

## *Φίλη μαθήτρια, φίλε μαθητή*

Τα Μαθηματικά της Γ' Γυμνασίου περιέχουν σημαντικά κεφάλαια και νέες μαθηματικές έννοιες που η πλήρης κατανόησή τους είναι απαραίτητη για όλες τις τάξεις του Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό είναι **ένα πλήρες βοήθημα** και έχει γραφεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μαθητής να ξεκινά από τη θεωρία και τις βασικές εφαρμογές της, να συνεχίζει με τη λύση ασκήσεων, η δυσκολία των οποίων προοδευτικά αυξάνεται, και να φτάνει σταδιακά στο επίπεδο να λύνει σύνθετα θέματα.

Έτσι θα μπορεί εύκολα να αντιμετωπίσει τα θέματα της **Τράπεζας** της Α' Λυκείου.

Κάθε ενότητα του βιβλίου περιέχει:

- βασική θεωρία και εφαρμογές της,
- λυμένες ασκήσεις,
- ερωτήσεις κατανόησης,
- ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας,
- συνδυαστικά θέματα,
- θέματα των οποίων η λύση απαιτεί **ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη**.

Σε επιλεγμένα σημεία του βιβλίου υπάρχουν **κριτήρια αξιολόγησης**, τα οποία θα βοηθήσουν τον μαθητή να ελέγξει αν έχει κατανοήσει την ύλη που μελέτησε.

Η τελευταία ενότητα του βιβλίου είναι **επαναληπτική** και περιέχει:

- συνδυαστικά θέματα, όπως αυτά που θα συναντήσεις στις απολυτήριες εξετάσεις,
- **κριτήρια αξιολόγησης**, τα οποία έχουν τη δομή των θεμάτων των απολυτήριων εξετάσεων,
- τα θέματα για την **εισαγωγή στα Πειραματικά Λύκεια**.

Επιπλέον στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν τόσο οι απαντήσεις των θεμάτων αυτού του βιβλίου όσο και οι **αναλυτικές λύσεις όλων των δραστηριοτήτων - ερωτήσεων - ασκήσεων - προβλημάτων του σχολικού βιβλίου**.

Θα ήθελα τέλος να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Δημήτρη Τσάκο για την επιμέλεια του βιβλίου και τις εύστοχες παρατηρήσεις του.

*Βασίλης Γ. Παπαδάκης  
Μαθηματικός*



## Περιεχόμενα

1. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους . . . . .	9
2. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών . . . . .	24
3. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού . . . . .	33
4. Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα . . . . .	46
5. Πράξεις με μονώνυμα . . . . .	55
6. Πολυώνυμα - Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων . . . . .	63
7. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων . . . . .	76
8. Αξιοσημείωτες ταυτότητες . . . . .	85
9. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων . . . . .	110
10. Διαίρεση πολυωνύμων . . . . .	131
11. Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων . . . . .	141
12. Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις . . . . .	146
13. Πράξεις ρητών παραστάσεων (Α) Πολλαπλασιασμός ρητών παραστάσεων Διαίρεση ρητών παραστάσεων . . . . .	154
14. Πράξεις ρητών παραστάσεων (Β) Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων . . . . .	162
15. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Αλγεβρικές παραστάσεις . . . . .	172
16. Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ . . . . .	176
17. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων . . . . .	183
18. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου . . . . .	193
19. Προβλήματα εξισώσεων 2ου βαθμού . . . . .	213
20. Κλασματικές εξισώσεις . . . . .	217
21. Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο . . . . .	226
22. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Εξισώσεις - Ανισώσεις . . . . .	249
23. Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης . . . . .	253
24. Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του . . . . .	267
25. Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος . . . . .	275
26. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Συστήματα γραμμικών εξισώσεων . . . . .	292

27.	Η συνάρτηση $y = ax^2$ , με $a \neq 0$ . . . . .	295
28.	Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ , με $a \neq 0$ . . . . .	305
29.	Επανάληψη στο κεφάλαιο: Συναρτήσεις . . . . .	320
30.	Σύνολα . . . . .	323
31.	Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα. . . . .	336
32.	Έννοια της πιθανότητας. . . . .	345
33.	Ισότητα τριγώνων. . . . .	352
34.	Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων. . . . .	373
35.	Θεώρημα του Θαλή . . . . .	383
36.	Ομοιοθεσία. . . . .	390
37.	Ομοιότητα (Α): Όμοια πολύγωνα. . . . .	398
38.	Ομοιότητα (Β): Όμοια τρίγωνα . . . . .	407
39.	Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων. . . . .	417
40.	Επανάληψη στο κεφάλαιο: Γεωμετρία. . . . .	425
41.	Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\omega$ , με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ . . . . .	429
42.	Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών . . . . .	441
43.	Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας. . . . .	452
44.	Νόμος των ημιτόνων - Νόμος των συνημιτόνων . . . . .	463
45.	Επανάληψη στο κεφάλαιο: Τριγωνομετρία . . . . .	470
46.	Γενικά θέματα σε όλη την ύλη για τις εξετάσεις. . . . .	473

▶	<i>Δοκιμασία εισαγωγής μαθητών στα Πρότυπα Πειραματικά Λύκεια Ιούνιος 2013 και Ιούνιος 2014 . . . . .</i>	483
---	---	-----

	<i>Απαντήσεις - Υποδείξεις. . . . .</i>	485
--	---	-----

	<i>Απαντήσεις σχολικού βιβλίου . . . . .</i>	599
--	--	-----

## 1

## Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

## Βασική θεωρία και εφαρμογές

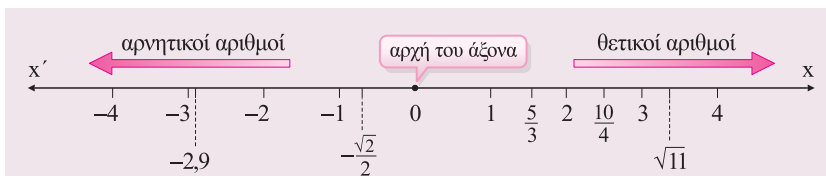
## 1.1 Ρητοί και άρρητοι αριθμοί

Οι αριθμοί που έχουμε μελετήσει μέχρι σήμερα είναι οι εξής:

- **Φυσικοί** είναι οι αριθμοί  $0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- **Ακέραιοι** είναι οι αριθμοί  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
- **Ρητοί** είναι οι αριθμοί που μπορούν να πάρουν τη μορφή ενός κλάσματος  $\frac{\mu}{\nu}$ , όπου

$\mu$  και  $\nu$  είναι ακέραιοι αριθμοί με  $\nu \neq 0$ . Για παράδειγμα, οι αριθμοί  $\frac{3}{5}, \frac{-7}{4}, -\frac{8}{1}$  είναι ρητοί.

- **Άρρητοι** ονομάζονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, δηλαδή που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή κλάσματος με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους αριθμούς. Παραδείγματα άρρητων αριθμών είναι οι  $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{11}$  κ.λπ. Υπάρχουν επίσης άρρητοι αριθμοί που δεν εκφράζονται υποχρεωτικά ως ρίζες κάποιου αριθμού, όπως είναι ο αριθμός  $\pi \simeq 3,14159 \dots$
- **Πραγματικοί** είναι οι αριθμοί που αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς. Αν οι πραγματικοί αριθμοί τοποθετηθούν πάνω σε μια ευθεία, τότε την «γεμίζουν» πλήρως, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Η ευθεία αυτή ονομάζεται **ευθεία ή άξονας των πραγματικών αριθμών**.



## Εφαρμογή

Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί:

α) 3      β)  $-\frac{8}{2}$       γ)  $\frac{11}{5}$       δ)  $\sqrt{5}$       ε)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       στ)  $\sqrt{16}$

## Λύση

Όλοι οι δοσμένοι αριθμοί, δηλαδή οι 3,  $-\frac{8}{2}$ ,  $\frac{11}{5}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\sqrt{16}$  είναι πραγματικοί. Επιπλέον:

α) Ο αριθμός 3 είναι φυσικός, ακέραιος και ρητός.

β) Ο αριθμός  $-\frac{8}{2} = -4$  είναι ακέραιος και ρητός.

γ) Ο αριθμός  $\frac{11}{5}$  είναι ρητός.

δ) Ο αριθμός  $\sqrt{5}$  είναι άρρητος.

ε) Ο αριθμός  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  είναι άρρητος. (Επειδή έχει τη μορφή κλάσματος δεν σημαίνει ότι είναι ρητός.)

στ) Ο αριθμός  $\sqrt{16} = 4$  είναι φυσικός, ακέραιος και ρητός.

(Δεν είναι όλες οι ρίζες άρρητοι αριθμοί.)

## 1.2 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

- **Απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού  $a$  ονομάζουμε την απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό  $a$  από την αρχή  $O$  του άξονα των πραγματικών αριθμών.
- Η απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού  $a$  συμβολίζεται με  $|a|$ .
- Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $a$  είναι πάντα ένας αριθμός **θετικός ή μηδέν**.

Συγκεκριμένα ισχύει ότι:

▶  $|a| = a$ , αν  $a \geq 0$

▶  $|a| = -a$ , αν  $a < 0$

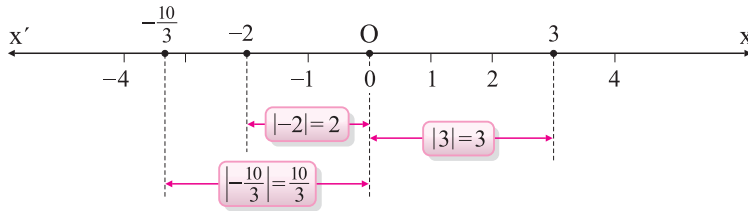
## Εφαρμογή

Να βρείτε τις απόλυτες τιμές των παρακάτω αριθμών:

α) 3      β) -2      γ)  $-\frac{10}{3}$       δ) 0

### Λύση

Τοποθετούμε τους αριθμούς  $3$ ,  $-2$ ,  $-\frac{10}{3}$  και  $0$  στον άξονα των αριθμών:



Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, έχουμε:

α)  $|3| = 3$       β)  $|-2| = 2$       γ)  $|\frac{-10}{3}| = \frac{10}{3}$       δ)  $|0| = 0$

### 1.3 Πρόσθεση πραγματικών αριθμών

- Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.
- Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά τους βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

### Εφαρμογή

Να κάνετε τις παρακάτω προσθέσεις:

α)  $+6 + 9$       β)  $-8 + (-6)$       γ)  $-8 + 12$       δ)  $4 + (-9)$

### Λύση

α) Οι αριθμοί  $+6$  και  $+9$  είναι ομόσημοι (θετικοί), άρα:

$$+6 + 9 = +(|6| + |9|) = +(6 + 9) = +15$$

β) Οι αριθμοί  $-8$  και  $-6$  είναι ομόσημοι (αρνητικοί), άρα:

$$-8 + (-6) = -(|-8| + |-6|) = -(8 + 6) = -14$$

γ) Οι αριθμοί  $-8$  και  $+12$  είναι ετερόσημοι και μεγαλύτερη απόλυτη τιμή έχει ο  $+12$ .

Άρα:

$$-8 + 12 = +(|12| - |-8|) = +(12 - 8) = +4$$

δ) Οι αριθμοί  $4$  και  $-9$  είναι ετερόσημοι και μεγαλύτερη απόλυτη τιμή έχει ο  $-9$ , άρα:

$$4 + (-9) = -(|-9| - |4|) = -(9 - 4) = -5$$

## 1.4 Πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο «+». Ισχύουν δηλαδή οι κανόνες:

$$(+) \cdot (+) = (+) \quad \text{και} \quad (-) \cdot (-) = (+)$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο «-». Ισχύουν δηλαδή οι κανόνες:

$$(+) \cdot (-) = (-) \quad \text{και} \quad (-) \cdot (+) = (-)$$

- Για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$  ισχύει:

$$a \cdot 0 = 0$$

### Εφαρμογή

Να κάνετε τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς:

α)  $(+3) \cdot (+7)$     β)  $(-4) \cdot (-6)$     γ)  $(+6) \cdot (-9)$     δ)  $(-11) \cdot 0$

### Λύση

α) Οι αριθμοί  $+3$  και  $+7$  είναι ομόσημοι θετικοί (περίπτωση  $+ \cdot + = +$ ), άρα:

$$(+3) \cdot (+7) = + (|+3| \cdot |+7|) = +(3 \cdot 7) = +21$$

β) Οι αριθμοί  $-4$  και  $-6$  είναι ομόσημοι αρνητικοί (περίπτωση  $- \cdot - = +$ ), άρα:

$$(-4) \cdot (-6) = + (|-4| \cdot |-6|) = +(4 \cdot 6) = +24$$

γ) Οι αριθμοί  $+6$  και  $-9$  είναι ετερόσημοι (περίπτωση  $+ \cdot - = -$ ), άρα:

$$(+6) \cdot (-9) = - (|+6| \cdot |-9|) = -(6 \cdot 9) = -54$$

δ) Ισχύει  $(-11) \cdot 0 = 0$ .

## 1.5 Αφαίρεση πραγματικών αριθμών

- Δύο αριθμοί λέγονται **αντίθετοι**, όταν έχουν άθροισμα ίσο με 0 (μηδέν). Δηλαδή, αν  $a$  και  $\beta$  είναι δύο αντίθετοι αριθμοί, τότε γράφουμε  $a + \beta = 0$ .
- Ο αντίθετος του  $a$  είναι ο  $-a$ .
- Για να κάνουμε την **αφαίρεση**  $a - \beta$ , προσθέτουμε στον μειωτέο ( $a$ ) τον αντίθετο του αφαιρετέου ( $\beta$ ). Δηλαδή:

$$a - \beta = a + (-\beta)$$



## Εφαρμογή

Να κάνετε τις παρακάτω αφαιρέσεις:

α)  $5 - 11$

β)  $-9 - 3$

γ)  $-17 - (-17)$

## Λύση

Έχουμε:

α)  $5 - 11 = 5 + (-11) = -(11 - 5) = -6$

β)  $-9 - 3 = -9 + (-3) = -(9 + 3) = -12$

γ)  $-17 - (-17) = -17 + 17 = 0$

## 1.6 Διαίρεση πραγματικών αριθμών

- Δύο μη μηδενικοί αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι**, όταν έχουν γινόμενο 1 (μονάδα). Δηλαδή, αν  $a$  και  $\beta$  πραγματικοί αριθμοί, με  $a, \beta \neq 0$ , αντίστροφοι, τότε γράφουμε  $a \cdot \beta = 1$ .
- Ο αντίστροφος του  $a$  είναι ο  $\frac{1}{a}$  και ο αντίστροφος του  $\frac{\alpha}{\beta}$  είναι ο  $\frac{\beta}{\alpha}$ .
- Για να κάνουμε τη **διαίρεση**  $a : \beta$ , με  $\beta \neq 0$ , πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο ( $a$ ) με τον αντίστροφο του διαιρέτη ( $\beta$ ). Δηλαδή:

$$a : \beta = a \cdot \frac{1}{\beta}$$

- Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό ως εξής:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

γινόμενο άκρων όρων

γινόμενο μέσων όρων

## Εφαρμογή

Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α)  $(-4) : (-12)$

β)  $9 : (-6)$

γ)  $\frac{15}{4} : \frac{5}{8}$

δ)  $5 : 0$

ε)  $\frac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{5}}$

## Λύση

Έχουμε:

α)  $(-4) : (-12) = (-4) \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = +\left(4 \cdot \frac{1}{12}\right) = +\frac{4}{12} = +\frac{1}{3}$

$$\beta) 9 : (-6) = 9 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\left(9 \cdot \frac{1}{6}\right) = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

$$\gamma) \frac{15}{4} : \frac{5}{8} = \frac{15}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{15 \cdot 8}{4 \cdot 5} = \frac{120}{20} = 6$$

δ) Η διαίρεση  $5 : 0$  δεν ορίζεται, διότι ο διαιρέτης είναι μηδέν.

$$\epsilon) \frac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{9 \cdot 5}{10 \cdot 3} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$$

## 1.7 Ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a + \beta = \beta + a$	$a \cdot \beta = \beta \cdot a$
Προσεταιριστική	$a + (\beta + \gamma) = (a + \beta) + \gamma$	$a \cdot (\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Αντίθετος/Αντίστροφος	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$
Επιμεριστική	$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$	

### Εφαρμογή

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού:

$$\alpha) 23 + (147 + 28) \quad \beta) (37 \cdot 25) \cdot 4 \quad \gamma) 36 \cdot 42 + 36 \cdot 58$$

### Λύση

α) Σύμφωνα με την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης έχουμε:

$$23 + (147 + 28) = (23 + 147) + 28 = 170 + 28 = 198$$

β) Σύμφωνα με την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού έχουμε:

$$(37 \cdot 25) \cdot 4 = 37 \cdot (25 \cdot 4) = 37 \cdot 100 = 3.700$$

γ) Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε:

$$36 \cdot 42 + 36 \cdot 58 = 36 \cdot (42 + 58) = 36 \cdot 100 = 3.600$$

## 1.8 Αθροισμα πολλών προσθετών

Όταν έχουμε να υπολογίσουμε ένα άθροισμα πολλών προσθετών μάς εξυπηρετεί να εργαστούμε ως εξής:

1. Αλλάζουμε τη σειρά των προσθετών, γράφοντας πρώτα τους θετικούς αριθμούς και στη συνέχεια τους αρνητικούς αριθμούς.
2. Υπολογίζουμε ξεχωριστά το άθροισμα των θετικών αριθμών και ξεχωριστά το άθροισμα των αρνητικών αριθμών.
3. Προσθέτουμε τα δύο αθροίσματα που βρήκαμε.

### Εφαρμογή

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = -7 + 5 - 2 - 6 + 12 + 3 - 10$$

### Λύση

Έχουμε:

$$A = -7 + 5 - 2 - 6 + 12 + 3 - 10 = 5 + 12 + 3 - 7 - 2 - 6 - 10 = 20 - 25 = -5$$

## 1.9 Απαλοιφή παρενθέσεων

- Αν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το «συν» (+), τότε απαλείφουμε την παρένθεση, αφήνοντας τους αριθμούς με τα πρόσημα που έχουν.
- Αν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το «μείον» (-), τότε απαλείφουμε την παρένθεση, αλλάζοντας τα πρόσημα των αριθμών.

### Εφαρμογή

Να βρείτε την τιμή της παρακάτω αριθμητικής παράστασης, κάνοντας πρώτα απαλοιφή των παρενθέσεων:

$$A = -(-2) + (-3) - (+5) - (-7 + 4) + (5 - 12)$$

### Λύση

Έχουμε:

$$A = -(-2) + (-3) - (+5) - (-7 + 4) + (5 - 12) =$$

$$= +2 - 3 - 5 + 7 - 4 + 5 - 12 =$$

← Διαγράφουμε τους αντίθετους αριθμούς.

$$= 2 + 7 - 3 - 4 - 12 = 9 - 19 = -10$$

## 1.10 Προτεραιότητα των πράξεων

Σε μια αριθμητική παράσταση η **προτεραιότητα των πράξεων**, δηλαδή η σειρά με την οποία πρέπει να γίνουν οι πράξεις, είναι η εξής:

1. Πρώτα κάνουμε τους **πολλαπλασιασμούς** και τις **διαιρέσεις**.
2. Στη συνέχεια κάνουμε τις **προσθέσεις** και τις **αφαιρέσεις**.

Αν υπάρχουν **παρενθέσεις** ή **αγκύλες**, πρώτα κάνουμε τις πράξεις μέσα σε αυτές με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

### Εφαρμογή

Να βρείτε την τιμή της παρακάτω αριθμητικής παράστασης:

$$A = 12 : [4 + 2(3 - 8)] - 2[(3 \cdot 4 - 2 \cdot 9) \cdot (-2) + 3(-11 + 2 \cdot 3)]$$

### Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 12 : [4 + 2(3 - 8)] - 2[(3 \cdot 4 - 2 \cdot 9) \cdot (-2) + 3(-11 + 2 \cdot 3)] = \\ &= 12 : [4 + 2 \cdot (-5)] - 2[(12 - 18) \cdot (-2) + 3(-11 + 6)] = \\ &= 12 : (4 - 10) - 2[(-6) \cdot (-2) + 3 \cdot (-5)] = \\ &= 12 : (-6) - 2(12 - 15) = -2 - 2 \cdot (-3) = -2 + 6 = 4 \end{aligned}$$

## 1.11 Αλγεβρικές παραστάσεις

- Μια παράσταση, η οποία εκτός από αριθμούς περιέχει και μεταβλητές (γράμματα), λέγεται **αλγεβρική παράσταση**.
- Σε μια αλγεβρική παράσταση μπορούμε να κάνουμε **αναγωγή ομοίων όρων** με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας. Για παράδειγμα:

$$2x - 5x + 4x - 8x + x = (2 - 5 + 4 - 8 + 1) \cdot x = -6x$$

- Αν γνωρίζουμε τις τιμές των μεταβλητών, τότε αρχικά απλοποιούμε την αλγεβρική παράσταση και μετά αντικαθιστούμε τις τιμές των μεταβλητών.

### Εφαρμογή

Αν  $x = \frac{5}{3}$ , να βρείτε την τιμή της αλγεβρικής παράστασης:

$$A = 2[4(x - 3) - (x + 2)] - [2(3 - x) - 5(5 - x)]$$

### Λύση

Αρχικά θα απλοποιήσουμε την παράσταση A:

$$\begin{aligned} A &= 2[4(x - 3) - (x + 2)] - [2(3 - x) - 5(5 - x)] = \\ &= 2(4x - 12 - x - 2) - (6 - 2x - 25 + 5x) = \\ &= 2(3x - 14) - (3x - 19) = 6x - 28 - 3x + 19 = \\ &= 6x - 3x - 28 + 19 = 3x - 9 \end{aligned}$$

Η παράσταση  $A = 3x - 9$ , για  $x = \frac{5}{3}$ , γίνεται:

$$A = 3x - 9 = 3 \cdot \frac{5}{3} - 9 = \frac{15}{3} - 9 = 5 - 9 = -4$$

### 1.12 Αν $x + y = -3$ , να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3(x - 2y) - 2(x - 4y) - (3x + 4y)$$

### Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 3(x - 2y) - 2(x - 4y) - (3x + 4y) = \\ &= 3x - 6y - 2x + 8y - 3x - 4y = 3x - 2x - 3x - 6y + 8y - 4y = \\ &= (3 - 2 - 3)x + (-6 + 8 - 4)y = -2x - 2y = -2(x + y) = -2 \cdot (-3) = 6 \end{aligned}$$

### 1.13 Αν $a \cdot b = 0$ , τότε $a = 0$ ή $b = 0$

Όταν ένα γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με μηδέν, τότε ή ο ένας ή ο άλλος (ή και οι δύο) είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\text{Αν } a \cdot b = 0, \text{ τότε } a = 0 \text{ ή } b = 0$$

Η παραπάνω ιδιότητα θα μας φανεί χρήσιμη στην επίλυση εξισώσεων, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

## Εφαρμογή

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει:

$$(2x - 6)(12 + 3x) = 0$$

## Λύση

Έχουμε ένα γινόμενο ίσο με μηδέν. Άρα:

$$(2x - 6)(12 + 3x) = 0$$

$$2x - 6 = 0 \quad \text{ή} \quad 12 + 3x = 0$$

$$2x = 6 \quad \text{ή} \quad 3x = -12$$

$$x = \frac{6}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-12}{3}$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -4$$

## Θέματα προς απάντηση

### Πραγματικοί αριθμοί-Αριθμητικές παραστάσεις

**1.14** Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι είναι άρρητοι. Να γράψετε τους ρητούς σε κλασματική μορφή.

- α)  $\sqrt{81}$       β) 2,5      γ) 3,456  
δ)  $\sqrt{2}$       ε) 0,03      στ) 1,444...

**1.15** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- α)  $-3 + 5 - 7 + 1$       β)  $8 - 14 - 21 + 9$   
γ)  $-3 \cdot 6 + 11$       δ)  $-4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-7)$   
ε)  $21 : (-3) + 4 \cdot (-2)$   
στ)  $-45 : (-5) + 63 : (-7)$

**1.16** Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

- α)  $(7 - 2 \cdot 5) \cdot 4 - 15 : (-8 + 3)$   
β)  $(2 \cdot 6 - 3 \cdot 7) : (-3) + 5 \cdot (4 - 6)$

γ)  $24 : (-5 - 7) + (5 - 2 \cdot 4) \cdot (-7 + 6)$

δ)  $(9 - 7 - 2 \cdot 5) : (-4) + (2 - 2 \cdot 3) : 2$

**1.17** Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

- α)  $37 \cdot 21 + 37 \cdot 79$   
β)  $132 \cdot 56 - 32 \cdot 56$   
γ)  $47 \cdot 36 - 47 \cdot 25 - 47$   
δ)  $19 \cdot 21 - 19 \cdot 15 - 19 \cdot 6$

**1.18** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- α)  $-8 - [3 - (2 - 7 + 6)] - (-3 + 6)$   
β)  $-5 - [-3(1 - 3) - (5 - 2)]$   
γ)  $-(9 - 4 \cdot 5) - [7 \cdot (-2) - (4 - 3 \cdot 5)]$   
δ)  $-8 - 2[5 \cdot (-3) - 4 \cdot (9 - 2 \cdot 6)]$   
ε)  $[(-11 + 7 \cdot 8) : (-6 - 3) - 7] : [-1 + 21 : (-7)]$

**1.19** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α)  $|-5| + |-3| - |-2| - |-1|$

β)  $|-12| : (-4 - |-2|) - |3 - 8|$

γ)  $|5 - 11| : |-3| + |19 - 22| \cdot (-3)$

δ)  $|-2| \cdot |12 - 8| - |3 - 2 \cdot 4|$

**1.20** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α)  $\frac{-1 + 7 \cdot 3}{(-5) \cdot (-4) + 3 \cdot (-8)}$

β)  $\frac{7 - 2 \cdot (3 + 4 \cdot 2)}{1 - [32 : (-8) - 16 : (-2)]}$

γ)  $\frac{3 \cdot (-2) - (-3 + 2 - 11) - (2 - 8)}{[-2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-6)] : (-1 + 3)}$

δ)  $\frac{-(-33) : 3 + 15 \cdot (-4) - 3 \cdot (-6) + 10}{3 - [2 - (3 - 9)] - (4 - 2 \cdot 6)}$

**1.21** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α)  $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} - 2$       β)  $\frac{9}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$

γ)  $-\frac{32}{27} : \left(-\frac{16}{9}\right)$       δ)  $-\frac{15}{4} : 3$

**1.22** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α)  $\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) - \frac{7}{16} : \frac{21}{8}$

β)  $\left(\frac{7}{10} - \frac{8}{15} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - 1\right)$

γ)  $\left[-\frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) + 1\right] : \left(1 - \frac{14}{3}\right)$

δ)  $\left[\left(-2 + \frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{3}{8}\right] : \left(\frac{1}{4} - 3\right)$

**1.23** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α)  $\frac{\frac{9}{5} - 2 - \frac{1}{4}}{\frac{7}{10} - 2 - \frac{1}{5}}$       β)  $\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} - \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{4}}$

**1.24** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α)  $\frac{2}{\frac{1}{2} - \frac{7}{2} : 2} : \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{12} \cdot 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}}$

β)  $\frac{-1 - \frac{3}{2} : \left(-\frac{2}{5}\right)}{\frac{3}{5} : \left(1 - \frac{3}{5}\right)} : \frac{1 - \frac{7}{2} : \frac{3}{4}}{\frac{3}{5} : \left(-\frac{9}{10}\right) - \frac{5}{6}}$

### Αλγεβρικές παραστάσεις

**1.25** Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή τους για:

$$x = -\frac{3}{2}$$

α)  $A = 6(x - 4) - (6 - 2x) - 2(x - 10)$

β)  $B = 2[5 - 3(x + 2)] - 4[2 - (x + 1)]$

**1.26** Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή τους για:

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y = -\frac{1}{4}$$

α)  $A = 3(x - 2\omega) - 2(-3\omega - 4y) - (-x)$

β)  $B = 2[3 - 4(x - y)] - 12[1 - (x + y)]$

**1.27** Να αποδείξετε ότι οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων είναι ανεξάρτητες από την τιμή του  $a$ .

α)  $A = 4(1 - a) - 3[a - 2(a + 1)] - (5 - a)$

β)  $B = \frac{1}{3}[a - 2(3 - a)] - \frac{1}{5}[2a - 3(5 - a)]$

**1.28** Αν  $x + y = -3$ , να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- α)  $A = 4(x - y) - 2(x - 3y)$   
 β)  $B = 5(x - 3) + 2(y - x) - (-5 - y)$   
 γ)  $\Gamma = -3[x - 2(1 - y)] - [3x - 2(y + x)]$

**1.29** Αν  $x - y = -2$ , να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

- α)  $A = 3(2x - 5y) - 2(x - 6y) - y$   
 β)  $B = -(-x - 7y) + 4(y - 2\omega) - 4[x + 2(y - \omega)]$

**1.30** Αν ισχύει ότι  $2x + 3y = 5$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3[2(x - 1) - (x - 3y)] - 2(y - x) - (x + y)$$

**1.31** Αν  $\alpha + \beta = 3$  και  $\gamma + \delta = -4$ , να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- α)  $A = 3(\alpha - 2\delta) - 3(2\gamma - \beta)$   
 β)  $B = \beta - [\alpha - 2(\beta - \delta)] - 2[\gamma - (1 - 2\beta)]$

**1.32** Αν ο μέσος όρος των αριθμών  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι 4, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4(\alpha - \beta) - 2[\alpha + 2\gamma - 3(\beta + \gamma)]$$

**1.33** Αν οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι αντίθετοι, να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

- α)  $A = 2[3 - (\alpha - 2\beta)] - (\beta - 5\alpha)$

β)  $B = -(\alpha + 2\beta) - 2[\beta - 2(1 - \alpha)] - \beta$

**1.34** Αν οι αριθμοί  $x$  και  $y$  είναι αντίθετοι και οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = -2(x - y + \alpha) + \alpha(\beta + 2) - 4(x + 2y)$$

**1.35** Αν  $\alpha = 2$ ,  $\beta$  είναι ο αντίστροφος του  $\alpha$  και  $\gamma$  είναι ο αντίθετος του  $\beta$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3\alpha - (\beta - 2\gamma) - [\alpha - (2\gamma - 7\beta) - 2(\beta - 3\gamma)]$$

**1.36** Δίνεται ο αριθμός:

$$\omega = \left(\frac{1}{4} - 1\right) : \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{\frac{3}{4} : \left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

- α) Να βρείτε τον αριθμό  $\omega$ .  
 β) Αν ο αριθμός  $x$  είναι ο αντίθετος του  $\omega$  και ο αριθμός  $y$  είναι ο αντίστροφος του  $x$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2[7(x - 3) - 6(y - 2)] - 3[y - 2(x - y)]$$

### Θέματα των οποίων η λύση απαιτεί ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη

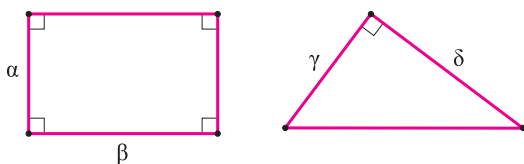
**1.37** Για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει:

$$\frac{1}{2}\alpha + 2,5\beta + 1,5\alpha - \frac{1}{2}\beta = -6$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = -3(\alpha - \beta) - 2(\alpha - 2\beta) + 3[5\alpha - (-\beta + 1)]$$

**1.38** Στα παρακάτω σχήματα οι σημειωμένες διαστάσεις είναι σε cm.



Αν το ορθογώνιο έχει περίμετρο 12 cm και το τρίγωνο έχει εμβαδόν 4 cm<sup>2</sup>, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{4}\right) - 6\left[\alpha - \frac{1}{2}(2\gamma - \beta)\right] - \gamma(6 - 5\delta)$$

**1.39** Αν ισχύει ότι  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$ , να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- α)  $A = \frac{8\alpha + 15\beta}{12\alpha - 2\beta}$   
 β)  $B = 5[2(\alpha - 1) + 1] - 2[\alpha - 3(1 - \beta)]$



**1.40** Αν οι αριθμοί  $2x$  και  $3y$  είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{12x + \frac{4}{y}}{18x - \frac{1}{y}}$$

**1.41** Για τους αριθμούς  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  ισχύει ότι:

$$\frac{a}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4}$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{3(a + 2\gamma) - 2[a - 2(a - \gamma)]}{6 - 3[\gamma - 2(\beta - 1)]}$$

**1.42** Αν ισχύει ότι  $a + \beta = 3.021$  και  $a + \gamma = 3.018$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{2a + \beta + \gamma}{\beta - \gamma}$$

**1.43 α)** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} = \frac{1}{v(v+1)}$$

**β)** Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\Sigma = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$$

**1.44** Για τους αριθμούς  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  ισχύουν:

$$2[a - (\gamma + 1)] = 1 - 4\gamma \text{ και } 2 - [\gamma - (\beta - 3)] = 0$$

**α)** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα  $a + \beta$  είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό  $\gamma$ .

**β)** Αν οι αριθμοί  $x$  και  $y$  δεν είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = [2(a - 4) - (3 - 2\beta)] : \frac{3(x - \omega) + 3(y + \omega)}{6 - 10x + 2(4x - y - 3)}$$

### Ερωτήσεις τύπου Σωστό ή Λάθος

**1.45** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.

 Σ  Λ

**β)** Δύο αντίστροφοι αριθμοί είναι ετερόσημοι.

 Σ  Λ

**γ)** Για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό  $a$ , ο αριθμός  $\sqrt{a}$  είναι άρρητος.

 Σ  Λ

**δ)** Ο αριθμός  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  έχει τη μορφή κλάσματος, άρα είναι ρητός.

 Σ  Λ

**ε)** Αν δύο αριθμοί έχουν άθροισμα αρνητικό, τότε είναι υποχρεωτικά και οι δύο αρνητικοί.

 Σ  Λ

**στ)** Αν δύο αριθμοί έχουν γινόμενο αρνητικό, τότε είναι υποχρεωτικά ετερόσημοι.

 Σ  Λ

**ζ)** Δεν υπάρχει αριθμός που να είναι ίσος με τον αντίθετό του.

 Σ  Λ

**η)** Ο αριθμός 1 είναι ο μοναδικός αριθμός που ισούται με τον αντίστροφό του.

 Σ  Λ

**θ)** Αν ισχύει ότι  $\frac{a}{\beta} < 0$ , τότε ισχύει και ότι  $a \cdot \beta < 0$ .

 Σ  Λ

**ι)** Ισχύει ότι  $(a : \beta) : \gamma = a : (\beta : \gamma)$ .

 Σ  Λ

### Ερωτήσεις τύπου πολλαπλής επιλογής

**1.46** Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

α) Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta \neq 0$  είναι αντίθετοι, τότε ισχύει ότι:

**A:**  $\alpha + \beta = 1$

**B:**  $\alpha \cdot \beta = 1$

**Γ:**  $\frac{\alpha}{\beta} = -1$

**Δ:**  $\alpha + \beta = -1$

β) Η απόλυτη τιμή  $|3 - \sqrt{10}|$  είναι ίση με:

**A:**  $3 - \sqrt{10}$

**B:**  $\sqrt{10} - 3$

**Γ:**  $3 + \sqrt{10}$

**Δ:**  $-3 - \sqrt{10}$

γ) Αν  $\alpha < 0$  και  $\beta > 0$ , τότε από τις παρακάτω σχέσεις λανθασμένη είναι η:

**A:**  $\frac{\alpha \cdot \beta}{3} < 0$

**B:**  $-2\alpha\beta > 0$

**Γ:**  $\frac{\alpha}{-4\beta} > 0$

**Δ:**  $\frac{-5\alpha}{-3\beta} > 0$

δ) Ο αντίθετος του αριθμού  $\alpha - \beta$  είναι ο:

**A:**  $\beta - \alpha$

**B:**  $-\alpha - \beta$

**Γ:**  $\alpha + \beta$

**Δ:**  $-\beta + \alpha$

ε) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρρητος;

**A:**  $\sqrt{0}$

**B:**  $\sqrt{25}$

**Γ:**  $\sqrt{1.000}$

**Δ:**  $\sqrt{400}$

### Ελέγχω τις γνώσεις μου στη θεωρία

**1.47** α) Ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί και ποιοι άρρητοι;

β) Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $\alpha$ ;

γ) Πώς προσθέτουμε δύο ομόσημους αριθμούς;

δ) Πώς προσθέτουμε δύο ετερόσημους αριθμούς;

ε) Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο ομόσημους αριθμούς;

στ) Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο ετερόσημους αριθμούς;

ζ) Να γράψετε τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

η) Με τι ισούται το γινόμενο  $\alpha \cdot 0$ ;

θ) Αν ισχύει ότι  $\alpha\beta = 0$ , τι ισχύει για τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ ;

ι) Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι;

ια) Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;

ιβ) Πώς βρίσκουμε τη διαφορά δύο αριθμών;

ιγ) Πώς βρίσκουμε το πηλίκο δύο αριθμών;

## Κριτήριο αξιολόγησης

### Θέμα 1ο

Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $3[2(7 - 3 \cdot 4) - 12 : (9 - 21 : 7)] - 5 \cdot (-2) + (-63) : (-7)$

β)  $\left[ \left( 2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \right) - \frac{7}{8} : \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right] : \left( 2 - \frac{3}{4} \right)$

### Θέμα 2ο

Δίνεται η παράσταση  $A = 4 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} - (2 \cdot 6 - 4) : \frac{4}{5} - 6 \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$ .

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A.

β) Να γράψετε τον αντίθετο και τον αντίστροφο του A.

### Θέμα 3ο

α) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης A είναι ανεξάρτητη από τις τιμές των α και β:

$$A = 4 - 2(a - 3\beta) - 3(\beta - a + 1) - (a + 3\beta)$$

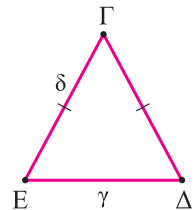
β) Αν  $a + \beta = -3$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$B = -3(a - 2) - \beta(3 - 5) - (3 - 6a - \beta)$$

### Θέμα 4ο

Οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι, ενώ οι αριθμοί δ και γ είναι οι διαστάσεις των πλευρών ΕΓ και ΕΔ αντίστοιχα, ενός ισοσκελούς τριγώνου ΓΔΕ με βάση ΔΕ, το οποίο έχει περίμετρο 8. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = -2[a - (\gamma - 2\beta)] - (a - 2\delta) - [2(2 - \delta) - \beta]$$



## 2

## Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

## Βασική θεωρία και εφαρμογές

## 2.1 Ορισμός της δύναμης πραγματικού αριθμού

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό  $a$  και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό  $n \geq 2$  συμβολίζεται με  $a^n$  και είναι ένα γινόμενο από  $n$  παράγοντες ίσους με  $a$ . Δηλαδή:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

Επίσης ορίζουμε ότι:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1, \quad \text{με } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{με } a \neq 0$$

## Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α)  $2^4$                       β)  $(-3)^3$                       γ)  $5^{-2}$                       δ)  $8^0$                       ε)  $0^0$

## Λύση

α)  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

β)  $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

γ)  $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25}$

δ)  $8^0 = 1$

ε) Η δύναμη  $0^0$  δεν έχει νόημα.

## 2.2 Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α)  $(-3)^2$  και  $-3^2$

β)  $(-3)^3$  και  $-3^3$

**Τι παρατηρείτε;**

### Λύση

α) Η δύναμη  $(-3)^2$  σημαίνει ότι ο αριθμός που θα υψωθεί στο τετράγωνο είναι ο  $-3$ . Έτσι από τον ορισμό της δύναμης έχουμε:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 = 9$$

Η δύναμη  $-3^2$  σημαίνει ότι ο αριθμός που θα υψωθεί στο τετράγωνο είναι ο  $3$ , οπότε:

$$-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$$

β) Η δύναμη  $(-3)^3$  σημαίνει ότι ο αριθμός που θα υψωθεί στον κύβο είναι ο  $-3$ . Έτσι από τον ορισμό της δύναμης έχουμε:

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

Η δύναμη  $-3^3$  σημαίνει ότι ο αριθμός που θα υψωθεί στον κύβο είναι ο  $3$ , οπότε:

$$-3^3 = -3 \cdot 3 \cdot 3 = -27$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

Οι δυνάμεις  $(-a)^v$  και  $-a^v$  δεν είναι πάντα ίσες.

## 2.3 Ιδιότητες δυνάμεων

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους (εφόσον αυτές ορίζονται) ισχύουν οι ιδιότητες:

•  $a^m \cdot a^v = a^{m+v}$

•  $a^m : a^v = a^{m-v}$  ή  $\frac{a^m}{a^v} = a^{m-v}$

•  $(a \cdot \beta)^v = a^v \cdot \beta^v$

•  $\left(\frac{a}{\beta}\right)^v = \frac{a^v}{\beta^v}$

•  $(a^m)^v = a^{m \cdot v}$

•  $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^v$

Ειδικά για τις δυνάμεις του **10**, αν  $v$  είναι φυσικός αριθμός, με  $v \geq 1$ , ισχύει ότι:

$$10^v = \underbrace{100 \dots 0}_v \text{ μηδενικά}$$

και

$$10^{-v} = \underbrace{0,00 \dots 01}_v \text{ δεκαδικά ψηφία}$$

## Εφαρμογή

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

$$\begin{array}{llll} \alpha) 2^{-5} \cdot 2^8 & \beta) 3^{12} : 3^8 & \gamma) \frac{(-4)^{-5}}{(-4)^{-7}} & \delta) 2^4 \cdot 5^4 \\ \epsilon) \frac{6^5}{3^5} & \sigma\tau) (2^{-2})^{-3} & \zeta) \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} & \eta) 0,00001 \cdot 10^7 \end{array}$$

## Λύση

$$\begin{array}{ll} \alpha) 2^{-5} \cdot 2^8 = 2^{-5+8} = 2^3 = 8 & \beta) 3^{12} : 3^8 = 3^{12-8} = 3^4 = 81 \\ \gamma) \frac{(-4)^{-5}}{(-4)^{-7}} = (-4)^{-5-(-7)} = (-4)^2 = 16 & \delta) 2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10.000 \\ \epsilon) \frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5 = 32 & \sigma\tau) (2^{-2})^{-3} = 2^{(-2) \cdot (-3)} = 2^6 = 64 \\ \zeta) \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \\ \eta) 0,00001 \cdot 10^7 = 10^{-5} \cdot 10^7 = 10^{-5+7} = 10^2 = 100 \end{array}$$

## 2.4 Τυποποιημένη μορφή πραγματικού αριθμού

Ένας πραγματικός αριθμός είναι γραμμένος σε **τυποποιημένη μορφή**, όταν είναι γραμμένος ως γινόμενο της μορφής:

$$x \cdot 10^y \quad \text{με} \quad 1 \leq |x| < 10$$

όπου  $x$  είναι δεκαδικός αριθμός και  $y$  ακέραιος αριθμός.

Σε τυποποιημένη μορφή γράφουμε αριθμούς που έχουν πολύ «μεγάλη» ή πολύ «μικρή» απόλυτη τιμή.

## Εφαρμογή

Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τον αριθμό  $a = \frac{12.000}{0,00006}$ .

## Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} a &= \frac{12.000}{0,00006} = \frac{1,2 \cdot 10^4}{6 \cdot 10^{-5}} = \frac{1,2}{6} \cdot \frac{10^4}{10^{-5}} = \\ &= 0,2 \cdot 10^{4-(-5)} = 0,2 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^{-1+9} = 2 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

## 2.5 Προτεραιότητα των πράξεων

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = [(10 + 2 \cdot 3^2) : 7 - 6 \cdot (-1)^9] : 5 + 3 \cdot (-2)^3$$

**Λύση**

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= [(10 + 2 \cdot 3^2) : 7 - 6 \cdot (-1)^9] : 5 + 3 \cdot (-2)^3 = \\ &= [(10 + 2 \cdot 9) : 7 - 6 \cdot (-1)] : 5 + 3 \cdot (-8) = \\ &= [(10 + 18) : 7 + 6] : 5 - 24 = \\ &= (28 : 7 + 6) : 5 - 24 = (4 + 6) : 5 - 24 = \\ &= 10 : 5 - 24 = 2 - 24 = -22 \end{aligned}$$

Σε μια παράσταση οι πράξεις γίνονται με την εξής σειρά:

1. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
2. Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
3. Κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

Αν στην παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις και αγκύλες, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα σ' αυτές με την παραπάνω σειρά.

## 2.6 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2^{-8} \cdot 3^2 \cdot (2^5 \cdot 3^2)^4}{(3^6 \cdot 2^4)^2}$$

**Λύση**

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^{-8} \cdot 3^2 \cdot (2^5 \cdot 3^2)^4}{(3^6 \cdot 2^4)^2} = \frac{2^{-8} \cdot 3^2 \cdot (2^5)^4 \cdot (3^2)^4}{(3^6)^2 \cdot (2^4)^2} = \\ &= \frac{2^{-8} \cdot 3^2 \cdot 2^{20} \cdot 3^8}{3^{12} \cdot 2^8} = \frac{3^2 \cdot 3^8 \cdot 2^{20} \cdot 2^{-8}}{3^{12} \cdot 2^8} = \frac{3^{10} \cdot 2^{12}}{3^{12} \cdot 2^8} = \\ &= \frac{3^{10}}{3^{12}} \cdot \frac{2^{12}}{2^8} = 3^{10-12} \cdot 2^{12-8} = 3^{-2} \cdot 2^4 = \frac{1}{3^2} \cdot 2^4 = \frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

## 2.7 Αλγεβρική παράσταση και ιδιότητες δυνάμεων

Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = (x^{-3} \cdot y^{-2})^4 \cdot \frac{(x^{-7} \cdot y^{-5})^{-2}}{(x^{-2} \cdot y^{-1})^2}$ , όταν  $x = 9$  και  $y = \frac{1}{27}$ .

## Λύση

Αρχικά θα απλοποιήσουμε την παράσταση Α, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων, και στη συνέχεια θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των x και y. Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x^{-3} \cdot y^{-2})^4 \cdot (x^{-7} \cdot y^{-5})^{-2}}{(x^{-2} \cdot y^{-1})^2} = \frac{(x^{-3})^4 \cdot (y^{-2})^4 \cdot (x^{-7})^{-2} \cdot (y^{-5})^{-2}}{(x^{-2})^2 \cdot (y^{-1})^2} = \\ &= \frac{x^{-12} \cdot y^{-8} \cdot x^{14} \cdot y^{10}}{x^{-4} \cdot y^{-2}} = \frac{x^{-12} \cdot x^{14} \cdot y^{-8} \cdot y^{10}}{x^{-4} \cdot y^{-2}} = \\ &= \frac{x^2 \cdot y^2}{x^{-4} \cdot y^{-2}} = \frac{x^2}{x^{-4}} \cdot \frac{y^2}{y^{-2}} = x^6 \cdot y^4 \end{aligned}$$

Για  $x = 9$  και  $y = \frac{1}{27}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 9^6 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^4 = (3^2)^6 \cdot (3^{-3})^4 = 3^{12} \cdot 3^{-12} = \\ &= 3^{12+(-12)} = 3^0 = 1 \end{aligned}$$

Προσπαθούμε να γράψουμε όλους τους αριθμούς ως δυνάμεις με την ίδια βάση.

## Θέματα προς απάντηση

### Αριθμητικές παραστάσεις

**2.8** Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α)  $2^5$       β)  $7^0$       γ)  $-13^0$   
δ)  $-7^2$       ε)  $(-5)^2$       στ)  $(-2)^3$   
ζ)  $-4^3$       η)  $-(-2)^4$       θ)  $-(-3)^3$

**2.9** Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α)  $2^{-3}$       β)  $3^{-2}$       γ)  $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$   
δ)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$       ε)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$       στ)  $\left(\frac{7}{13}\right)^0$

**2.10** Να γράψετε ως δυνάμεις με βάση το 2 τους παρακάτω αριθμούς:

α) 1      β) 4      γ) 16  
δ)  $\frac{1}{32}$       ε)  $8^5$       στ)  $\left(\frac{1}{16}\right)^7$

**2.11** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α)  $3^{-5} \cdot 3^7$       β)  $7^{21} : 7^{19}$   
γ)  $\frac{3^{11}}{3^7}$       δ)  $2^{-5} : 2^{-11}$   
ε)  $\frac{12^4}{6^4}$       στ)  $\frac{5^{-3}}{15^{-3}}$   
ζ)  $5^3 \cdot 5^4 \cdot 5^{-5}$       η)  $\frac{3^6 \cdot 3^4}{3^7}$   
θ)  $\frac{2^5 \cdot 2^8}{2^3 \cdot 2^6}$       υ)  $\frac{(10^7)^3}{(10^{-3})^{-6}}$

**2.12** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α)  $2^3 \cdot 5^3$       β)  $2^4 : 20^4$   
γ)  $(-2)^4 \cdot 5^4$       δ)  $(-5)^{-3} \cdot 2^{-3}$   
ε)  $4^6 \cdot (-2,5)^6$       στ)  $(-1,25)^5 \cdot (-8)^5$



**2.13** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α)  $10^7 \cdot 0,001$       β)  $0,01 : 10^{-5}$   
 γ)  $10^{-8} \cdot 100.000$       δ)  $(0,001)^{-4} : 10^7$   
 ε)  $(0,01)^5 \cdot 10^9$       στ)  $(0,0001)^3 \cdot (100)^5$

**2.14** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις και να γράψετε το αποτέλεσμα σε τυποποιημένη μορφή:

α)  $7.500.000 \cdot 200.000$       β)  $32.000 \cdot 0,0000000005$   
 γ)  $\frac{0,00003}{20.000}$       δ)  $\frac{500.000}{0,000002}$

**2.15** Να γράψετε ως μία δύναμη καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις:

α)  $2^3 \cdot 16$       β)  $2^7 \cdot \frac{1}{8}$   
 γ)  $3^3 \cdot 27 \cdot 81$       δ)  $2^{-4} \cdot 32^2$   
 ε)  $(-5)^4 \cdot 25^3$       στ)  $\left(\frac{1}{9}\right)^5 \cdot (-3)^{17}$

**2.16** Να κάνετε τις επόμενες πράξεις:

α)  $(2^3)^4 : 2^7$       β)  $(3 \cdot 3^2)^3 \cdot 3^{-6}$   
 γ)  $(7^{-2})^{-3} : 7^5$       δ)  $(5^7 : 5^4)^2 \cdot 5^{-4}$

ε)  $\frac{2^{15} : (2^3 \cdot 2^4)}{(2^{-3})^{-1}}$       στ)  $\frac{(3^2 \cdot 3^3)^4}{(3 \cdot 3^5)^3}$

**2.17** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α)  $\frac{[(4^3)^2 : 4]^3 \cdot [(4^{-6})^{-2} \cdot (4^{-3})^5]^3}{[(4^8 : 4^3) \cdot 4^{-7}]^{-2}}$   
 β)  $\left[\frac{(3^4)^5 : 3^{18}}{(2^{-6})^3 : 2^{-21}}\right]^4 \cdot \left[\frac{2^{31} \cdot 3^7}{(3^6)^2 \cdot (2^4)^6}\right]$   
 γ)  $\frac{(5^{-6})^2 : 5^{-9}}{3^{28} : (3^{-7})^{-3}} : \left[\frac{(5^3)^{-4} \cdot (3^6)^5}{(5^{-2})^7 \cdot (3^3)^{11}}\right]^{-2}$   
 δ)  $\left[\left(\frac{1}{7^{-3}}\right)^{-4} \cdot (7^{-3} : 7^{-8})^2\right]^{-3} : (7^{-4})^{-2}$

**2.18** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α)  $(14 - 3^2)^2 - 3 \cdot 2^3 - (-2)^5 : 4 + (-4)^2 : (-2)$   
 β)  $(2^2 \cdot 5 - 2 \cdot 3^2)^3 : 2^2 - [(2^4)^7 \cdot (2^{-2})^{13} + 2^{-4} : 2^{-5}] : 3$   
 γ)  $(6 \cdot 10 - 2 \cdot 3^3) : [(2 \cdot 7 - 3^2) \cdot 5^{-1} + 3^{-1} \cdot (3^2 - 3)]$   
 δ)  $[(2 \cdot 5^2 - 6 \cdot 2^3)^3 \cdot (2^3 - 3^2) - 99^0] : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

### Παραστάσεις με μεταβλητές

**2.19** Να γράψετε ως μία δύναμη καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις:

α)  $x^6 \cdot x^3 \cdot x$       β)  $y \cdot \frac{1}{y^2} \cdot y^5$   
 γ)  $(\alpha^2 \cdot \alpha^3)^4$       δ)  $(\beta^3 : \beta^7)^{-2}$   
 ε)  $(\omega^{-1} \cdot \omega^{-2})^{-3}$       στ)  $(\alpha^{-2} \cdot \alpha^3) : \alpha^4$   
 ζ)  $\frac{\alpha^2 \cdot \alpha^{-2}}{(\alpha^4 : \alpha^6)^{-5}}$       η)  $\frac{\alpha^4 : \alpha^{-1}}{\alpha^2 : \alpha}$   
 θ)  $(\alpha^4 \cdot \alpha^8) : (\alpha^3 : \alpha^{-1})$       ι)  $(\alpha^3 : \alpha)^2 : (\alpha^2 : \alpha^3)^3$

**2.20** Αν  $a, x \neq 0$ , να γράψετε ως μία δύναμη τις παραστάσεις που ακολουθούν:

α)  $\left(\frac{x^3 \cdot x^2}{x^4}\right)^2 \cdot \frac{x^3 : x^2}{x \cdot x^{-5}}$   
 β)  $\left(\frac{1}{x^3}\right)^6 : \left[(x^{-3} \cdot x^{-2})^2 \cdot \left(\frac{x^2}{x^3}\right)^{-2}\right]$   
 γ)  $\left[\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^5}\right)^4 \cdot (\alpha^3 : \alpha^{-2})^2\right]^{-3} \cdot [(\alpha^{-3})^{-5} \cdot \alpha^{-11}]^{-2}$   
 δ)  $\frac{(\alpha^{-3})^{-2} \cdot (\alpha^{-2})^4}{(\alpha^3)^3 \cdot (\alpha^8)^{-1}} : \left[\frac{(\alpha^5 : \alpha^3)^4}{(\alpha^{-9} : \alpha^{-11})^3}\right]^2$

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

**2.21** Δίνεται ο αριθμός:

$$x = 3^7 \cdot 2^{-6} \cdot (3^{-2} \cdot 2)^4 - (3 \cdot 2^2)^{-1}$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (x + 4) \cdot 2^{x-2} - 3 \cdot 3^{x+1} + 9^{x+2} \cdot 3^{x-4}$$

**2.22** Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{x^{-4} \cdot y^2 \cdot (x^{-1} \cdot y^{-2})^4 \cdot (x^{-2} \cdot y)^{-1}}{(x^2 \cdot y)^{-2} \cdot y^{-3}}$$

και να υπολογίσετε την τιμή της, όταν  $x = (-10)^{-5}$  και  $y = -10^4$ .

**2.23** Δίνονται οι αριθμοί:

$$a = 32 : (-2^4), \quad \beta = 2^5 : \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \quad \text{και}$$

$$\gamma = -\frac{1}{8} \cdot (-2)^5$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ .

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (a^{-2} \cdot \beta^3 \cdot \gamma^{-3})^2 \cdot (a^{-1} \cdot \beta^4 \cdot \gamma^2)^{-1}$$

**2.24** Αν  $y = -7$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(x^2)^3 : (x^3 \cdot y^{-1})^2}{y^{-2} : (y^2 \cdot x)^{-3}} : \frac{x^4 : (y^{-1} : x^{-3})}{y^5 \cdot x^4}$$

**2.25** Αν  $x = 2.004$ ,  $y$  είναι ο αντίστροφος του  $x$  και

$\omega$  είναι ο αντίθετος του  $y$ , να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = [(x^2 \cdot y^3)^{-2} \cdot (x \cdot y^3)^4] : (x^3 : y^{-1})^{-3}$$

και:

$$B = [(x^{-1} \cdot \omega^2)^{-3} \cdot x^2]^2 \cdot x^{-1} \cdot (\omega^{-3})^{-7}$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$A^{2.016} + B^{2.015}$$

**2.26** Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = (x^{-1} \cdot y^3)^{-2} : \left[ \left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)^4 \right]$$

Στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της για  $x = 2$  και  $y = 8$ .

**2.27** Αν  $xy = -2$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (x \cdot y^2)^3 : [(x^3 \cdot y^{-1})^{-2} \cdot x^5]$$

**2.28** Αν  $a^2\beta = -3$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{[(a^{-2})^3 \cdot \beta^4]^2}{(a^{-8})^2 \cdot (\beta^{-3})^{-2}}$$

**2.29** Αν  $a^2\beta^3 = -10$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = a^4 \cdot (\beta^2 \cdot a)^3 \cdot (\beta^{-3} \cdot a)^{-1}$$

### Θέματα των οποίων η λύση απαιτεί ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη

**2.30** Δίνονται οι αριθμοί:

$$x = 2^{3^2} : 2^{2^3} \quad \text{και} \quad y = \frac{8^5 \cdot 25^8}{100.000^3}$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = [x^5 \cdot (x \cdot y^2)^3] : (x^{-2} : y)^{-2}$$

**2.31** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (27^{20} \cdot 9^{15} \cdot 3^{10}) : [(3^{3^2})^3 + (3^{2^4})^4 + (3^6)^{16}]$$

**2.32** Δίνονται οι αριθμοί:

$$x = 5 \cdot 13^{19} \quad \text{και} \quad y = 12 \cdot 13^{19}$$

Να γράψετε τον αριθμό  $x^2 + y^2$  ως μία δύναμη με βάση φυσικό αριθμό.

**2.33 α)** Αν  $n$  είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

$$3^{n+2} - 3^{n+1} = 6 \cdot 3^n$$

**β)** Να βρείτε την τιμή του κλάσματος:

$$A = \frac{3^{2.016} - 3^{2.015}}{3^{2.014} - 3^{2.013}}$$

**2.34** Να αποδείξετε ότι η τιμή της παρακάτω παράστασης:

$$A = \frac{15 \cdot 2^{2x} - 4^{x+2}}{2^{2x+1} - 4^x} : \frac{8 \cdot 9^x - 3^{2x+2}}{54 \cdot 3^{2x-3}}$$

είναι ανεξάρτητη του  $x$ .

**2.35** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του φυσικού αριθμού  $n$ , ο αριθμός:

$$x = \frac{36^n \cdot 5^{n+1} \cdot 11 - 2^{2n+2} \cdot 3^{2n+2} \cdot 5^n}{6^{n-1} \cdot 5^n \cdot 7 + 2^{n+1} \cdot 15^n}$$

είναι επίσης φυσικός.

**2.36** Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = (x \cdot y^{-1})^2 : \left[ (x^3 \cdot y^8)^{-1} \cdot \frac{x^{16} \cdot y^{21}}{(x^2 \cdot y^3)^4} \right]$$

και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της, αν ισχύει ότι:

$$xy = \frac{5^{48} : 5^{28} + (2^4)^5 + 10^{23} : 10^3}{5^{20} \cdot 2^{21} + 2 \cdot 5^{17} \cdot 5^3 + 2^9 : (2^{13} \cdot 2^{-25})}$$

### Ερωτήσεις τύπου Σωστό ή Λάθος

**2.37** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Αν  $a$  είναι πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει ότι  $a^5 \cdot a^4 = a^{20}$ .

Σ  Λ

**β)** Οι αριθμοί  $-7^{13}$  και  $(-7)^{13}$  είναι ίσοι.

Σ  Λ

**γ)** Οι αριθμοί  $-5^{10}$  και  $(-5)^{10}$  είναι αντίθετοι.

Σ  Λ

**δ)** Οι αριθμοί  $\left(\frac{5}{7}\right)^8$  και  $\left(-\frac{7}{5}\right)^8$  είναι αντίστροφοι.

Σ  Λ

**ε)** Ισχύει ότι  $2^2 = 2 + 2$ .

Σ  Λ

**στ)** Αν  $a, \beta > 0$  και  $n$  είναι φυσικός αριθμός, τότε ισχύει ότι  $a^n + \beta^n = (a + \beta)^n$ .

Σ  Λ

### Ερωτήσεις τύπου πολλαπλής επιλογής

**2.38** Σε καθεμία από τις επόμενες ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

**α)** Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι θετικός;

**A:**  $(-7)^{13}$

**B:**  $-7^{12}$

**Γ:**  $(-7)^{10}$

**Δ:**  $-7^0$

**β)** Η εξίσωση  $2^{-10} \cdot x = 2^{-15}$  έχει λύση τη:

**A:**  $x = 2^5$

**B:**  $x = 2^{-5}$

**Γ:**  $x = 2^{-25}$

**Δ:**  $x = 2^{25}$

**γ)** Η εξίσωση  $\frac{x}{3^7} = 3^{12}$  έχει λύση τη:

**A:**  $x = 3^{19}$

**B:**  $x = 3^{-19}$

**Γ:**  $x = 3^{-5}$

**Δ:**  $x = 3^5$

**δ)** Ο αριθμός  $2^{20} + 2^{20}$  είναι ίσος με:

**A:**  $2^{40}$

**B:**  $4^{20}$

**Γ:**  $2^{21}$

**Δ:**  $2^{400}$

ε) Η παράσταση  $(\alpha^{-2}\beta^3)^{-1}$ , με  $\alpha, \beta \neq 0$ , δεν είναι ίση με:

A:  $\alpha^2\beta^{-3}$

B:  $\frac{\alpha^2}{\beta^3}$

Γ:  $\frac{\beta^{-3}}{\alpha^{-2}}$

Δ:  $\frac{\beta^3}{\alpha^2}$

στ) Το  $\frac{1}{2}$  του αριθμού  $8^8$  είναι ίσο με:

A:  $8^4$

B:  $4^8$

Γ:  $4^4$

Δ:  $4 \cdot 8^7$

ζ) Ο αριθμός  $2^{3^4}$  είναι ίσος με:

A:  $2^{12}$

B:  $2^{81}$

Γ:  $8^4$

Δ:  $2^7$

### Ελέγγω τις γνώσεις μου στη θεωρία

**2.39 α)** Τι ονομάζουμε δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό  $a$  και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό  $n \geq 2$ ;

**β)** Με τι ισούται το  $a^1$ ;

**γ)** Αν  $a \neq 0$ , με τι ισούται το  $a^0$  και με τι ισούται το  $a^{-n}$ ;

**γ)** Να γράψετε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

### Κριτήριο αξιολόγησης

#### Θέμα 1ο

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο ( $<$ ,  $=$ ,  $>$ ).

**α)**  $(-3)^7 \dots - 3^7$

**β)**  $(-5)^8 \dots - 5^8$

**γ)**  $-7^0 \dots (-7)^0$

**δ)**  $-(-3)^9 \dots 0$

**ε)**  $-(-6)^{10} \dots 0$

**στ)**  $-(-1)^{11} \dots (-1)^{18}$

#### Θέμα 2ο

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

**α)**  $(3^{-2})^3 \cdot (3^4)^2$

**β)**  $[2^{-5} : (2^{15} : 2^{12})]^{-2} : (2^{-3})^{-5}$

#### Θέμα 3ο

Δίνεται η παράσταση:

$$A = (x^{-3})^{-2} : [(x^2 \cdot x^{-1})^4 \cdot (x^{-2} \cdot x^4)^{-5}]$$

**α)** Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης A, όταν:

$$x = [2^{-1} \cdot 10 - 2 \cdot 3^2 - (-2)^3 + (-2)^2]^{2.015}$$

#### Θέμα 4ο

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (x^5 \cdot y^4)^2 : \left[ \left( \frac{x}{y^3} \right)^2 \cdot (x^{-1} \cdot y)^3 \right]$$

αν οι αριθμοί  $x$  και  $y$  είναι αντίστροφοι.