

Φίλη μαθήτριά, φίλε μαθητή,

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ Λυκείου που θέλουν ένα μεθοδικό και πλήρες βοήθημα στη Γεωμετρία. Σκοπός του είναι να βοηθήσει τους μαθητές στην καθημερινή τους μελέτη, ώστε να ανταποκρίνονται με απόλυτη επιτυχία στις απαιτήσεις του σχολείου ή των εξετάσεων και συγχρόνως να προσφέρει γερές γεωμετρικές βάσεις σε όλους εκείνους που έχουν υψηλούς στόχους.

Περιέχει:

- ♦ Τη βασική θεωρία με τις αποδείξεις των θεωρημάτων, καθώς και σχόλια ή διευκρινίσεις, όπου αυτό κρίνεται σκόπιμο.
- ♦ Μεθόδους και τεχνικές για τη λύση των ασκήσεων, όπου κάτι τέτοιο είναι εφικτό.
- ♦ Πολλές υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις, κλιμακούμενης δυσκολίας, καθώς και θέματα με απαιτήσεις.
- ♦ Ασκήσεις για εξάσκηση και προτεινόμενα θέματα σε κάθε ενότητα.
- ♦ Ερωτήσεις κατανόησης που αφορούν τη θεωρία και τις άμεσες συνέπειές της.
- ♦ Τις απαντήσεις και τις υποδείξεις σε όλα τα προτεινόμενα θέματα.

Πιστεύουμε ότι η ποιότητα, το πλήθος και η διάταξη των θεμάτων, σε συνδυασμό με τα σχόλια και τις αναγκαίες μεθοδεύσεις, θα καταστήσουν το παρόν βιβλίο ένα χρήσιμο καθημερινό εργαλείο γνώσης και μελέτης για κάθε μαθητή.

Θέλουμε από τη θέση αυτή να ευχαριστήσουμε τους συναδέλφους Δημήτρη Τσάκο και Πολυτίμη Δελημιχάλη για την επιμέλεια του βιβλίου, καθώς και τον συνάδελφο Ηλία Μιχαλίτση που έκανε με πολύ φροντίδα τη σελιδοποίηση.

Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

Ενότητα 1.	Εγγεγραμμένη γωνία	9
Ενότητα 2.	Εγγεγραμμένα τετράπλευρα, Εγγράψιμα τετράπλευρα	25
Ενότητα 3.	Γεωμετρικές κατασκευές, Γεωμετρικοί τόποι, Προβλήματα ελαχίστου δρόμου.....	41
Ενότητα 4.	Ανάλογα τμήματα.....	49
Ενότητα 5.	Θεώρημα του Θαλή.....	56
Ενότητα 6.	Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου	72
Ενότητα 7.	Ομοιότητα	87
♦	Επαναληπτικές ασκήσεις.....	103
Ενότητα 8.	Μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο.....	107
Ενότητα 9.	Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος	127
Ενότητα 10.	Θεωρήματα διαμέσων	148
Ενότητα 11.	Μετρικές σχέσεις στον κύκλο	167
Ενότητα 12.	Εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων	186
Ενότητα 13.	Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου	208
Ενότητα 14.	Λόγος εμβαδών	220
Ενότητα 15.	Κανονικά πολύγωνα	241
Ενότητα 16.	Εγγραφή κανονικών πολυγώνων.....	255
Ενότητα 17.	Μήκος κύκλου, Μήκος τόξου	269
Ενότητα 18.	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, Εμβαδόν κυκλικού τομέα - κυκλικού τμήματος.....	277
♦	Θέματα σε όλη την ύλη	290

Υποδείξεις - Απαντήσεις

Υποδείξεις - απαντήσεις προτεινόμενων ασκήσεων	297
Λύσεις ασκήσεων σχολικού βιβλίου	397

Ενότητα 1

 Εγγεγραμμένη γωνία

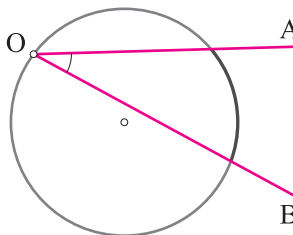
Βασική θεωρία και εφαρμογές

1. Εγγεγραμμένη - Επίκεντρη γωνία

Ορισμός

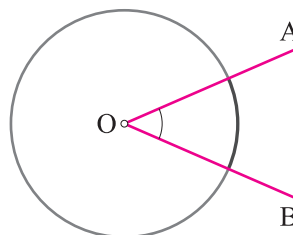
- ♦ Μια γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη**, όταν η κορυφή της είναι σημείο ενός κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.

Το τόξο $\widehat{AB}$ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** ή λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία **βαίνει** στο τόξο $\widehat{AB}$.



- ♦ Μια γωνία λέγεται **επίκεντρη**, όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Όμοια, το τόξο $\widehat{AB}$ λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας.



Θεώρημα

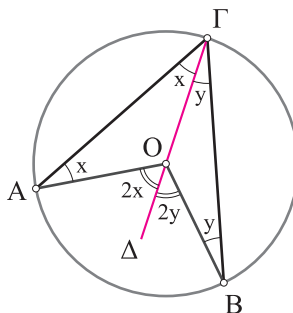
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

Απόδειξη

Έστω (O, R) κύκλος και $\hat{\Gamma}$ μια εγγεγραμμένη γωνία, που βαίνει στο τόξο $\widehat{AB}$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\widehat{\text{AOB}} = 2\hat{\Gamma}$$

Έστω ότι το κέντρο O του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{AGB}$. Προεκτείνουμε τη GO .



- ♦ Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{ΟΑΓ} = \widehat{ΟΓΑ} = x$. Στο τρίγωνο αυτό η γωνία $\widehat{ΔΟΑ}$ είναι εξωτερική, οπότε:

$$\widehat{ΔΟΑ} = \widehat{ΟΑΓ} + \widehat{ΟΓΑ} = x + x = 2x$$

- ♦ Όμοια, στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, με $\widehat{ΟΒΓ} = \widehat{ΟΓΒ} = y$, για την εξωτερική γωνία $\widehat{ΔΟΒ}$ ισχύει:

$$\widehat{ΔΟΒ} = \widehat{ΟΒΓ} + \widehat{ΟΓΒ} = y + y = 2y$$

Είναι οπότε:

$$\widehat{ΑΟΒ} = \widehat{ΑΟΔ} + \widehat{ΔΟΒ} = 2x + 2y = 2(x + y) = 2\hat{\Gamma}$$

Αν το Ο είναι σημείο πλευράς της γωνίας $\widehat{ΑΓΒ}$ ή εξωτερικό της γωνίας $\widehat{ΑΓΒ}$ εργαζόμαστε ανάλογα.

Πορίσματα

- Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.

Εφαρμογή 1.1

Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΓ και ΑΔ των δύο κύκλων. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Γ, Β, Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Λύση

Φέρνουμε την κοινή χορδή ΑΒ. Για να είναι τα σημεία Γ, Β, Δ συνευθειακά, αρκεί να αποδείξουμε ότι η γωνία $\widehat{ΓΒΔ}$ είναι ευθεία, δηλαδή:

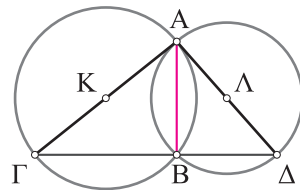
$$\widehat{ΓΒΔ} = 180^\circ$$

- ♦ Επειδή η ΑΓ είναι διάμετρος και η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ βαίνει σε ημικύκλιο, είναι:

$$\widehat{ΑΒΓ} = 90^\circ$$

- ♦ Επειδή η ΑΔ είναι διάμετρος και η γωνία $\widehat{ΑΒΔ}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, έχουμε:

$$\widehat{ΑΒΔ} = 90^\circ$$



Επομένως:

$$\widehat{\Gamma B \Delta} = \widehat{\Gamma B A} + \widehat{A B \Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

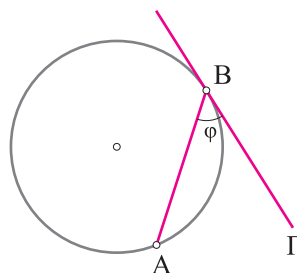
Άρα τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.

2. Γωνία χορδής και εφαπτομένης

Ορισμός

Αν η κορυφή μιας γωνίας είναι σημείο ενός κύκλου, η μία πλευρά της τέμνει τον κύκλο και η άλλη είναι εφαπτομένη του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.

Στο διπλανό σχήμα, η γωνία $\widehat{A B \Gamma}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, διότι η AB είναι χορδή και η $B\Gamma$ είναι εφαπτομένη του κύκλου.



Θεώρημα

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής, ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής αυτής.

Απόδειξη

Θεωρούμε την οξεία γωνία $\widehat{B A \Delta}$, που είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, και την εγγεγραμμένη γωνία $\hat{\Gamma}$, που αντιστοιχεί στο τόξο $\widehat{A B}$. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma} = \widehat{B A \Delta}$, δηλαδή ότι $\varphi = \omega$. Φέρνουμε το απόστημα OM , δηλαδή $OM \perp AB$.

- ♦ Η γωνία $\widehat{A O B}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, οπότε:

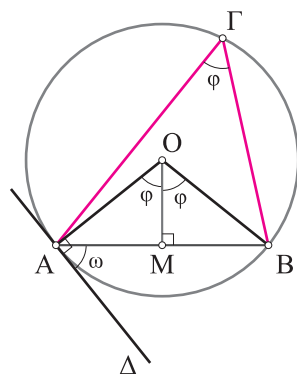
$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \widehat{A O B} \quad (1)$$

- ♦ Στο ισοσκελές τρίγωνο OAB το OM είναι ύψος, άρα και διχοτόμος, οπότε:

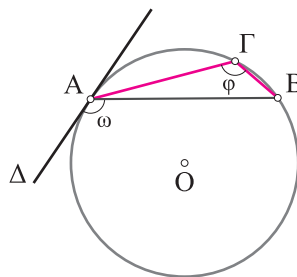
$$\widehat{M O A} = \widehat{M O B} = \frac{1}{2} \widehat{A O B} \quad (2)$$

- ♦ Οι γωνίες $\widehat{B A \Delta}$ και $\widehat{A O M}$ είναι οξείες και έχουν τις πλευρές τους κάθετες. Άρα είναι ίσες, δηλαδή:

$$\widehat{B A \Delta} = \widehat{A O M} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \widehat{A O B} \stackrel{(1)}{=} \hat{\Gamma}$$



Αν η γωνία $\widehat{BA\Delta}$ είναι αμβλεία, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, όμοια αποδεικνύεται ότι $\varphi = \omega$.



Εφαρμογή 1.2

Δίνεται κύκλος, σημείο P στο εξωτερικό του, το εφαπτόμενο τμήμα PA και μια τέμνουσα PΒΓ του κύκλου. Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\hat{\Gamma} = \widehat{BAP}$

β) $\widehat{P\Delta A} = \hat{\Gamma} + \widehat{\Delta AB}$

γ) $PA = P\Delta$

Λύση

α) Η γωνία $\widehat{BAP}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, ενώ η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο. Άρα $\hat{\Gamma} = \widehat{BAP} = \varphi$.

β) Στο τρίγωνο ΑΔΓ η γωνία $\widehat{P\Delta A}$ είναι εξωτερική. Έτσι:

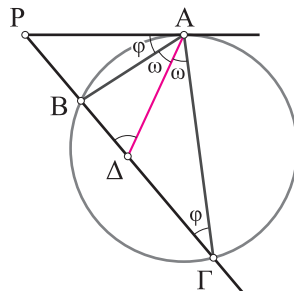
$$\widehat{P\Delta A} = \widehat{\Delta A\Gamma} + \widehat{\Delta\Gamma A} = \widehat{\Delta AB} + \hat{\Gamma}$$

διότι $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{\Delta AB}$, καθόσον η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$.

γ) Παρατηρούμε ότι, με βάση τις αναγραφόμενες στο σχήμα γωνίες, είναι:

$$\widehat{P\Delta A} = \hat{\Gamma} + \widehat{\Delta AB} = \varphi + \omega, \quad \widehat{PA\Delta} = \widehat{PAB} + \widehat{BA\Delta} = \varphi + \omega$$

Επομένως $\widehat{P\Delta A} = \widehat{PA\Delta}$, οπότε το τρίγωνο PΑΔ είναι ισοσκελές. Άρα $PA = P\Delta$.



Εφαρμογή 1.3

Δίνεται κύκλος (O, R), μια διάμετρος AB, σημείο Γ στην προέκταση της AB, ώστε $B\Gamma = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ προς τον κύκλο. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 30^\circ$,

β) το τρίγωνο ΔOB είναι ισόπλευρο,

γ) $\Delta A = \Delta\Gamma$.

Λύση

α) Φέρνουμε τις OD, ΔB. Είναι $OD \perp \Gamma\Delta$, διότι η ακτίνα στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Επειδή $ΟΓ = 2R = 2ΟΔ$, δηλαδή $ΟΔ = \frac{ΟΓ}{2}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΔΓ$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΟΓ$, η $ΔΒ$ είναι διάμεσος. Άρα:

$$ΔΒ = \frac{ΟΓ}{2} = R$$

Επειδή λοιπόν $ΟΔ = ΟΒ = ΔΒ = R$, το τρίγωνο $ΔΟΒ$ είναι ισόπλευρο.

γ) Επειδή $ΒΔ = ΒΓ = R$, το τρίγωνο $ΒΔΓ$ είναι ισοσκελές. Άρα:

$$\widehat{ΒΔΓ} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$$

Είναι όμως $\hat{Α} = \widehat{ΒΔΓ} = 30^\circ$, διότι η γωνία $\widehat{ΒΔΓ}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{Α}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\widehat{ΒΔ}$.

Επειδή $\hat{Α} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$, το τρίγωνο $ΔΑΓ$ είναι ισοσκελές, οπότε $ΔΑ = ΔΓ$.

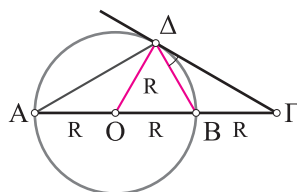
Άλλος τρόπος

Αφού το τρίγωνο $ΔΟΒ$ είναι ισόπλευρο, είναι $\widehat{ΔΟΒ} = 60^\circ$. Έτσι:

$$\widehat{ΟΑΔ} = \widehat{ΟΔΑ} = \frac{\widehat{ΔΟΒ}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

διότι η $\widehat{ΔΟΒ}$ είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο $ΟΑΔ$.

Άρα $\hat{Α} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$ και έτσι το $ΔΑΓ$ είναι ισοσκελές. Επομένως $ΔΑ = ΔΓ$.



3. Γωνία τεμνόμενων χορδών

Α. Αν δύο χορδές $ΑΒ$ και $ΓΔ$ ενός κύκλου τέμνονται σε σημείο $Σ$ εσωτερικό του κύκλου, τότε:

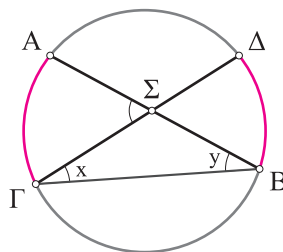
$$\widehat{ΑΣΓ} = \frac{\widehat{ΑΓ} + \widehat{ΒΔ}}{2}$$

Απόδειξη

Φέρνουμε τη $ΒΓ$. Τότε:

$$\widehat{ΑΣΓ} = \hat{\Gamma} + \hat{Β} = x + y = \frac{\widehat{ΒΔ}}{2} + \frac{\widehat{ΑΓ}}{2} = \frac{\widehat{ΑΓ} + \widehat{ΒΔ}}{2}$$

διότι το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας (για παράδειγμα της x) ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου (του $\widehat{ΔΒ}$).



Β. Αν οι προεκτάσεις δύο χορδών ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται σε σημείο Σ, τότε:

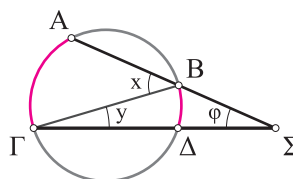
$$\widehat{ΑΣΓ} = \frac{\widehat{ΑΓ} - \widehat{ΒΔ}}{2}$$

όπου $\widehat{ΑΓ} > \widehat{ΒΔ}$.

Απόδειξη

Φέρνουμε τη ΒΓ. Στο τρίγωνο ΒΓΣ η γωνία x είναι εξωτερική. Είναι τότε $x = \varphi + y$, δηλαδή $\varphi = x - y$, οπότε:

$$\varphi = x - y = \frac{\widehat{ΑΓ}}{2} - \frac{\widehat{ΒΔ}}{2} = \frac{\widehat{ΑΓ} - \widehat{ΒΔ}}{2}$$



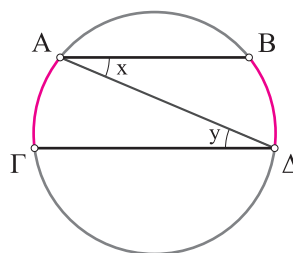
Γ. Αν οι χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου είναι παράλληλες, τότε τα περιεχόμενα τόξα είναι ίσα και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω ότι $ΑΒ \parallel ΓΔ$. Θα αποδείξουμε ότι $\widehat{ΑΓ} = \widehat{ΒΔ}$. Πραγματικά, επειδή $ΑΒ \parallel ΓΔ$, είναι $x = y$. Άρα:

$$\widehat{ΒΔ} = \widehat{ΑΓ}$$

Αντίστροφα, αν $\widehat{ΒΔ} = \widehat{ΑΓ}$, τότε $x = y$, οπότε οι εντός και εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ΑΒ, ΔΓ είναι ίσες. Επομένως $ΑΒ \parallel ΔΓ$.



Εφαρμογή 1.4

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές του σε έναν κύκλο. Αν Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $ΚΜ \perp ΛΝ$.

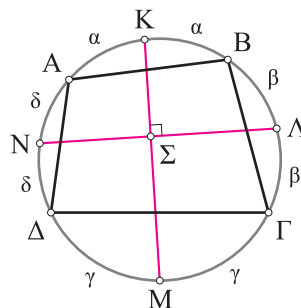
Λύση

Θέτουμε για ευκολία:

$$\begin{aligned} \widehat{ΑΚ} = \widehat{ΚΒ} &= \alpha, & \widehat{ΒΛ} = \widehat{ΛΓ} &= \beta \\ \widehat{ΓΜ} = \widehat{ΜΔ} &= \gamma & \text{και} & \quad \widehat{ΔΝ} = \widehat{ΝΑ} = \delta \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \widehat{ΑΒ} + \widehat{ΒΓ} + \widehat{ΓΔ} + \widehat{ΔΑ} &= 360^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta &= 360^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 180^\circ \quad (1) \end{aligned}$$



Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο σχόλιο, είναι:

$$\widehat{K\Lambda} = \frac{\widehat{KBA} + \widehat{MAN}}{2} = \frac{(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta)}{2} \stackrel{(\iota)}{=} \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Άρα οι χορδές KM, AN τένονται κάθετα, δηλαδή $KM \perp AN$.

Λυμένες ασκήσεις

1.5 Δίνεται κύκλος (O, R) , μια διάμετρος AB και μια χορδή BΓ, που σχηματίζει γωνία 30° με τη BA. Στο μέσο M του OB φέρνουμε τη χορδή ΔΕ $\perp$ AB. Να αποδειχθεί ότι $B\Gamma = \Delta E$.

Λύση

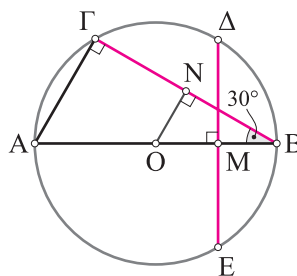
Για να είναι δύο χορδές του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων ίσες, αρκεί να έχουν ίσα αποστήματα.

Φέρνουμε $ON \perp B\Gamma$. Επειδή $\widehat{AB\Gamma} = 30^\circ$, θα είναι:

$$ON = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2} = OM$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι χορδές BΓ και ΔΕ αντιστοιχούν στα ίσα αποστήματα ON και OM. Άρα ισχύει:

$$B\Gamma = \Delta E$$



1.6 Έστω AB και ΑΓ τα εφαπτόμενα τμήματα προς έναν κύκλο με κέντρο O και Δ το αντιδιαμετρικό του Γ. Να αποδειχθεί ότι $B\Delta \parallel AO$.

Λύση

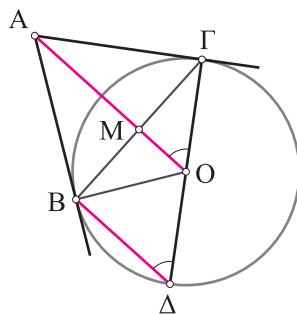
Φέρνουμε τη BΓ, που τέμνει την AO στο M. Το σημείο M είναι μέσο του BΓ, οπότε από το τρίγωνο ΓΒΔ παίρνουμε ότι $MO \parallel B\Delta$. Έτσι $AO \parallel B\Delta$.

Άλλος τρόπος

Φέρνουμε την OB. Τότε για την εγγεγραμμένη γωνία $\hat{\Delta}$ ισχύει:

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{2} \widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$$

Άρα είναι $B\Delta \parallel OA$.



1.7 Από ένα εξωτερικό σημείο A ενός κύκλου φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα AB και μια τέμνουσα ΑΓΔ. Στην ΑΔ παίρνουμε τμήμα $AE = AB$. Να αποδειχθεί ότι η BE διχοτομεί τη γωνία $\widehat{GB\Delta}$.

Λύση

Επειδή $AB = AE$ (δες το επόμενο σχήμα), θα είναι:

$$\widehat{ABE} = \widehat{AEB} = \varphi + y \quad (1)$$

όπου $\varphi = \widehat{AB\Gamma}$ και $y = \widehat{\Gamma BE}$.

Επίσης ισχύει:

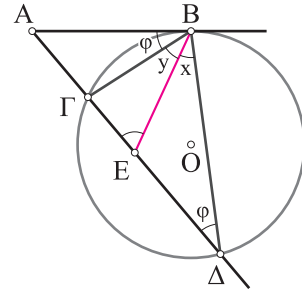
$$\hat{\Delta} = \widehat{\Gamma BA} = \varphi$$

διότι η $\hat{\Delta}$ είναι εγγεγραμμένη και η γωνία $\widehat{\Gamma BA}$ σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη.

Στο τρίγωνο BEΔ η γωνία $\widehat{BEA}$ είναι εξωτερική, οπότε ισχύει:

$$\widehat{BEA} = x + \varphi \stackrel{(1)}{\iff} \varphi + y = x + \varphi \iff y = x$$

Άρα η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma B\Delta}$.

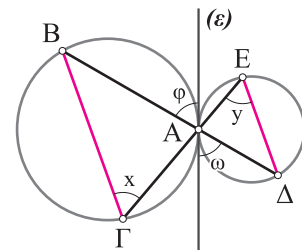


1.8 Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A. Δύο ευθείες που διέρχονται από το A τέμνουν τον έναν κύκλο στα B, Γ και τον άλλο στα Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $B\Gamma \parallel \Delta E$.

Λύση

Για να είναι $B\Gamma \parallel \Delta E$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{E}$, δηλαδή ότι $x = y$. Φέρνουμε την κοινή εφαπτομένη (ε) των δύο κύκλων. Τότε έχουμε:

- ♦ $x = \varphi$, διότι η φ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η x είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο,
- ♦ $y = \omega$, για τον ίδιο λόγο.



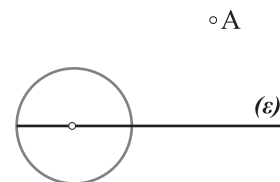
Όμως $\varphi = \omega$, ως κατακορυφήν γωνίες. Επομένως προκύπτει $x = y$, σχέση που εξασφαλίζει ότι $B\Gamma \parallel \Delta E$.

Πρόβλημα ... με τον διαβήτη!

Κατά τη λύση ενός προβλήματος οι μαθητές της τάξης έπρεπε να κατασκευάσουν στο διπλανό σχήμα με απόλυτη ακρίβεια την κάθετη από το A προς την ευθεία (ε).

- «Κύριε ξεχάσαμε να φέρουμε διαβήτη», είπαν μερικοί μαθητές.
- «Ε, τότε να χρησιμοποιήσετε μόνο τον χάρακά σας!!!», είπε ο καθηγητής.

Πώς θα φέρετε εσείς κάθετη από το A προς την (ε) μόνο με τον χάρακα;

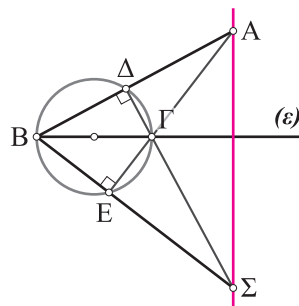


Απάντηση

Φέρνουμε τις AB , AE και στη συνέχεια τις $\Delta\Gamma$, BE , που τέμνονται στο Σ . Θα είναι τότε $A\Sigma \perp \varepsilon$. Πραγματικά, στο τρίγωνο $AB\Sigma$ τα τμήματα AE και $\Sigma\Delta$ είναι ύψη, αφού:

$$\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$$

Το Γ είναι λοιπόν ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε θα ισχύει και $B\Gamma \perp A\Sigma!!!$



1.9 Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο A . Μια χορδή $B\Gamma$ του μεγάλου κύκλου εφάπτεται με τον μικρό κύκλο στο σημείο Δ . Να αποδειχθεί ότι:

$$\widehat{\Delta AB} = \widehat{\Delta AG}$$

Λύση

Έστω ότι κοινή εφαπτομένη στο A τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο E . Είναι τότε:

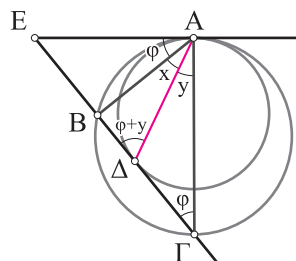
- ♦ $\hat{\Gamma} = \widehat{BAE} = \varphi$, διότι η $\widehat{BAE}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{\Gamma}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\widehat{AB}$.
- ♦ $\widehat{ADE} = \widehat{AAG} + \widehat{G\Gamma A} = y + \varphi$, ως εξωτερική στο τρίγωνο ΔAG .
- ♦ $EA = ED$, ως εφαπτόμενα τμήματα από το E προς τον μικρό κύκλο.

Επομένως στο ισοσκελές τρίγωνο EAD είναι:

$$\widehat{EAD} = \widehat{EAD} \Leftrightarrow \varphi + y = \varphi + x \Leftrightarrow x = y$$

Άρα οι γωνίες $\widehat{\Delta AB}$, $\widehat{\Delta AG}$ είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\Delta AB} = \widehat{\Delta AG}$.

Να σημειώσουμε ότι αν η κοινή εφαπτομένη στο A είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, τότε το A είναι μέσο του $\widehat{B\Gamma}$, το Δ είναι μέσο του $B\Gamma$ και έτσι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ (ως διάμεσος).

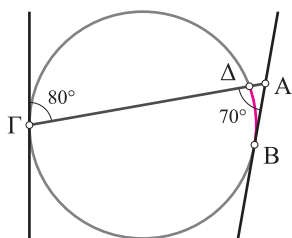


1.10 Δύο ίσοι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εσωτερικά σε έναν τρίτο κύκλο C , όχι όμως και μεταξύ τους. Έστω A και B τα σημεία επαφής των C_1 και C_2 με τον C αντίστοιχα και Γ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου C . Οι ΓA και ΓB τέμνουν τους C_1 και C_2 στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $\Delta E \parallel AB$.

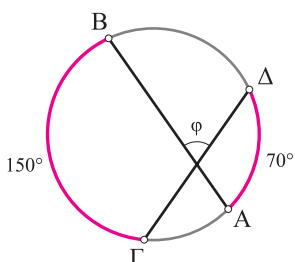
Λύση

Φέρνουμε τις εφαπτομένες (ε_1) , (ε_2) του C στα σημεία A , B (δες το επόμενο σχήμα). Τότε αν Z , H είναι τα σημεία που η AB τέμνει τους κύκλους C_1 , C_2 αντίστοιχα, έχουμε:

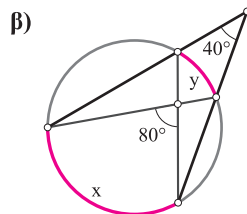
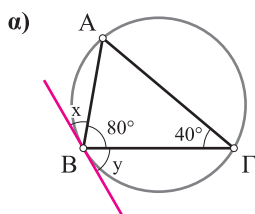
1.14 Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το μέτρο του τόξου $\widehat{BD}$.



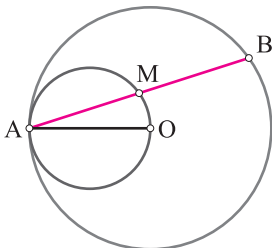
1.15 Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τη γωνία φ .



1.16 Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x, y .

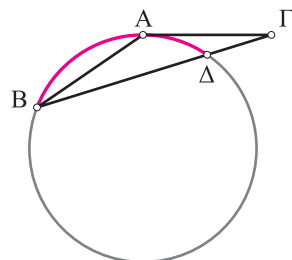


1.17 Ένας κύκλος έχει διάμετρο την ακτίνα OA ενός άλλου κύκλου. Αν AB είναι τυχαία χορδή του μεγάλου κύκλου, να αποδείξετε ότι η χορδή αυτή διχοτομείται από τον μικρό κύκλο.

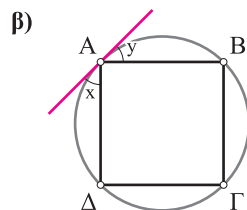
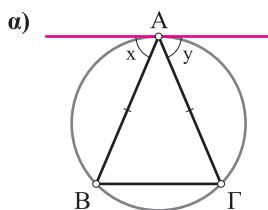


1.18 Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = AG$ και η AG εφάπτεται στον κύκλο. Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{AB} = 2\widehat{AD}$$



1.19 Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να αποδείξετε ότι οι γωνίες x και y είναι ίσες.



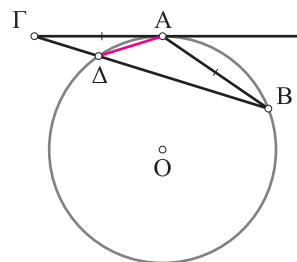
1.20 Δύο χορδές AD και BG ενός κύκλου είναι κάθετες στη χορδή AB. Να αποδείξετε ότι:

α) $GD \parallel AB$

β) $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

1.21 Στο διπλανό σχήμα η ΓΑ εφάπτεται του κύκλου και ισχύει $AG = AB$. Να αποδείξετε ότι:

$$\Delta A = \Delta \Gamma$$



1.22 Δίνεται τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O. Έστω H το ορθόκέντρό του και Δ το αντιδιαμετρικό σημείο του A. Να αποδείξετε ότι:

$$GH \parallel BD$$

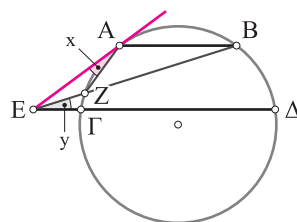
1.23 Στο διπλανό σχήμα είναι:

$$\widehat{AG} = \widehat{BD}$$

και η EA εφάπτεται του κύκλου.

Να αποδείξετε ότι $x = y$, δηλαδή ότι:

$$\widehat{EAG} = \widehat{BED}$$



1.24 Δίνεται κύκλος με κέντρο O, μια διάμετρος AB, μια χορδή AG και η εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο B. Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{GAB}$ τέμνει τη BG στο Z, τον κύκλο στο H και την εφαπτομένη (ε) στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

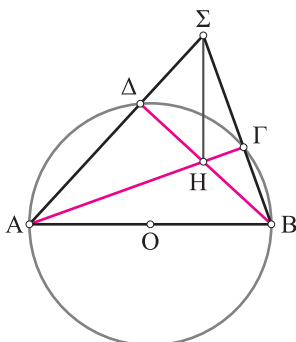
α) $BD = BZ$

β) $HZ = HD$

B. Εγγεγραμμένες γωνίες

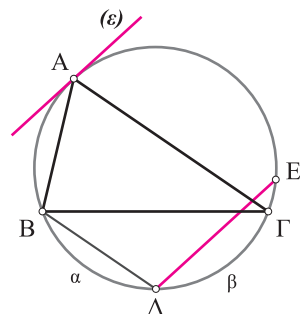
1.25 Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος και το Σ είναι τυχαίο σημείο. Αν οι AG και BD τέμνονται στο Η, να αποδείξετε ότι:

$$\Sigma H \perp AB$$



1.29 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν ισχύει $BD \parallel AG$ και $GE \parallel AB$, να αποδείξετε ότι:

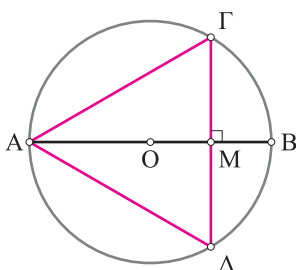
- α) $\widehat{AD} = \widehat{AE}$,
 β) $\varepsilon \parallel \Delta E$, όπου (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο Α.



1.26 Δίνεται τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R), το ύψος του ΑΔ και η διάμετρος ΑΟΗ. Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma A H}$$

1.27 Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος, το Μ είναι μέσο της ακτίνας OB και ισχύει $\Gamma\Delta \perp AB$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο.



1.28 Οι πλευρές μιας εγγεγραμμένης γωνίας με κορυφή Α τέμνουν έναν κύκλο στα σημεία Β και Γ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τον κύκλο στο Δ. Αν η χορδή ΔΕ είναι παράλληλη στην AB, να αποδείξετε ότι $\Delta E = A\Gamma$.

1.30 Σε έναν κύκλο είναι εγγεγραμμένο ένα τρίγωνο ABΓ, με $AB < A\Gamma$. Αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α και $\Delta\Delta \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{A}$ και $\widehat{\Delta A E}$ έχουν την ίδια διχοτόμο.

1.31 Από τα άκρα Α και Β μιας διαμέτρου AB ενός κύκλου φέρνουμε δύο παράλληλες χορδές ΑΓ και ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

- α) $A\Gamma = B\Delta$,
 β) η ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

1.32 Δίνεται τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Από το μέσο Μ του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ φέρνουμε χορδή $MN \parallel A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $MN = AB$.

1.33 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και η χορδή ΒΔ του κύκλου, που είναι κάθετη στη ΒΓ. Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABΓ, να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta B = A H$,
 β) $A H = 2 O M$, όπου Μ είναι το μέσο της ΒΓ.

Γ. Γωνία χορδής και εφαπτομένης

1.34 Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, μια διάμετρος AB και μια χορδή ΑΓ τέτοια, ώστε $\widehat{\Gamma A B} = 30^\circ$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\Gamma A = \Gamma \Delta$$

1.35 Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μια τυχαία τέμνουσα, που διέρχεται από το Α, τέμνει τους κύκλους στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες (ε) και (η) των κύκλων στα Β και Γ είναι παράλληλες, δηλαδή ότι $\varepsilon \parallel \eta$.

Συμπληρωματικές ασκήσεις

1.36 Δίνεται κύκλος, μια διάμετρος AB, η εφαπτομένη στο A, ένα σημείο Γ αυτής και το σημείο Δ, στο οποίο η BΓ τέμνει τον κύκλο. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ διέρχεται από το μέσο M της AG.

1.37 Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο A. Οι χορδές AG και AE του μεγάλου κύκλου τέμνουν τον μικρό στα σημεία B και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$BD \parallel GE$$

1.38 Έστω $AB = AG$ δύο χορδές ενός κύκλου με κέντρο O και M τυχαίο σημείο του τόξου $\widehat{BG}$, που δεν περιέχει το A. Η κάθετη από το B προς την AM τέμνει τη χορδή MG στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$MB = M\Delta$$

1.39 Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο A. Μια εφαπτομένη του ενός στο σημείο B τέμνει τον άλλο κύκλο με τη σειρά στα σημεία Γ, Δ.

Να αποδείξετε ότι η AB διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Gamma A E}$, όπου E είναι το σημείο στο οποίο η ΔA τέμνει τον κύκλο.

1.40 Δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A. Έστω BΓ μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων, που εφάπτεται του κύκλου με κέντρο K στο B και του κύκλου με κέντρο Λ στο Γ. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{BA\Gamma} = 90^\circ$,
- β) ο κύκλος διαμέτρου BΓ εφάπτεται στην KΛ,
- γ) $\widehat{KM\Lambda} = 90^\circ$,
- δ) ο κύκλος διαμέτρου KΛ εφάπτεται στη BΓ.

1.41 Στο διπλανό σχήμα είναι:

$$\widehat{AB} = 120^\circ$$

και οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο Γ.

Για το τυχαίο σημείο M του κύκλου, να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο ΓAB είναι ισόπλευρο,
- β) $\Delta\Delta = BE$.

1.42 Δίνεται κύκλος με κέντρο O, δύο κάθετες χορδές του AB και ΓΔ, που τέμνονται στο E, και τα μέσα M και N των AG και BΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $EN \perp AD$,
- β) το ONEM είναι παραλληλόγραμμο.

1.43 Έστω AB και ΓΔ δύο κάθετες χορδές ενός κύκλου με κέντρο O. Αν E είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ, να αποδείξετε ότι $BD = AE$.

1.44 Ένα τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Θεωρούμε τις χορδές $BD \parallel AG$ και $GE \parallel AB$. Να αποδείξετε ότι η χορδή DE είναι παράλληλη στην εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A.

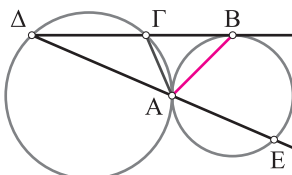
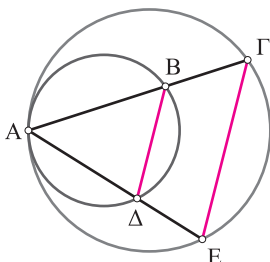
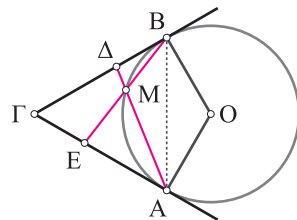
1.45 Ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν M είναι τυχαίο σημείο του τόξου $\widehat{BG}$, να αποδείξετε ότι $MA = MB + MG$.

1.46 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) εγγεγραμμένο σε κύκλο και το μέσο M του τόξου $\widehat{AG}$. Η AM τέμνει την ευθεία BΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $MB = M\Delta$.

1.47 Ένα τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Έστω H το ορθόκεντρο και Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

- α) $AH = 2OM$, όπου M είναι το μέσο του BΓ,
- β) τα σημεία H, Θ και O είναι συνευθειακά και:

$$HO = 2\Theta O$$



1.48 Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι:

$$\hat{B} = 73^\circ \text{ και } \hat{\Gamma} = 39^\circ$$

Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $\widehat{MB\Gamma} = \widehat{M\Gamma B} = 22^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{BAM} = 51^\circ$$

1.49 Με τη βοήθεια

ενός κανόνα με παράλληλες ακμές, να



βρείτε το κέντρο ενός δοσμένου κύκλου. Να θεωρήσετε ότι το πλάτος του χάρακα είναι μικρότερο από τη διάμετρο του κύκλου.

1.50 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, με $AB = AG$, είναι $\hat{A} = 20^\circ$. Αν Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών AG και AB, ώστε $\widehat{GB\Delta} = 70^\circ$ και $\widehat{E\Gamma B} = 60^\circ$, να αποδείξετε ότι $\widehat{E\Delta B} = 20^\circ$.

1.51 Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός ορθογώνιου τριγώνου ABΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$, εφάπτεται της πλευράς AB στο σημείο Δ, της BG στο Ε και της AG στο Ζ. Αν $\Delta S \perp ZE$, να αποδείξετε ότι:

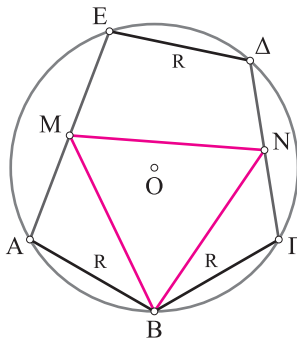
- α) το τρίγωνο AZΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,
- β) $\widehat{ZE\Delta} = 45^\circ$, γ) $\Sigma\Delta = \Sigma E$,
- δ) τα τρίγωνα ΣΒΔ και ΣΕΒ είναι ίσα,
- ε) $\Sigma A \perp \Sigma B$.

1.52 Στις πλευρές AB και AG ενός τριγώνου ABΓ παίρνουμε τα ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ABE και AGΓ τέμνονται για δεύτερη φορά στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

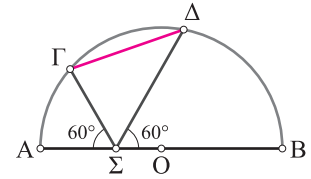
- α) τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΖΕΓ είναι ίσα,
- β) η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου.

1.53 Σε έναν κύκλο ακτίνας R θεωρούμε τις χορδές AB, BG και DE με μήκος R.

Αν Μ είναι το μέσο του AE και Ν το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BMN είναι ισόπλευρο.



1.54 Έστω Σ τυχαίο σημείο της διαμέτρου AB ημικυκλίου με διάμετρο AOB. Δύο ημιευθείες ΣΓ και ΣΔ σχηματίζουν τις τρεις ίσες



διαδοχικές γωνίες $\widehat{AS\Gamma}$, $\widehat{\Gamma S\Delta}$ και $\widehat{\Delta S B}$, όπως δείχνει το σχήμα.

Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = R$, όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου.

1.55 Στο εξωτερικό ενός ρόμβου ABΓΔ πλευράς μήκους 1 θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ABE.

- α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma E\Delta} = 30^\circ$.
- β) Να βρείτε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΕΓΔ.

1.56 Σε μια ευθεία (ε) παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα AB και BG. Στο ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ABA και BGE. Έστω Ζ ένα σημείο του BG. Ένας κύκλος κέντρου Ζ και ακτίνας R τέμνει τις ημιευθείες ΒΔ και BE στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{MZN} = 60^\circ$$

1.57 Ένα τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Ε και η παράλληλη από το Γ προς την ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Ζ. Οι ευθείες ΕΔ και ΖΓ τέμνονται στο Η, ενώ οι ευθείες ΖΔ και ΕΒ τέμνονται στο σημείο Θ. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{BA\Delta} = \widehat{A\Delta Z}$ και $\widehat{E\Delta A} = \widehat{\Delta A\Gamma}$,
- β) η ευθεία ΔΑ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{E\Delta Z}$,
- γ) $AB \parallel \Delta Z$ και $AG \parallel E\Delta$,
- δ) $AB = \Delta\Theta$ και $AG = \Delta H$,
- ε) $B\Gamma = \Theta H$,
- στ) τα τρίγωνα ABΓ και ΔΘΗ είναι ίσα.

1.58 Δίνεται χορδή ΔΓ κύκλου (Ο, ρ) και ένα οποιοδήποτε σημείο Α του κυρτού τόξου ΓΔ. Από το Α φέρ-

νουμε τμήμα AB παράλληλο και ίσο με το $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Αν E είναι το αντιδιαμετρικό του σημείου Δ , να αποδείξετε ότι:

$$BE \perp AG$$

1.59 α) Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O . Αν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε

$$\text{ότι } AH = 2OM.$$

β) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθόκεντρο H , βαρύκεντρο Θ και περίκεντρο O . Να αποδείξετε ότι:

i) τα σημεία H , Θ και O βρίσκονται στην ίδια ευθεία (ευθεία του Euler),

$$\text{ii)} H\Theta = 2\Theta O.$$

Ερωτήσεις κατανόησης

1.60 Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

α) Ποια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη σε κύκλο;

β) Να σχεδιάσετε μια εγγεγραμμένη γωνία και την αντίστοιχη επίκεντρη και να σημειώσετε το τόξο στο οποίο βαίνει.

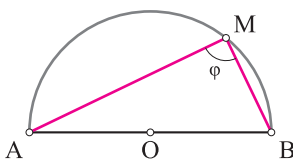
γ) Να σχεδιάσετε μια γωνία χορδής και εφαπτομένης.

δ) Ποια σχέση συνδέει την εγγεγραμμένη γωνία με την αντίστοιχη επίκεντρη;

ε) Τι συμπεραίνετε για εγγεγραμμένες γωνίες του ίδιου ή ίσων κύκλων που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα;

στ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο $\widehat{AOB}$ και η γωνία $\hat{M}$. Τι ισχύει για τη γωνία $\hat{M}$; Να διατυπώσετε γενικό συμπέρασμα.

ζ) Τι γνωρίζετε για τη γωνία χορδής και εφαπτομένης;



Για τις γωνίες ϕ και ω ισχύει ότι $\phi = \dots$

♦ Η γωνία ρ λέγεται γωνία και και είναι με κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\widehat{AB}$. Ισχύει δηλαδή ότι $\rho = \dots$ και $\omega = 2\rho$.

β) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο (διάμετρο) είναι

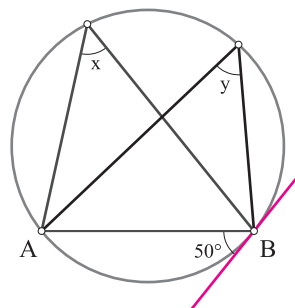
γ) Η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το της αντίστοιχης επίκεντρης.

δ) Στο διπλανό σχήμα η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι ίση με 50° .

Τότε είναι:

$$x = \dots \text{ και}$$

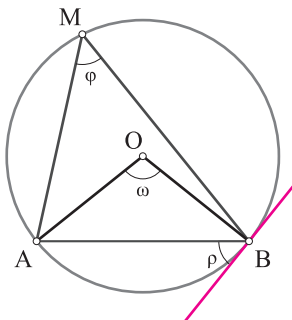
$$y = \dots$$



1.61 Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού

α) ♦ Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{M}$ λέγεται και στο τόξο

♦ Η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία είναι η



1.62 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή ως λανθασμένες (Λ).

α) Αν μια γωνία έχει την κορυφή της πάνω στον κύκλο, λέγεται εγγεγραμμένη.

β) Η εγγεγραμμένη είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

γ) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

δ) Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στην ίδια ή σε ίσες χορδές είναι ίσες.

1.63 Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

α) Στο διπλανό σχήμα είναι:

$$\hat{A} = 20^\circ$$

και

$$\widehat{ΓΔ} = 50^\circ$$

Το μέτρο του τόξου

$\widehat{ΒΕ}$ είναι:

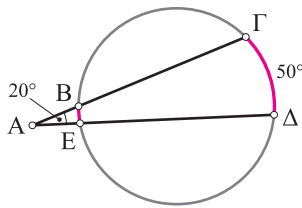
$$A: 25^\circ$$

$$B: 70^\circ$$

$$Γ: 40^\circ$$

$$Δ: 15^\circ$$

$$E: 10^\circ$$



γ) Στο διπλανό σχήμα είναι:

$$\hat{M} = 50^\circ$$

και

$$\hat{B} = 40^\circ$$

Το μέτρο του τόξου $\widehat{ΑΓ}$ είναι:

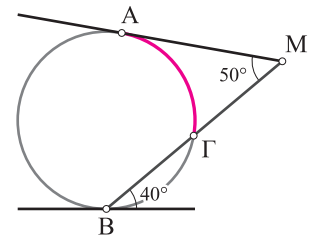
$$A: 45^\circ$$

$$B: 55^\circ$$

$$Γ: 60^\circ$$

$$Δ: 70^\circ$$

$$E: 90^\circ$$



β) Στο διπλανό σχήμα είναι:

$$\widehat{ΑΓ} = 50^\circ$$

και

$$\widehat{ΒΔ} = 40^\circ$$

Η γωνία ω είναι ίση με:

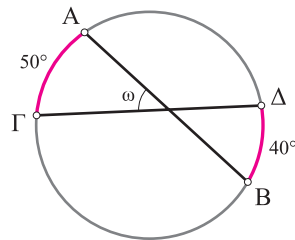
$$A: 30^\circ$$

$$B: 35^\circ$$

$$Γ: 45^\circ$$

$$Δ: 60^\circ$$

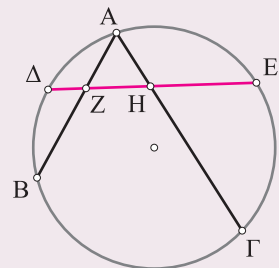
$$E: 55^\circ$$



Διαγώνισμα 1ο

Θέμα 1ο

Δίνεται κύκλος, δύο χορδές AB, AΓ και τα μέσα Δ και E των τόξων $\widehat{AB}$ και $\widehat{AΓ}$ αντίστοιχα. Αν οι AB και AΓ τέμνουν τη ΔΕ στα Z και H αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AZ = AH$ (τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{AΓ}$ να είναι μικρότερα από την ημιπεριφέρεια, όπως στο σχήμα).



Θέμα 2ο

Από σημείο Γ εκτός κύκλου (O, R) φέρνουμε τις εφαπτομένες ΓΑ και ΓΒ. Η κάθετη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει την ΟΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = R$.

Θέμα 3ο

Δίνεται κύκλος (O, R), σημείο Γ εκτός αυτού, οι εφαπτομένες ΓΑ και ΓΒ, το αντιδιαμετρικό σημείο Δ του Α και σημείο E της ημιευθείας ΑΓ, ώστε $ΓΕ = ΓΑ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, B και Δ είναι συνευθειακά.

Θέμα 4ο

Δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ τέμνονται στα σημεία A και B. Από ένα σημείο Σ του κύκλου με κέντρο K, το οποίο είναι εξωτερικό του κύκλου με κέντρο Λ, φέρνουμε τις τέμνουσες ΣΑΓ και ΣΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

$$ΣΚ \perp ΓΔ$$

Ενότητα 2

- ✓ **Εγγεγραμμένα τετράπλευρα**
- ✓ **Εγγράψιμα τετράπλευρα**

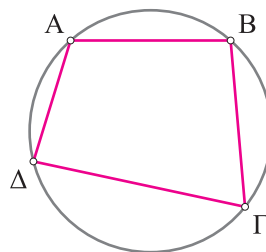
Βασική θεωρία και εφαρμογές

1. Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

Έτσι, στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.



Θεώρημα

Σε κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο ισχύει ότι:

- α) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- β) Κάθε εξωτερική γωνία, ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.
- γ) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Απόδειξη

α) Επειδή η εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου, είναι:

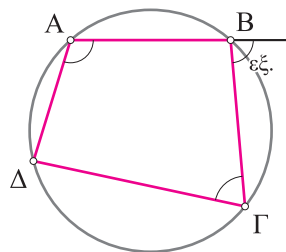
$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{C} &= \frac{\widehat{B\Gamma\Delta}}{2} + \frac{\widehat{B\Lambda\Delta}}{2} = \frac{\widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{B\Lambda\Delta}}{2} = \\ &= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ\end{aligned}$$

Άρα $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ και έτσι $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

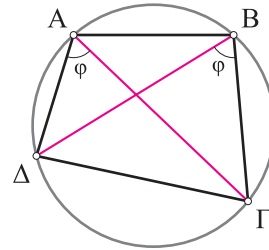
β) Είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \quad \text{και} \quad \hat{B}_{\text{εξ}} + \hat{B} = 180^\circ$$

Άρα $\hat{B}_{\text{εξ}} = \hat{A}$.



γ) Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την πλευρά ΓΔ. Είναι τότε $\widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΓΑΔ} = \varphi$, διότι οι γωνίες αυτές είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓΔ. Όμοια, κάθε άλλη πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.



Εφαρμογή 2.1

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε σημείο Ε. Ο κύκλος που περνάει από τα σημεία Ε, Β, Γ ξανατέμνει την ευθεία ΔΓ στο σημείο Ζ. Να αποδειχθεί ότι $EZ \parallel AD$.

Λύση

Για να είναι $AD \parallel EZ$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\hat{A} + \hat{E} = 180^\circ$$

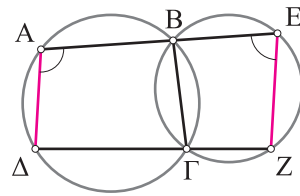
- ♦ Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο, οπότε:

$$\hat{A} = \widehat{B\Gamma Z} \quad (1)$$

- ♦ Το τετράπλευρο ΒΓΖΕ είναι εγγεγραμμένο, οπότε:

$$\widehat{B\Gamma Z} + \hat{E} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\iff} \hat{A} + \hat{E} = 180^\circ$$

Είναι λοιπόν $\hat{A} + \hat{E} = 180^\circ$, οπότε $AD \parallel EZ$.



2. Το εγγράψιμο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο**, όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται από τις κορυφές του.

- ♦ Ένα εγγράψιμο τετράπλευρο είναι ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο, από το οποίο έχουμε «σβήσει» τον (περιγεγραμμένο) κύκλο.
- ♦ Τα εγγράψιμα τετράπλευρα έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα.

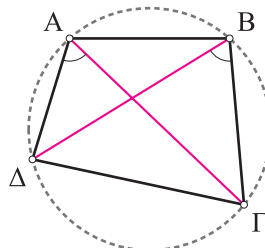
Θεώρημα - Κριτήριο

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:

- Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.
- Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Έτσι, το τετράπλευρο ABΓΔ είναι εγγράψιμο, αν και μόνο αν ισχύει, για παράδειγμα, ότι:

- ♦ $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$
- ♦ $\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A}$ ή $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Delta}$ ή $\hat{A}_{εξ} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{\Delta}_{εξ} = \hat{B}$
- ♦ $\widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B \Gamma}$ ή $\widehat{\Gamma \Delta B} = \widehat{\Gamma A B}$ ή
 $\widehat{B \Gamma A} = \widehat{B \Delta A}$ ή $\widehat{A B \Delta} = \widehat{A \Gamma \Delta}$



Είναι φανερό ότι αν ισχύει μία από τις παραπάνω ιδιότητες, τότε θα ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες. Επομένως, αν καταφέρουμε σε μία άσκηση να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο, τότε έχουμε στα χέρια μας μεγάλο πλήθος νέων στοιχείων, που θα μας οδηγήσουν σταδιακά στη λύση της.

Εφαρμογή 2.2

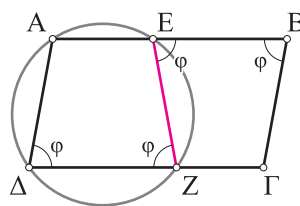
Ένας κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές A και Δ ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ τέμνει την AB στο E και τη ΓΔ στο Z. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο EZΓB είναι εγγράψιμο.

Λύση

Επειδή το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{B} = \varphi$. Όμως το τετράπλευρο AEZΔ είναι εγγεγραμμένο, οπότε $\hat{A} = \widehat{ZEB}$. Αλλά είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$, οπότε $\widehat{ZEB} = \widehat{EZ\Delta}$. Άρα:

$$\widehat{EZ\Delta} = \widehat{ZEB} = \hat{A} = \hat{B}$$

Επειδή $\widehat{EZ\Delta} = \hat{B}$, το τετράπλευρο EBΓZ είναι εγγράψιμο.



Εφαρμογή 2.3

Έστω AB και ΓΔ δύο τεμνόμενες χορδές ενός κύκλου. Αν $AE \perp \Gamma\Delta$ και $\Delta Z \perp AB$, να αποδειχθεί ότι $EZ \parallel B\Gamma$.

Λύση

Για να είναι $EZ \parallel B\Gamma$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $x = \omega$.

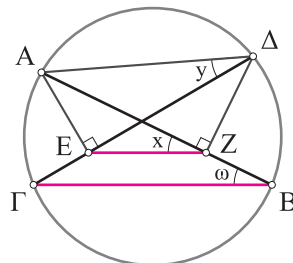
Επειδή $\widehat{AE\Delta} = \widehat{AZ\Delta} = 90^\circ$, το τετράπλευρο AEZΔ είναι εγγράψιμο. Επομένως $\widehat{AZE} = \widehat{ADE}$, δηλαδή:

$$x = y \quad (1)$$

Όμως $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{A\Gamma B}$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο τόξο ΑΓ. Είναι δηλαδή:

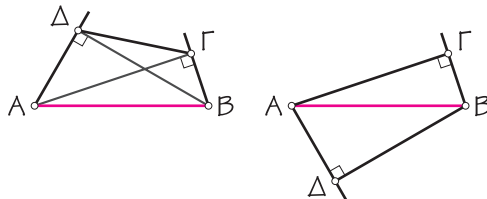
$$y = \omega \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $x = \omega$. Άρα $EZ \parallel B\Gamma$.



Σχόλια στα εγγράφιμα τετράπλευρα

1. Αν Γ, Δ είναι οι προβολές των άκρων A, B ενός τμήματος σε δύο ευθείες που διέρχονται από τα A και B , τότε τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή είναι κορυφές εγγράφιμου τετραπλεύρου.



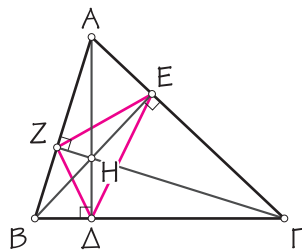
2. α) Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι εγγράψιμο, τότε αυτό είναι ορθογώνιο.

β) Αν ένας ρόμβος είναι εγγράψιμος σε κύκλο, τότε αυτός είναι τετράγωνο.

γ) Αν ένα τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, τότε αυτό είναι ισοσκελές και αντιστρόφως.

3. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε τα ύψη του $A\Delta, BE, \Gamma Z$ και το ορθόκεντρο H , τότε στο σχήμα αυτό υπάρχουν έξι εγγράφιμα τετράπλευρα.

- ♦ Δύο κορυφές και οι προβολές τους στις δύο άλλες πλευρές σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο. Επομένως τα τετράπλευρα $B\Gamma EZ, \Gamma A Z \Delta, A B \Delta E$ είναι εγγράψιμα.
- ♦ Υπάρχουν τρία εγγράψιμα με κοινή κορυφή το ορθόκεντρο H . Αυτά είναι τα εξής:
 $H Z A E, H \Delta B Z, H \Delta \Gamma E$



Εφαρμογή 2.4

Στο εξωτερικό ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε το τετράγωνο $B\Gamma \Delta E$ με κέντρο H . Να αποδειχθεί ότι η AH διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}$.

Λύση

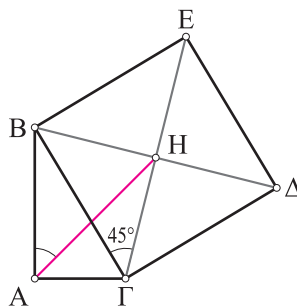
- ♦ Επειδή το $B\Gamma \Delta E$ είναι τετράγωνο, έχουμε:

$$\widehat{B\Gamma H} = 90^\circ \text{ και } \widehat{B\Gamma H} = 45^\circ$$

- ♦ Είναι $\hat{A} = 90^\circ = \widehat{B\Gamma H}$, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma H$ είναι εγγράψιμο. Επομένως:

$$\widehat{BAH} = \widehat{B\Gamma H} = 45^\circ$$

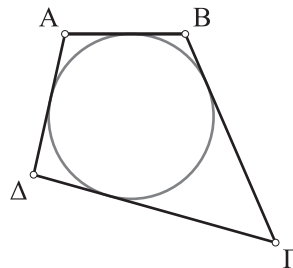
- ♦ Αφού $\widehat{BA\Gamma} = 90^\circ$ και $\widehat{BAH} = 45^\circ$, η AH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



3. Το περιγεγραμμένο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύκλο, όταν οι πλευρές του εφάπτονται στον κύκλο.



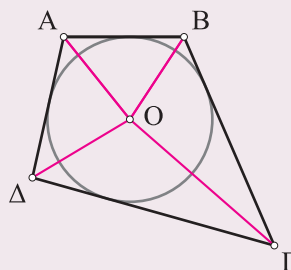
Ιδιότητες

Σε κάθε περιγεγραμμένο τετράπλευρο ισχύει ότι:

α) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

β) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα, δηλαδή:

$$AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$$



Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο, αν και μόνο αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Αν λοιπόν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο, προσπαθούμε να αποδείξουμε μία από τις παραπάνω προτάσεις.

Εφαρμογή 2.5

Σε ένα περιγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι:

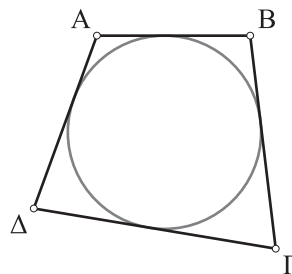
$$AB = 5, \quad B\Gamma = 7, \quad \Gamma\Delta = 8$$

Να υπολογιστεί η πλευρά $A\Delta$.

Λύση

Αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγεγραμμένο, θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} A\Delta + B\Gamma &= AB + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta + 7 = 5 + 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A\Delta + 7 &= 13 \Leftrightarrow A\Delta = 13 - 7 \Leftrightarrow A\Delta = 6 \end{aligned}$$



Λυμένες ασκήσεις

2.6 Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Έστω AD το ύψος του τριγώνου. Η παράλληλη από το Δ προς τη BA τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο A , στο σημείο E . Να αποδειχθεί ότι $\widehat{AEG} = 90^\circ$.

Λύση

Επειδή η AE είναι εφαπτομένη του κύκλου, θα έχουμε:

$$\hat{B} = \widehat{EAG} = \varphi \quad (1)$$

Όμως $BA \parallel \Delta E$, οπότε:

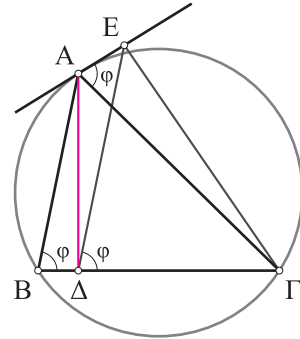
$$\hat{B} = \widehat{EDG} = \varphi \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε ότι:

$$\widehat{EAG} = \widehat{EDG} = \varphi$$

Επομένως το τετράπλευρο $AEG\Delta$ είναι εγγράψιμο.

Ισχύει όμως $\widehat{ADG} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{AEG} = 90^\circ$, διότι οι απέναντι γωνίες εγγράψιμου τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές.



2.7 Δίνονται δύο κάθετες διαμέτροι AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου κέντρου O . Έστω E τυχαίο σημείο του τόξου $B\Gamma$. Αν $AZ \perp \Delta E$, να αποδειχθεί ότι $OZ \parallel EB$.

Λύση

Για να είναι $EB \parallel OZ$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\widehat{OZE} = \widehat{ZEB}, \text{ δηλαδή } y = x$$

Φέρνουμε την AD . Επειδή $\widehat{AO\Delta} = \widehat{AZ\Delta} = 90^\circ$, το τετράπλευρο $AOZ\Delta$ είναι εγγράψιμο. Άρα:

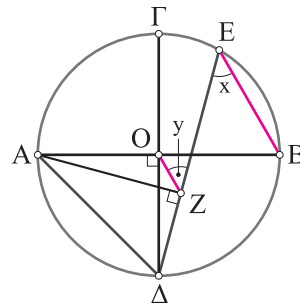
$$\hat{A} = y \quad (1)$$

όπου $\hat{A} = \widehat{OAZ}$.

Όμως οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{E}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Delta B}$. Συνεπώς $\hat{A} = \hat{E}$, δηλαδή:

$$\hat{A} = x \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $y = x$. Επομένως $OZ \parallel EB$.



2.8 Στις πλευρές $AB, A\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ, E αντίστοιχα, ώστε $BA = \Gamma E$. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ABE και $A\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο P . Να αποδειχθεί ότι:

α) τα τρίγωνα $BAP, \Gamma EP$ είναι ίσα, β) $\widehat{PAB} = \widehat{PA\Gamma}$.

Λύση

α) Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABPE παίρνουμε ότι:

$$\widehat{ABP} = \widehat{PE\Gamma} \Leftrightarrow x = y \quad (1)$$

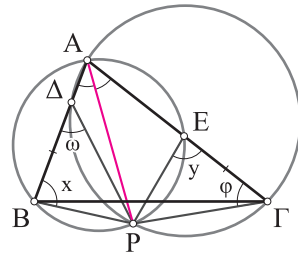
Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο AΔPΓ παίρνουμε ότι:

$$\widehat{A\Gamma P} = \widehat{P\Delta B} \Leftrightarrow \varphi = \omega \quad (2)$$

Είναι όμως επιπλέον $B\Delta = \Gamma E$, οπότε οι (1) και (2) εξασφαλίζουν ότι τα τρίγωνα BΔP, ΓEP είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα BΔP, ΓEP είναι ίσα, είναι $PB = PE$. Στον κύκλο (A, B, P, E) είναι $PB = PE$, οπότε οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{PAB}$, $\widehat{PAE}$ είναι ίσες. Άρα:

$$\widehat{PAB} = \widehat{PAE}$$



Η μαγεία του εγγράψιμου τετραπλεύρου

Η σημασία που έχουν τα εγγράψιμα τετράπλευρα στη γρήγορη λύση των ασκήσεων φαίνεται και στο εξής πρόβλημα:

Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{B} = 75^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω σημείο Μ στο εσωτερικό του τριγώνου, ώστε $\widehat{MB\Gamma} = \widehat{M\Gamma B} = 25^\circ$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\widehat{MAB} = 50^\circ$$

Λύση

Φέρνουμε το ύψος ΜΔ του τριγώνου ΜΒΓ. Η ευθεία ΔΜ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Τότε $\widehat{\Delta E\Gamma} = 50^\circ = \widehat{ABM}$, αφού $\widehat{ABM} = 75^\circ - 25^\circ = 50^\circ$.

Το ABME είναι επομένως εγγράψιμο, οπότε:

$$\widehat{BAM} = \widehat{BEM} = \widehat{ME\Gamma} = 50^\circ$$

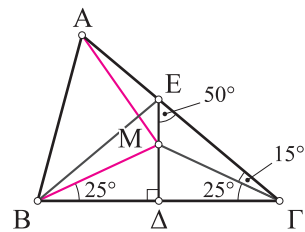
Τονίζουμε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, διότι η ΕΔ είναι μεσοκάθετη του ΒΓ. Έτσι:

$$\widehat{BEM} = \widehat{ME\Gamma} = 50^\circ$$

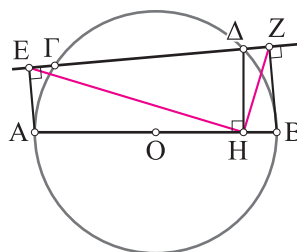
Άλλος τρόπος

Είναι $MB = M\Gamma$ και $\widehat{BM\Gamma} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ = 2\hat{A}$. Άρα το Μ είναι περίκεντρο στο τρίγωνο ΑΒΓ. Έτσι έχουμε $\widehat{AMB} = 2\hat{\Gamma} = 80^\circ$, οπότε:

$$\widehat{MAB} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$



2.9 Δίνεται κύκλος κέντρου O , μια διάμετρος AB και μια χορδή $\Gamma\Delta$, που δεν είναι παράλληλη στην AB . Φέρνουμε $AE, BZ \perp \Gamma\Delta$, καθώς και $\Delta H \perp AB$. Να αποδειχθεί ότι $HE \perp HZ$.



Λύση

Φέρνουμε τις ΔA και ΔB .

- ♦ Το τετράπλευρο $\Delta H A E$ είναι εγγράψιμο, διότι ισχύει $\widehat{\Delta H A} = \widehat{\Delta E A} = 90^\circ$. Επομένως:

$$\widehat{A H E} = \widehat{A \Delta E} = x \quad (1)$$

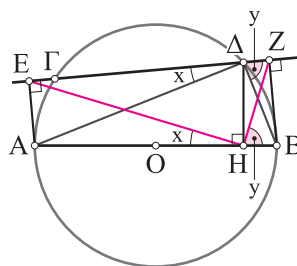
- ♦ Το τετράπλευρο $\Delta H B Z$ είναι εγγράψιμο, διότι ισχύει $\widehat{\Delta H B} = \widehat{\Delta Z B} = 90^\circ$. Επομένως:

$$\widehat{B H Z} = \widehat{B \Delta Z} = y \quad (2)$$

- ♦ Η γωνία $\widehat{A \Delta B}$ είναι ορθή, διότι είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο (διάμετρο). Επομένως στο σημείο Δ οι γωνίες x και y είναι συμπληρωματικές. Είναι δηλαδή $x + y = 90^\circ$. Έτσι έχουμε:

$$\widehat{E H Z} = 180^\circ - x - y = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Άρα $HE \perp HZ$.



2.10 Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τα ύψη $B\Delta, \Gamma E$ και τις προβολές Z, H των B, Γ αντίστοιχα πάνω στην ευθεία ΔE . Να αποδειχθεί ότι $EZ = \Delta H$.

Λύση

Επειδή $\widehat{B E \Gamma} = \widehat{B \Delta \Gamma} = 90^\circ$, το τετράπλευρο $B E \Delta \Gamma$ είναι εγγράψιμο. Έτσι η $E \Delta$ είναι χορδή του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία B, E, Δ και Γ . Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε $MN \perp E \Delta$. Τότε:

- ♦ το N είναι μέσο της χορδής $E \Delta$, οπότε:

$$NE = N \Delta \quad (1)$$

- ♦ το N είναι μέσο του ZH , διότι στο τραπέζιο $B Z H \Gamma$ η MN είναι διάμεσος (M μέσο του $B\Gamma$ και $MN \parallel BZ \parallel \Gamma H$). Επομένως:

$$NZ = NH \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2), με αφαίρεση κατά μέλη, δίνουν τελικά ότι $EZ = \Delta H$.

