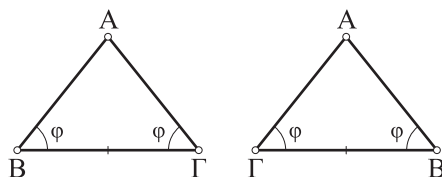
β) Αφού τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$, $O\Gamma\Gamma$ είναι ίσα, τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα. Επομένως:



- ♦ $OA = OG$, διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{ADO}$ και $\widehat{GBO}$,
- ♦ $OD = OB$, διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{G}$.

Μια σύγκριση τριγώνων διαφορετική!

Γνωρίζουμε ότι σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$, θα είναι και $\hat{B} = \hat{G}$. Ισχύει άραγε και το αντίστροφο; Δηλαδή αν $\hat{B} = \hat{G}$, θα είναι $AB = A\Gamma$;



Απάντηση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και AGB (βλέπε σχήμα). Αυτά έχουν $B\Gamma = GB$, $\hat{B} = \hat{G} = \varphi$ (από υπόθεση) και $\hat{G} = \hat{B} = \varphi$. Έτσι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Όμως στα ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές. Επομένως από τη σχέση $\hat{B} = \hat{G}$ παίρνουμε ότι $A\Gamma = AB$. Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί θεώρημα, αλλά θα το χρησιμοποιήσουμε μετά την ενότητα 4.

3.11 Στις ίσες πλευρές AB και $A\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου παίρνουμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$. Αν οι ευθείες BE και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο O , να αποδειχθεί ότι $AO \perp B\Gamma$.

Λύση

Η πρώτη προσπάθεια είναι να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$, OAE είναι ίσα. Αυτά έχουν την OA κοινή και $A\Delta = AE$. Τα στοιχεία όμως αυτά δεν επαρκούν για να είναι τα τρίγωνα ίσα. Θα αναζητήσουμε λοιπόν άλλα ίσα τρίγωνα, ώστε να συλλέξουμε τα στοιχεία που λείπουν και στη συνέχεια θα ολοκληρώσουμε τη σύγκριση των τριγώνων $O\Delta\Delta$, OAE .

- ♦ Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, διότι $AB = A\Gamma$, $AE = A\Delta$ και η γωνία $\hat{A}$ είναι κοινή. Άρα:

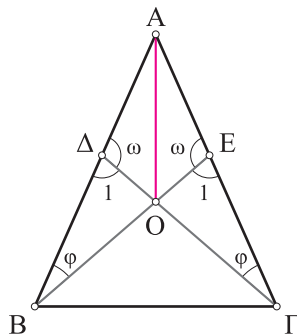
$$\widehat{ABE} = \widehat{A\Gamma\Delta} = \varphi \quad \text{και} \quad \widehat{AEB} = \widehat{A\Delta\Gamma} = \omega$$

Θα είναι επομένως και $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών ω . Επειδή $\Delta B = E\Gamma$, ως διαφορές ίσων τμημάτων, τα τρίγωνα $O\Delta B$ και OEG είναι ίσα (Γ-Π-Γ). Επομένως $OD = OE$.

- ♦ Τα τρίγωνα τώρα ΔAO και EAO έχουν:

$$\Delta A = EA, \quad \Delta O = EO \quad \text{και} \quad \widehat{\Delta\Delta O} = \widehat{EEO} = \omega$$

Άρα είναι ίσα, οπότε $\widehat{\Delta\Delta O} = \widehat{EEO}$. Αυτό σημαίνει ότι η AO διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Συνεπώς $AO \perp B\Gamma$.



Ένα θέμα ... με βοηθητικές

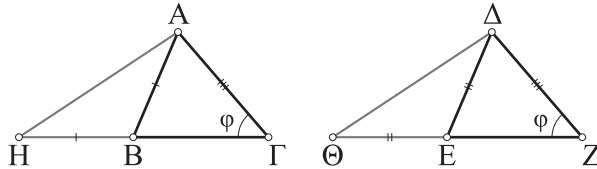
Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν ίσες περιμέτρους, $AG = \Delta Z$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.
Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

Απόδειξη

Στην προέκταση της GB ,
προς το B , παίρνουμε τμήμα:

$$BH = AB$$

Όμοια, στην προέκταση της
 ZE , προς το E , παίρνουμε
τμήμα $E\Theta = \Delta E$.



- ♦ Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν ίσες περιμέτρους, οπότε:

$$\begin{aligned} AB + B\Gamma + AG &= \Delta E + EZ + \Delta Z \xrightarrow{AG = \Delta Z} AB + B\Gamma = \Delta E + EZ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow HB + B\Gamma = \Theta E + EZ \Leftrightarrow H\Gamma = \Theta Z \end{aligned}$$

- ♦ Τα τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Delta\Theta Z$ είναι ίσα, διότι $AG = \Delta Z$, $H\Gamma = \Theta Z$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.
Επομένως $\hat{H} = \hat{\Theta} = \omega$ και $\widehat{HAG} = \widehat{\Theta\Delta Z}$.

- ♦ Τα τρίγωνα BAH και $E\Delta\Theta$ είναι ισοσκελή, οπότε $\hat{H} = \widehat{BAH}$ και $\hat{\Theta} = \widehat{E\Delta\Theta}$.
Είναι όμως $\hat{H} = \hat{\Theta} = \omega$, οπότε $\widehat{BAH} = \widehat{E\Delta\Theta} = \omega$. Έτσι:

$$\begin{aligned} \widehat{HAG} = \widehat{\Theta\Delta Z} &\Leftrightarrow \widehat{HAB} + \hat{A} = \widehat{\Theta\Delta E} + \hat{\Delta} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \omega + \hat{A} = \omega + \hat{\Delta} \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{\Delta} \end{aligned}$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι τώρα ίσα, διότι $AG = \Delta Z$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

3.12 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $a = 2\gamma$. Να αποδειχθεί ότι: $\hat{A} = 90^\circ$

Λύση

Φέρνουμε τη μεσοκάθετο της $B\Gamma$, που τέμνει τη $B\Gamma$ στο
 M και την AG στο Δ . Είναι τότε:

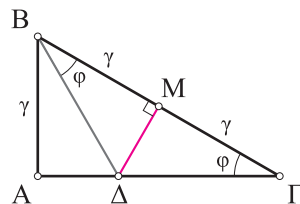
$$\Delta B = \Delta\Gamma \text{ και } MB = \frac{B\Gamma}{2} = BA$$

Αφού $\Delta B = \Delta\Gamma$ είναι $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma B} = \varphi$.

Όμως $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} = 2\varphi$, οπότε $\widehat{\Delta B A} = 2\varphi - \varphi = \varphi$.

Τα τρίγωνα ΔAB και ΔMB έχουν την πλευρά $B\Delta$ κοινή, $AB = \gamma = \frac{a}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = BM$
και $\widehat{AB\Delta} = \widehat{B\Delta M} = \varphi$. Επομένως είναι ίσα, οπότε:

$$\hat{A} = \widehat{\Delta MB} = 90^\circ$$



Διαδοχικές συγκρίσεις — Μέθοδος

Όταν κατά τη σύγκριση δύο τριγώνων διαπιστώσουμε ότι δεν επαρκούν τα στοιχεία για να είναι τα τρίγωνα ίσα, τότε:

- ♦ Προσπαθούμε να εντοπίσουμε δύο άλλα τρίγωνα, να αποδείξουμε ότι αυτά είναι ίσα και έτσι να συλλέξουμε την ισότητα των στοιχείων που χρειαζόμαστε για να συνεχίσουμε.
- ♦ Φέρουμε κάποιο βοηθητικό τμήμα, ώστε να δημιουργήσουμε νέα τρίγωνα και να εφαρμόσουμε το προηγούμενο βήμα. Το βοηθητικό τμήμα μπορεί να είναι μια διάμεσος, μια διχοτόμος, ένα κάθετο τμήμα ή ένα τμήμα που ενώνει βασικά σημεία του σχήματος.

3.13 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και τις διαμέσους $AM, \Delta N$ ίσες. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

Λύση

Θέτουμε για ευκολία:

- ♦ $AB = \Delta E = \kappa$
- ♦ $A\Gamma = \Delta Z = \lambda$
- ♦ $AM = \Delta N = \mu$

Προεκτείνουμε τις AM και ΔN και πάνω σ' αυτές παίρνουμε τμήματα:

$$MH = AM = \mu$$

και

$$N\Theta = \Delta N = \mu$$

(αφού είναι $AM = \Delta N = \mu$)

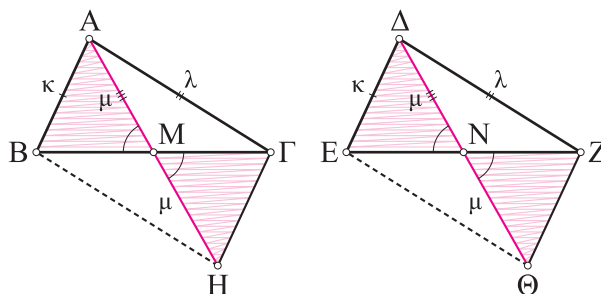
- ♦ Τα τρίγωνα MAB και $M\Gamma H$ είναι ίσα, διότι έχουν $MB = M\Gamma$, $MA = MH$ και $\widehat{AMB} = \widehat{GMH}$, ως κατακορυφήν. Άρα θα είναι και $\Gamma H = AB = \kappa$.
- ♦ Τα τρίγωνα $N\Delta E$ και $NZ\Theta$ είναι ομοίως ίσα, αφού $NE = NZ$, $N\Delta = N\Theta$ και $\widehat{EN\Delta} = \widehat{ZN\Theta}$. Άρα $\Theta Z = \Delta E = \kappa$.
- ♦ Τα τρίγωνα $A\Gamma H$ και $\Delta Z\Theta$ έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες, αφού $A\Gamma = \Delta Z = \lambda$, $AH = \Delta\Theta = 2\mu$ και $\Gamma H = Z\Theta = \kappa$. Άρα είναι ίσα, οπότε:

$$\widehat{\Gamma AH} = \widehat{Z\Delta\Theta} \quad (1)$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα τρίγωνα ABH και $\Delta E\Theta$ είναι ίσα, οπότε:

$$\widehat{BAH} = \widehat{E\Delta\Theta} \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν τελικά ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Επομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα, αφού $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$.



3.14 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο O . Στην προέκταση της AB , προς το B , παίρνουμε τμήμα $BA = B\Gamma + A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι $OA = OD$.

Λύση

Στην άσκηση αυτή θα χρειαστούμε βοηθητική γραμμή. Στην προέκταση της $A\Gamma$ παίρνουμε τμήμα:

$$\Gamma E = \Gamma B = \alpha$$

Φέρνουμε τις OE και BE . Το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές, αφού $\Gamma B = \Gamma E = \alpha$. Επομένως η διχοτόμος $\hat{\Gamma O}$ της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon}$ είναι μεσοκάθετος της BE . Άρα:

$$OB = OE \quad (1)$$

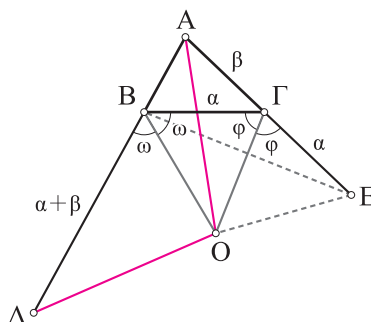
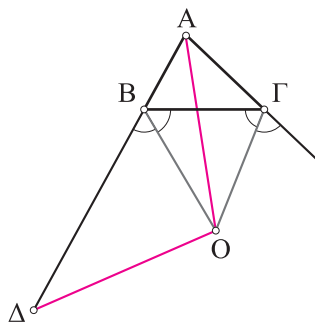
Από την ισότητα των τριγώνων $BO\Gamma$ και $EO\Gamma$ παίρνουμε ότι $\hat{\Gamma B O} = \hat{E}$. Έτσι:

$$\hat{E} = \hat{\Delta B O} = \omega \quad (2)$$

Τα τρίγωνα τώρα $OB\Delta$ και OAE είναι ίσα, διότι:

- ♦ $OB = OE$, λόγω της σχέσης (1),
- ♦ $\hat{\Delta B O} = \hat{O E A} = \omega$, λόγω της σχέσης (2).

Επομένως $OA = OD$.



$$\diamond B\Delta = AE = \alpha + \beta,$$

Ένα ... περίεργο κριτήριο

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο ζεύγη ίσων πλευρών και οι γωνίες απέναντι από το ένα ζεύγος ίσων πλευρών είναι ίσες, τότε οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το άλλο ζεύγος των ίσων πλευρών είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν:

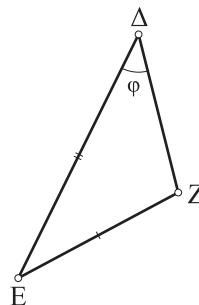
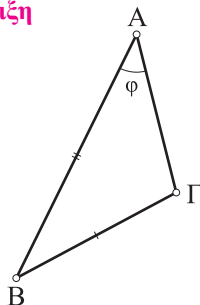
$$B\Gamma = EZ, \quad AB = \Delta E \quad \text{και} \quad \hat{A} = \hat{\Delta} = \varphi$$

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\hat{\Gamma} = \hat{Z} \quad \text{ή} \quad \hat{\Gamma} + \hat{Z} = 180^\circ$$

- ♦ Αν $A\Gamma = \Delta Z$, τότε προφανώς τα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ είναι ίσα και έτσι:

$$\hat{\Gamma} = \hat{Z}$$



- ♦ Αν $AG > \Delta Z$, τότε στην πλευρά AG παίρνουμε σημείο H , ώστε $AH = \Delta Z$. Τα τρίγωνα ABH και ΔEZ είναι ίσα, διότι έχουν:

$$AB = \Delta E, \quad AH = \Delta Z, \quad \hat{A} = \hat{\Delta}$$

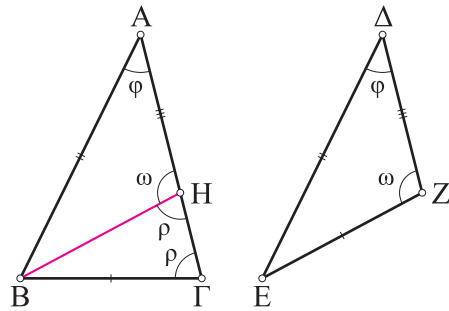
Άρα $BH = EZ$ και $\widehat{AHB} = \widehat{\Delta ZE} = \omega$.

Είναι όμως $EZ = BG$, οπότε $BH = BG$ και έτσι το τρίγωνο BHG είναι ισοσκελές. Άρα:

$$\widehat{BHG} = \widehat{BGH} = \rho$$

Επειδή $\widehat{AHB} + \widehat{BHG} = 180^\circ$, δηλαδή $\omega + \rho = 180^\circ$, θα είναι και:

$$\hat{\Gamma} + \hat{Z} = 180^\circ$$



Ασκήσεις για λύση

Α. Ασκήσεις εμπέδωσης

3.15 Στην προέκταση της βάσης $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, και προς τα δύο μέρη, παίρνουμε τμήματα $BD = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

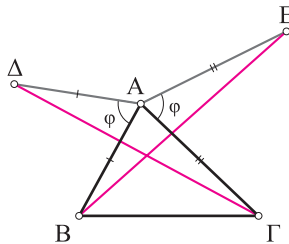
- το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές,
- $\widehat{BAD} = \widehat{GAE}$.

3.16 Στο διπλανό σχήμα είναι:

$$\begin{aligned} AD &= AB, \\ AE &= AG \text{ και} \\ \widehat{BAD} &= \widehat{GAE} \end{aligned}$$

Να αποδείξετε ότι:

- $BE = \Gamma\Delta$
- $\widehat{ABE} = \widehat{AD\Gamma}$



3.17 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $AG = \Delta Z$, $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και τις διχοτόμους $AK, \Delta\Lambda$ ίσες.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AK\Gamma$ και $\Delta\Lambda Z$.

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $AB = \Delta E$ και $B\Gamma = EZ$.

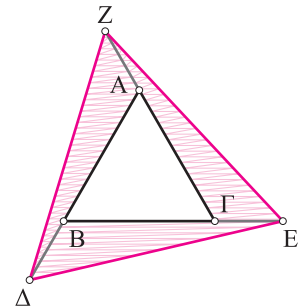
3.18 Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος AG διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $AG \perp BD$.

3.19 Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AD = B\Gamma$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{B}$.

3.20 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και:

$$AZ = BD = \Gamma E$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι επίσης ισόπλευρο.



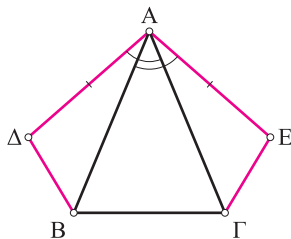
Οι απαντήσεις βρίσκονται στις σελίδες 375 - 382.

3.21 Δίνεται κύκλος και μια χορδή του AB. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των δύο τόξων που σχηματίζονται, να αποδείξετε ότι:

- α) $MN \perp AB$,
 β) η MN διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

3.22 Στο εξωτερικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ABΓ (με $AB = AG$) θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε έτσι, ώστε:

$$AD = AE \text{ και } \widehat{GAD} = \widehat{BAE}$$



Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα AGΔ, ABE είναι ίσα,
 β) $BD = GE$,
 γ) $\widehat{DBG} = \widehat{EGB}$.

3.23 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, με $AB = AG$. Να αποδείξετε ότι:

- α) οι διάμεσοι BM και ΓN είναι ίσες,
 β) οι διχοτόμοι BD και ΓΕ είναι ίσες.

3.24 Στις ίσες πλευρές AB και AG ενός ισοσκελούς τριγώνου ABΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $AD = AE$. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης BG, να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο MΔΕ είναι ισοσκελές,
 β) η MA διχοτομεί τη γωνία $\widehat{DME}$.

3.25 Δίνεται σκαληνό τρίγωνο ABΓ, η διχοτόμος AΔ και πάνω στην ημιευθεία AΔ τα σημεία Ε, Ζ, ώστε:

$$AE = AB \text{ και } AZ = AG$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $BZ = GE$ β) $\widehat{AGE} = \widehat{AZB}$

3.26 Σε ένα τετράπλευρο ABΓΔ είναι:

$$BA = BG \text{ και } DA = DG$$

Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος BD είναι μεσοκάθετος της διαγωνίου AG.

3.27 Έστω BD και ΓΕ οι διχοτόμοι προς τις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου ABΓ. Να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο AΔΕ είναι ισοσκελές.

3.28 Στο εξωτερικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ABΓ, με $AB = AG$, θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ABD και AGE. Να αποδείξετε ότι $BE = GD$.

3.29 Θεωρούμε έναν κύκλο κέντρου Ο και τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ του κύκλου. Φέρνουμε τις διαμέτρους AΔ, BE και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι:

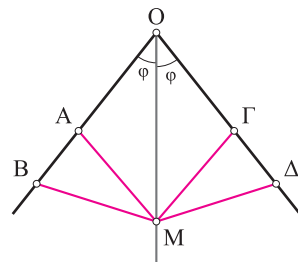
$$\widehat{ABG} = \widehat{DEZ}$$

3.30 Σε ένα τρίγωνο ABΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM και πάνω σε αυτήν παίρνουμε τμήμα $MD = AM$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{BDG} = \widehat{A}$,
 β) τα τρίγωνα ABΓ και DBΓ είναι ίσα.

3.31 Στο διπλανό σχήμα, η OM είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{O}$, $OA = OG$ και $OB = OD$.

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MAB και MΓΔ είναι ίσα.



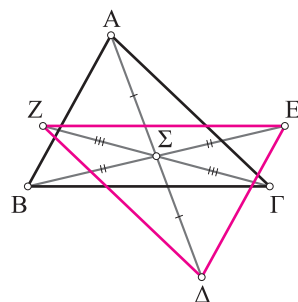
3.32 Έστω Δ, Ε δύο σημεία των πλευρών AG, AB τριγώνου ABΓ αντίστοιχα. Οι BD, ΓΕ τέμνονται στο Ρ. Αν $PB = PG$ και $PE = PD$, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα PEB, PΔΓ είναι ίσα,
 β) το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

3.33 Στο εσωτερικό ενός τριγώνου ABΓ παίρνουμε σημείο Σ. Στις προεκτάσεις των τμημάτων AS, BS και ΓΣ παίρνουμε σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε:

$$\begin{aligned} \Sigma\Delta &= \Sigma A, \quad \Sigma E = \Sigma B \\ &\text{και } \Sigma Z = \Sigma \Gamma \end{aligned}$$

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΖ, ABΓ είναι ίσα.



B. Διαδοχικές συγκρίσεις - Βοηθητική γραμμή

3.34 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος AM . Στην προέκταση της AM παίρνουμε τμήμα $ΜΔ = MA$. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα MAB , $M\Gamma\Delta$ και $MA\Gamma$, $MB\Delta$ είναι ίσα,
- β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα,
- γ) $\hat{A} = \widehat{B\Delta\Gamma}$.

3.35 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $AB = \Delta E$, $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι BK και EL είναι ίσες.

3.36 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $\hat{B} = \hat{E}$, $AB = \Delta E$ και τις διχοτόμους BM , EN ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

3.37 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $AB = \Delta E$,

$A\Gamma = \Delta Z$ και τις διαμέσους BM και EN ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

3.38 Στις προεκτάσεις των πλευρών BA , ΓA ενός τριγώνου $AB\Gamma$, και προς το μέρος του A , παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η προέκταση της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχεται και από το μέσο N του ΔE .

3.39 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Έστω AM , ΔN διχοτόμοι των τριγώνων αυτών. Να αποδείξετε ότι $AM = \Delta N$.

3.40 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα σημείο Σ στο εξωτερικό του. Στις ημιευθείες $A\Sigma$, $B\Sigma$ και $\Gamma\Sigma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $\Sigma\Delta = \Sigma A$, $\Sigma E = \Sigma B$ και $\Sigma Z = \Sigma\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{E\Delta Z} = \widehat{B\Delta\Gamma}$.

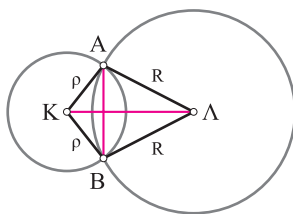
Γ. Συμπληρωματικές ασκήσεις

3.41 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τις διαμέσους BM και ΓN . Αν είναι $BM = \Gamma N$ και $\widehat{MB\Gamma} = \widehat{N\Gamma B}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

3.42 Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

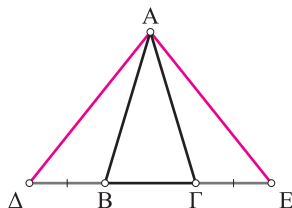
- α) $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$,
- β) $B\Delta \perp A\Gamma$.

3.43 Δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ τέμνονται στα σημεία A και B . Να αποδείξετε ότι η $K\Lambda$ είναι μεσοκάθετος της AB .



3.44 Στην προέκταση της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα,
- β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



3.45 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $AB = \Delta E$, $\hat{B} = \hat{E}$ και τις διχοτόμους BK , EL ίσες. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ABK και ΔEL είναι ίσα,
- β) $B\Gamma = EZ$.

3.46 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Αν στις πλευρές AB , $A\Gamma$ υπάρχουν σημεία E , Z αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\Delta E = \Delta Z$ και $\widehat{A\Delta E} = \widehat{A\Delta Z}$, να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{\Delta AB} = \widehat{\Delta A\Gamma}$,
- β) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

3.47 Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και τις διαμέσους BM , EN ίσες, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

3.48 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των BA , ΓA παίρνουμε σημεία Δ , E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $BE = \Gamma\Delta$,
- β) $\widehat{EB\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma B}$,
- γ) η ευθεία που περνάει από το A και είναι κάθετη στη $B\Gamma$, είναι κάθετη και στη ΔE .

3.49 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσός του BM και σημείο Δ στην προέκταση της BM , ώστε $M\Delta = MB$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma A}$ β) $AB = \Gamma\Delta$
 γ) $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Delta\Gamma B}$

3.50 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ίσα τμήματα $B\Delta$, ΓE στις προεκτάσεις των AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) $M\Delta = ME$ β) $\Gamma\Delta = BE$
 γ) $AM \perp \Delta E$

3.51 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διάμεσοι $B\Delta$, ΓE , που τέμνονται στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα,
 β) $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma\Gamma}$,
 γ) τα τρίγωνα MEB και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα,
 δ) το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισοσκελές,
 ε) $AM \perp B\Gamma$.

3.52 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$, ΓE . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα,
 β) $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma\Gamma}$, γ) $B\Delta = \Gamma E$.

3.53 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Στην προέκταση της BA παίρνουμε τμήμα $A\Delta = AB$, ενώ στην προέκταση της ΓA παίρνουμε τμήμα $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta E = B\Gamma$,
 β) αν η προέκταση της MA τέμνει τη ΔE στο N , είναι $N\Delta = NE$.

3.54 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 2\hat{\Gamma}$ και $A\Gamma = 2AB$. Αν η μεσοκάθετος της $A\Gamma$ τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ , να αποδείξετε ότι:

- α) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$,
 β) $\hat{B} = 90^\circ$.

3.55 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), η διάμεσος AM και τα σημεία Δ , E του τμήματος AM . Να αποδείξετε ότι:

- α) $EB = E\Gamma$,
 β) το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές,
 γ) $\widehat{\Delta B E} = \widehat{\Delta \Gamma E}$.

3.56 Στην προέκταση της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τμήματα $B\Delta = \Gamma E = AB$. Αν Z , H είναι τα μέσα των $A\Delta$, $A E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Gamma E$ είναι ίσα,
 β) $\Gamma Z = BH$,
 γ) αν οι ευθείες ZB , $H\Gamma$ τέμνονται στο σημείο P , τότε:
 $PA = PE$

3.57 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$, και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E , ώστε $AE = AB$. Αν η ΔE τέμνει την προέκταση της AB στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Delta = \Delta E$ β) $AZ = A\Gamma$
 γ) $A\Delta \perp Z\Gamma$

Ερωτήσεις κατανόησης

3.58 Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

- α) Να ονομάσετε τα τρίγωνα ανάλογα με το είδος των πλευρών τους και για κάθε περίπτωση να χαράξετε το αντίστοιχο σχήμα.
 β) Ποια είναι τα είδη των τριγώνων, ανάλογα με τις γωνίες; Να σχεδιάσετε στην κάθε περίπτωση το κατάλληλο τρίγωνο.
 γ) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο, να το ονομάσετε και να σημειώσετε τις κορυφές, τις πλευρές και τις γωνίες του.

- δ) Τι λέγεται εξωτερική γωνία ενός τριγώνου;
 ε) Τι λέγεται διάμεσος, τι ύψος και τι διχοτόμος ενός τριγώνου; Για κάθε περίπτωση να χαράξετε το κατάλληλο σχήμα.
 στ) Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα;
 ζ) Να γράψετε, μαζί με τα αντίστοιχα σχήματα, τα κριτήρια ισότητας δύο τυχαίων τριγώνων.
 η) Τι γνωρίζετε για το ισοσκελές τρίγωνο;
 θ) Ποια ιδιότητα χαρακτηρίζει τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος;

- ι) Ποια σχέση συνδέει δύο τόξα με τις αντίστοιχες χορδές ενός κύκλου;
 ια) Για ποιον λόγο συγκρίνουμε τρίγωνα;
 ιβ) Πόσες ορθές ή αμβλείες γωνίες μπορεί να έχει ένα τρίγωνο;

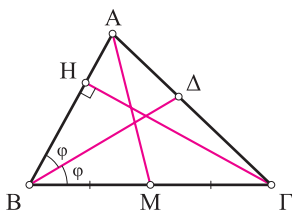
3.59 Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού

α) Τα τρίγωνα, ανάλογα με το είδος των πλευρών τους, διακρίνονται σε και

β) Τα τρίγωνα, ανάλογα με τις γωνίες τους, διακρίνονται σε και

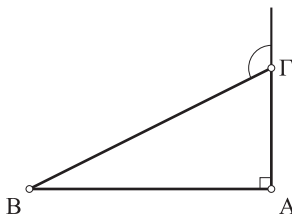
γ) Στο διπλανό σχήμα:

- ♦ οι κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι οι ..., ... και ...
- ♦ οι πλευρές του τριγώνου είναι οι και
- ♦ οι γωνίες του τριγώνου είναι οι και
- ♦ το τμήμα AM λέγεται, το $B\Delta$ λέγεται και το GH λέγεται
- ♦ η περίμετρος του τριγώνου είναι το άθροισμα, το οποίο συμβολίζεται με Η ημιπερίμετρος του τριγώνου είναι ίση με ...



δ) Στο διπλανό σχήμα:

- ♦ η γωνία $\hat{A}$ είναι, οπότε το τρίγωνο λέγεται
- Οι πλευρές AB και $A\Gamma$ λέγονται πλευρές του τριγώνου, ενώ η $B\Gamma$ λέγεται του ορθογωνίου τριγώνου.
- ♦ απέναντι από την κορυφή A βρίσκεται η πλευρά, απέναντι από την κορυφή B η και απέναντι από την κορυφή Γ η



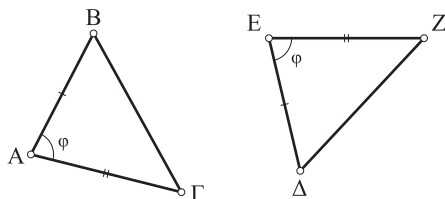
πλευρά

- ♦ αν προεκτείνουμε μια πλευρά του τριγώνου, τότε η γωνία που σχηματίζεται λέγεται γωνία.

ε) Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα, όταν έχουν τις και τις τους μία προς μία

στ) Όταν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε απέναντι από πλευρές βρίσκονται γωνίες και απέναντι από ίσες βρίσκονται Ο παραπάνω κανόνας μάς δίνει τη δυνατότητα να εκμεταλλευτούμε την ισότητα δύο τριγώνων.

ζ) Τα τρίγωνα του σχήματος:



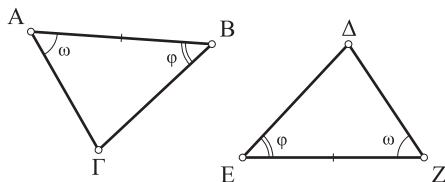
είναι, διότι έχουν και τις στις ίσες πλευρές γωνίες και ίσες.

Επειδή τα τρίγωνα είναι ίσα, θα ισχύει ακόμη ότι:

$$\hat{B} = \dots, \hat{\Gamma} = \dots \text{ και } B\Gamma = \dots$$

η) Στον ίδιο κύκλο (ή σε ίσους κύκλους) σε ίσα τόξα αντιστοιχούν και αντιστρόφως, σε ίσες αντιστοιχούν ίσα

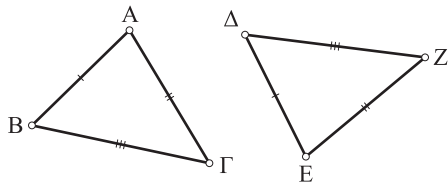
θ) Τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι, διότι έχουν από μία ίση και τις στις πλευρές και γωνίες ίσες.



Από την ισότητα των τριγώνων αυτών συμπεραίνουμε ακόμη ότι:

$$A\Gamma = \dots, B\Gamma = \dots \text{ και } \hat{\Gamma} = \dots$$

ι) Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι, διότι έχουν και τις
..... μία προς μία



Επομένως θα είναι ακόμη:

$$\hat{A} = \dots, \hat{B} = \dots \text{ και } \hat{\Gamma} = \dots$$

ια) Στο ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της
είναι Έτσι, αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι
 $AB = A\Gamma$, τότε θα είναι και

ιβ) Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι

ιγ) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

♦ η διχοτόμος προς τη βάση είναι και
.....

♦ η διάμεσος προς τη βάση είναι και
.....

ιδ) Τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου
τμήματος από τα
του τμήματος και αντιστρόφως. Αν ένα σημείο
..... από τα άκρα ενός τμήματος, τότε αυτό
βρίσκεται πάνω στη του ευ-
θύγραμμου τμήματος.

ιε) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες
πλευρές τους μία προς μία ίσες, τότε είναι
(Κριτήριο

3.60 Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα, όταν:

A: έχουν τις γωνίες τους ίσες, μία προς μία.

B: $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $B\Gamma = EZ$

Γ: $\Gamma A = Z\Delta$, $\Gamma B = ZE$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

Δ: $AB = \Delta Z$ και $A\Gamma = \Delta E$

E: $\hat{B} = \hat{E}$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $AB = \Delta E$

β) Τα τρίγωνα $K\Lambda M$ και ΣPT είναι ίσα, όταν:

A: $\hat{K} = \hat{P}$, $\hat{\Lambda} = \hat{\Sigma}$ και $\hat{M} = \hat{T}$

B: $K\Lambda = P\Sigma$ και $\hat{M} = \hat{T}$

Γ: $\Lambda M = \Sigma T$ και $\hat{M} = \hat{T}$

Δ: $\Lambda K = \Sigma P$, $\Lambda M = \Sigma T$ και $\hat{M} = \hat{T}$

E: $K\Lambda = T\Sigma$, $KM = PT$ και $\Lambda M = P\Sigma$

γ) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα, όταν:

A: $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $\hat{B} = \hat{E}$

B: είναι και τα δύο ορθογώνια.

Γ: είναι και τα δύο ισοσκελή.

Δ: $A\Gamma = \Delta Z$, $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

E: είναι και τα δύο ισόπλευρα.

δ) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθα-
σμένη;

A: Τα ίσα τρίγωνα έχουν τις γωνίες ίσες μία προς μία.

B: Τα ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές μία προς μία
ίσες.

Γ: Στα ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρί-
σκονται ίσες γωνίες και απέναντι από ίσες γωνίες βρί-
σκονται ίσες πλευρές.

Δ: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές ή τις γωνίες
τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

E: Από την ισότητα δύο τριγώνων προκύπτει ισότητα
τμημάτων ή γωνιών.

ε) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθα-
σμένη;

A: Το σκαληνό τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές άνισες.

B: Ένα τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή ή το πολύ μία
αμβλεία γωνία.

Γ: Το ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές ίσες.

Δ: Στο ορθογώνιο τρίγωνο υποτείνουσα είναι η πλευ-
ρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία.

E: Τα ύψη κάθε τριγώνου (εκτός από τα άκρα τους)
βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου.

στ) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), ποια
από τις παρακάτω προτάσεις δεν ισχύει;

A: $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

B: Η διάμεσος προς τη βάση είναι και διχοτόμος και
ύψος.

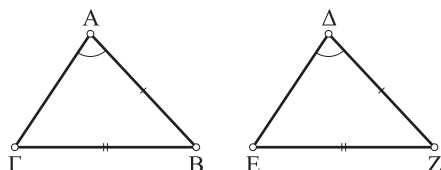
Γ: Η δ_a ταυτίζεται με το u_a .

Δ: Οι διχοτόμοι $A\Delta$ και BE είναι ίσες.

E: Οι εξωτερικές γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες.

3.61 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή ως λανθασμένες (Λ).

- α) Το οξυγώνιο τρίγωνο έχει μόνο δύο οξείες γωνίες.
- β) Ισόπλευρο λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.
- γ) Η ορθή γωνία ενός ορθογώνιου τριγώνου περιέχεται στις κάθετες πλευρές.
- δ) Στα ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές και απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- ε) Δύο τρίγωνα με όλες τις γωνίες μία προς μία ίσες είναι ίσα.
- στ) Τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι υποχρεωτικά ίσα.



- ζ) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.
- η) Στο ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης είναι ίσες.
- θ) Σε ίσα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσες χορδές και αντίστροφα (τόξα μικρότερου του ημικυκλίου).
- ι) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΖ ($ΔΕ = ΔΖ$) η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος προς την ΕΖ συμπίπτουν.
- ια) Τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του.
- ιβ) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο δύο οποιεσδήποτε διάμεσοί του είναι ίσες.

Κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1ο

- A. α) Τι λέγεται διάμεσος ενός τριγώνου;
- β) Τι λέγεται ύψος ενός τριγώνου και τι διχοτόμος;
- B. Να αποδείξετε ότι:
 - α) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
 - i) Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
 - ii) Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
 - β) Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.
 - γ) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντίστροφα.
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή ως λανθασμένες (Λ).
 - α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
 - β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τρεις γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
 - γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης είναι ίσες.
 - δ) Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
 - ε) Σε ίσα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσες χορδές.

στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μια γωνία ίση, τότε είναι αναγκαστικά ίσα.

ζ) Αν δύο τρίγωνα έχουν από μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

η) Τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του και αντίστροφα.

Θέμα 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και K, Λ, M τα μέσα των πλευρών του $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $MK = M\Lambda$,

β) η AM διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\widehat{KML}$.

Θέμα 3ο

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Αν οι $AM, \Delta N$ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}, \hat{\Delta}$, να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = EZ$

β) $AM = \Delta N$

Θέμα 4ο

Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$, τα σημεία A, Γ της Ox και τα σημεία B, Δ της Oy , ώστε $OA = OB$, $O\Gamma = O\Delta$. Αν οι $A\Delta, B\Gamma$ τέμνονται στο M , να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{A\Gamma M} = \widehat{B\Delta M}$,

β) τα τρίγωνα $MA\Gamma$ και $MB\Delta$ είναι ίσα,

γ) η OM είναι διχοτόμος της $\widehat{xOy}$.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

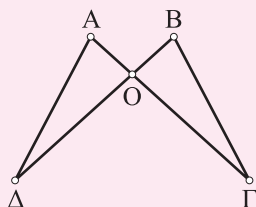
2ο Θέμα

3.62 Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$ και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα τέτοια, ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

- $MA = MB$,
- η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$.

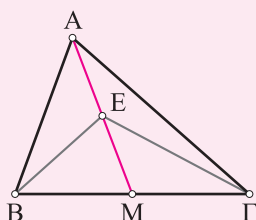
3.63 Δίνονται τα τμήματα $ΑΓ = ΒΔ$ που τέμνονται στο σημείο Ο έτσι, ώστε $OA = OB$, και τα σημεία Η και Ζ στα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα έτσι, ώστε $OH = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

- οι γωνίες $\widehat{A\hat{O}O}$ και $\widehat{B\hat{O}O}$ είναι ίσες,
- $AZ = BH$.



3.64 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν $B\Gamma = 2BE$, να αποδείξετε ότι:

- $\widehat{AEB} = \widehat{EM\Gamma}$
- $AB = E\Gamma$

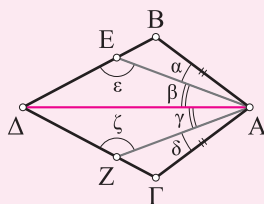


3.65 Αν στο διπλανό σχήμα είναι:

$$\hat{\alpha} = \hat{\delta}, \quad \hat{\beta} = \hat{\gamma} \quad \text{και} \quad AB = A\Gamma$$

να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα,
- οι γωνίες $\hat{\epsilon}$ και $\hat{\zeta}$ είναι ίσες.



3.66 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ ($KA = KB$) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{K}$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ έτσι, ώστε $AL = BM$. Να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές,
- η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ.

3.67 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $A\epsilon = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

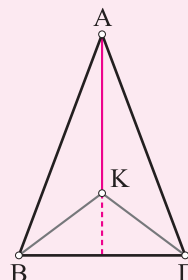
- τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα,
- τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα,
- το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

3.68 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα,
- η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BM\Gamma}$.

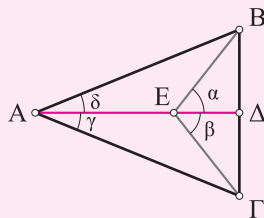
3.69 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα,
- η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$,
- η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$ του τριγώνου ΒΚΓ.



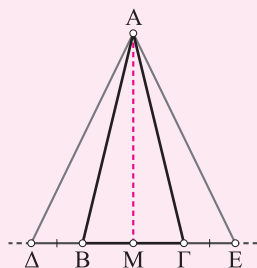
Οι απαντήσεις βρίσκονται στις σελίδες 479-482.

3.70 Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:



- Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.
- Το τρίγωνο GEB είναι ισοσκελές.
- Η ευθεία AD είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

3.71 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$, και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι, ώστε $B\Delta = \Gamma E$.



Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$,
- τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα,
- η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

3.72 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $A\Delta = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

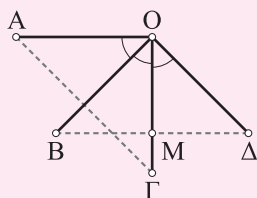
- $BE = \Gamma\Delta$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Gamma}B$

3.73 Αν είναι:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta}$$

και

$$OA = OB = O\Gamma = O\Delta$$



να αποδείξετε ότι:

- $A\Gamma = B\Delta$,
- το M είναι μέσο της $B\Delta$, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και $B\Delta$.

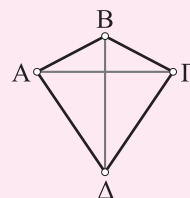
3.74 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με:

$$BA = B\Gamma \text{ και } \Delta A = \Delta \Gamma$$

Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

- η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$,
- η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.



3.75 Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα:

$$A\Delta = AB \text{ και } AE = A\Gamma$$

Να αποδείξετε ότι:

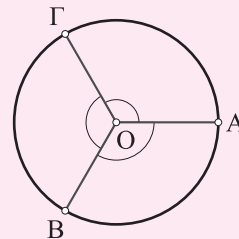
- τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα,
- η προέκταση της διαμέσου AM προς το μέρος της κορυφής A διχοτομεί την πλευρά $E\Delta$ του τριγώνου $\Delta A E$.

3.76 Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma O A}$.

- Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας AO διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BO\Gamma}$.

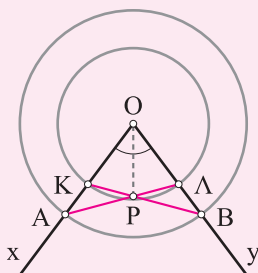
- Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του.

- Αν με κέντρο O και ακτίνα OK , όπου K το μέσο της ακτίνας OA , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες OB και $O\Gamma$ στα σημεία Λ και M αντίστοιχα, τότε τα τόξα $\widehat{KM}$ και $\widehat{AB}$ είναι ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



4ο Θέμα

3.77 Δίνεται οξεία γωνία $\widehat{xOy}$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και την Oy στα Λ, B αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι:

- α)** $AL = BK$,
- β)** το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL και BK ,
- γ)** η OP διχοτομεί την $\widehat{xOy}$.