

Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων



Martin J. Osborne



Επιστημονική επιμέλεια ελληνικής έκδοσης: **Ιωάννης Ρεφανίδης**
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής Πανεπ. Μακεδονίας

Περιεχόμενα

Πρόλογος	11
1 Εισαγωγή	21
1.1 Τι είναι η θεωρία παιγνίων;.....	21
<i>Μια σύντομη ιστορία της θεωρίας παιγνίων</i>	23
<i>John von Neumann</i>	24
1.2 Η θεωρία της ορθολογικής επιλογής.....	25
1.3 Το επόμενο βήμα: αλληλεπιδρώντες λήπτες αποφάσεων	30
Σημειώσεις	32
I Παίγνια με τέλεια πληροφόρηση	33
2 Ισορροπία Nash: Θεωρία	35
2.1 Στρατηγικά παίγνια	35
2.2 Παράδειγμα: το Δίλημμα του Φυλακισμένου.....	37
2.3 Παράδειγμα: Μπαχ ή Στραβίνσκι;	43
2.4 Παράδειγμα: Ταίριασμα Νομισμάτων	44
2.5 Παράδειγμα: το Κυνήγι του Ελαφιού.....	45
2.6 Ισορροπία Nash	46
<i>John F. Nash, Jr.</i>	49
<i>Πειραματική μελέτη της ισορροπίας Nash</i>	51
2.7 Παραδείγματα ισορροπίας Nash.....	54
<i>Πειραματικά στοιχεία για το Δίλημμα του Φυλακισμένου</i>	57
<i>Εστιάκα σημεία</i>	63
2.8 Συναρτήσεις βέλτιστης απάντησης.....	68
2.9 Κυρίαρχοι ενέργειες	81
2.10 Ισορροπία σε ένα μοναδικό πληθυσμό:	
συμμετρικά παίγνια και ισορροπίες	90
Σημειώσεις	93

3	Ισορροπία Nash: Παραδείγματα.....	95
3.1	Μοντέλο του Cournot για το ολιγοπώλιο.....	95
3.2	Μοντέλο ολιγοπωλίου του Bertrand.....	107
	<i>Cournot, Bertrand, και Nash: μερικές ιστορικές σημειώσεις.....</i>	<i>116</i>
3.3	Εκλογικός ανταγωνισμός.....	117
3.4	Ο Πόλεμος Φθοράς.....	126
3.5	Δημοπρασίες.....	131
	<i>Δημοπρασίες από τη Βαβυλώνα μέχρι το eBay.....</i>	<i>132</i>
3.6	Νόμος ατυχημάτων.....	148
	Σημειώσεις.....	155
4	Ισορροπία μικτών στρατηγικών.....	157
4.1	Εισαγωγή.....	157
	<i>Μερικά στοιχεία για τις συναρτήσεις αναμενόμενης απολαβής..</i>	<i>165</i>
4.2	Στρατηγικά παίγνια στα οποία οι παίκτες μπορεί να χρησιμοποιούν τυχαιότητα.....	167
4.3	Ισορροπία Nash μικτών στρατηγικών.....	169
4.4	Κυριαρχούμενες ενέργειες.....	187
4.5	Καθαρές ισορροπίες όταν επιτρέπεται τυχαιότητα.....	190
4.6	Παρουσίαση: διάγνωση ειδικού.....	192
4.7	Ισορροπία σε ένα μοναδικό πληθυσμό.....	199
4.8	Παρουσίαση: αναφορά εγκλήματος.....	202
	<i>Αναφορά εγκλήματος:</i>	
	<i>κοινωνική ψυχολογία και θεωρία παιγνίων.....</i>	<i>205</i>
4.9	Ο σχηματισμός των πεποιθήσεων των παικτών.....	207
4.10	Επέκταση: εύρεση όλων των ισορροπιών Nash μικτών στρατηγικών.....	212
4.11	Επέκταση: παίγνια στα οποία κάθε παίκτης διαθέτει ένα συνεχές φάσμα ενεργειών.....	219
4.12	Παράρτημα: αναπαράσταση προτιμήσεων με αναμενόμενες απολαβές.....	225
	Σημειώσεις.....	231
5	Εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση: Θεωρία.....	233
5.1	Εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση.....	234
5.2	Στρατηγικές και αποτελέσματα.....	241
5.3	Ισορροπία Nash.....	245
5.4	Υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία.....	248
5.5	Εύρεση υποπαιγνιακά τέλειων ισορροπιών για παίγνια πεπερασμένου ορίζοντα: αντίστροφη επαγωγή.....	256

	<i>Τρίλιζα, σκάκι, και συναφή παιχνίδια</i>	268
	Σημειώσεις	270
6	Εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση: Παραδείγματα	271
6.1	Το παίγνιο τελεσιγράφου, το παίγνιο ληστείας, και ο έλεγχος ατζέντας	271
	<i>Πειράματα με το παίγνιο τελεσιγράφου</i>	274
6.2	Μοντέλο δυοπωλίου του Stackelberg.....	280
6.3	Εξαγορά ψήφων	287
6.4	Μία κούρσα.....	294
	Σημειώσεις	303
7	Εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση: Επεκτάσεις και ανάλυση	305
7.1	Άδεια για ταυτόχρονες κινήσεις.....	305
	<i>Πρόσθετα πειραματικά στοιχεία πάνω στην υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία</i>	314
7.2	Παρουσίαση: είσοδος σε μια μονοπωλιακή βιομηχανία	316
7.3	Παρουσίαση: εκλογικός ανταγωνισμός με στρατηγικούς ψηφοφόρους.....	319
7.4	Παρουσίαση: λήψη αποφάσεων από επιτροπή	322
7.5	Παρουσίαση: έξοδος από φθίνουσα βιομηχανική αγορά	328
7.6	Επιτρέποντας εξωγενή αβεβαιότητα.....	334
7.7	Συζήτηση: υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία και αντίστροφη επαγωγή	341
	<i>Πειραματικά δεδομένα από το παίγνιο της σαρανταποδαρούσας</i>	347
	Σημειώσεις	349
8	Συμμαχικά παίγνια και ο πυρήνας	351
8.1	Συμμαχικά παίγνια	351
8.2	Ο πυρήνας.....	357
8.3	Παρουσίαση: ιδιοκτησία και κατανομή του πλούτου	363
8.4	Παρουσίαση: ανταλλαγή ομοιογενών αλόγων.....	368
8.5	Παρουσίαση: ανταλλαγή ετερογενών σπιτιών	376
8.6	Παρουσίαση: ψηφοφορία.....	381
8.7	Παρουσίαση: ταίριασμα.....	385
	<i>Ταίριασμα γιατρών με νοσοκομεία</i>	392
8.8	Συζήτηση: άλλες έννοιες λύσης	394
	Σημειώσεις	395

II	Παίγνια με ατελή πληροφόρηση.....	397
9	Παίγνια Bayes.....	399
9.1	Παρακινητικά παραδείγματα.....	400
9.2	Γενικοί ορισμοί.....	407
9.3	Δύο παραδείγματα που αφορούν πληροφόρηση.....	413
9.4	Παρουσίαση: Παίγνιο δυοπωλίου Cournot με ατελή πληροφόρηση.....	417
9.5	Παροχή δημόσιου αγαθού.....	422
9.6	Παρουσίαση: δημοπρασίες.....	425
	<i>Δημοπρασίες του φάσματος ραδιοσυχνοτήτων.....</i>	<i>437</i>
9.7	Παρουσίαση: σώματα ενόρκων.....	439
9.8	Παράρτημα: δημοπρασίες με αυθαίρετη κατανομή των αποτιμήσεων.....	448
	Σημειώσεις.....	453
10	Εκτεταμένα παίγνια με ατελή.....	455
10.1	Εκτεταμένα παίγνια με ατελή πληροφόρηση.....	456
10.2	Στρατηγικές.....	462
10.3	Ισορροπία Nash.....	463
10.4	Πεποιθήσεις και ακολουθιακή ισορροπία.....	470
10.5	Παίγνια σηματοδότησης.....	482
10.6	Παρουσίαση: επιδεικτική δαπάνη ως σήμα ποιότητας.....	488
10.7	Παρουσίαση: η μόρφωση ως σημάδι ικανότητας.....	493
10.8	Παρουσίαση: μετάδοση στρατηγικών πληροφοριών.....	497
10.9	Παρουσίαση: έλεγχος ατζέντας με ατελή πληροφόρηση.....	508
	Σημειώσεις.....	516
III	Παραλλαγές και επεκτάσεις.....	519
11	Αυστηρά ανταγωνιστικά παίγνια.....	521
11.1	Μεγιστοελαχιστοποίηση.....	522
11.2	Μεγιστοελαχιστοποίηση και ισορροπία Nash.....	525
11.3	Αυστηρά ανταγωνιστικά παίγνια.....	527
11.4	Μεγιστοελαχιστοποίηση και ισορροπία Nash σε αυστηρά ανταγωνιστικά παίγνια.....	529
	<i>Μεγιστοελαχιστοποίηση: λίγη ιστορία.....</i>	<i>534</i>
	<i>Εμπειρικές δοκιμές: πειράματα, τένις, και ποδόσφαιρο.....</i>	<i>538</i>
	Σημειώσεις.....	541

12	Ορθολογικευσιμότητα.....	543
12.1	Ορθολογικευσιμότητα.....	544
12.2	Επαναλαμβανόμενη απαλοιφή των αυστηρά κυριαρχούμενων ενεργειών.....	554
12.3	Επαναλαμβανόμενη απαλοιφή των ασθενώς κυριαρχούμενων ενεργειών.....	560
12.4	Επιλυσιμότητα κυριαρχίας.....	564
	Σημειώσεις.....	565
13	Εξελικτική ισορροπία.....	567
13.1	Ισορροπία μονομορφικών καθάρων στρατηγικών.....	568
	<i>Εξελικτική θεωρία παιγνίων: μερικά ιστορικά στοιχεία.....</i>	<i>575</i>
13.2	Μικτές στρατηγικές και πολυμορφική ισορροπία.....	578
13.3	Ασύμμετρες αναμετρήσεις.....	587
	<i>Σαύρα Stansburiana Uta.....</i>	<i>586</i>
	<i>Επεξήγηση των αποτελεσμάτων των αναμετρήσεων στη φύση.....</i>	<i>591</i>
13.4	Παραλλαγή σε ένα θέμα: συμπεριφορά αδελφιών.....	593
13.5	Παραλλαγή σε ένα θέμα: η συμπεριφορά των σφηκών ως προς τις φωλιές.....	597
13.6	Παραλλαγή σε ένα θέμα: η εξέλιξη της αναλογίας των φύλων.....	600
	Σημειώσεις.....	601
14	Επαναλαμβανόμενα παίγνια: το Δίλημμα του Φυλακισμένου	603
14.1	Η βασική ιδέα.....	604
14.2	Προτιμήσεις.....	606
14.3	Επαναλαμβανόμενα παίγνια.....	609
14.4	Πεπερασμένα επαναλαμβανόμενο Δίλημμα του Φυλακισμένου	610
14.5	Απείρως επαναλαμβανόμενο Δίλημμα του Φυλακισμένου	613
14.6	Στρατηγικές σε ένα απείρως επαναλαμβανόμενο Δίλημμα του Φυλακισμένου	613
14.7	Κάποιες ισορροπίες Nash για το απείρως επαναλαμβανόμενο Δίλημμα του Φυλακισμένου	616
14.8	Απολαβές ισορροπίας Nash σε απείρως επαναλαμβανόμενο Δίλημμα του Φυλακισμένου	620
	<i>Πειραματικά στοιχεία.....</i>	<i>627</i>
14.9	Υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες και η ιδιότητα της μίας απόκλισης	629
	<i>Τουρνουά Axelrod.....</i>	<i>632</i>

14.10 Κάποιες υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες για ένα απείρως επαναλαμβανόμενο Δίλημμα του Φυλακισμένου	634
<i>Αμοιβαίος αλτρουισμός μεταξύ αγκαθόψαρων</i>	641
14.11 Απολαβές υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίας για ένα απείρως επαναλαμβανόμενο Δίλημμα του Φυλακισμένου	642
<i>Μεσαιωνικές εμπορικές συναλλαγές</i>	644
14.12 Συμπερασματικές παρατηρήσεις	647
<i>Σημειώσεις</i>	647
15 Επαναλαμβανόμενα παίγνια:	649
15.1 Ισορροπίες Nash για γενικά απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια ..	649
15.2 Υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες γενικών απείρως επαναλαμβανόμενων παιγνίων	655
15.3 Πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια	662
15.4 Παραλλαγές σε ένα θέμα: ατελής παρατηρησιμότητα	664
<i>Σημειώσεις</i>	667
16 Παζάρεμα	669
16.1 Το παζάρεμα ως εκτεταμένο παίγνιο	670
16.2 Παρουσίαση: εμπόριο σε μια αγορά	687
16.3 Αξιωματικό μοντέλο Nash	691
16.4 Σχέση μεταξύ στρατηγικών και αξιωματικών μοντέλων	703
<i>Σημειώσεις</i>	706
17 Παράρτημα: Μαθηματικά	707
17.1 Αριθμοί	707
17.2 Σύνολα	708
17.3 Συναρτήσεις	710
17.4 Προφίλ	714
17.5 Ακολουθίες	715
17.6 Πιθανότητα	715
17.7 Αποδείξεις	723
Βιβλιογραφία	725
Ευρετήριο	745

5

Εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση: Θεωρία

5.1	Εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση	234
5.2	Στρατηγικές και αποτελέσματα	241
5.3	Ισορροπία Nash	245
5.4	Υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία	248
5.5	Εύρεση υποπαιγνιακά τέλειων ισορροπιών για παίγνια πεπερασμένου ορίζοντα: αντίστροφη επαγωγή	256
<i>Προσπατούμενη γνώση: Κεφάλαια 1 και 2</i>		

Το μοντέλο των στρατηγικών παιγνίων συγκαλύπτει την ακολουθιακή φύση της λήψης αποφάσεων. Όταν εφαρμόζουμε το μοντέλο σε περιστάσεις στις οποίες οι λήπτες αποφάσεων κάνουν τις κινήσεις τους ακολουθιακά, υποθέτουμε ότι ο κάθε λήπτης αποφάσεων επιλέγει το πλάνο του μία φορά και για πάντα· δεσμεύεται σε αυτό το πλάνο, και δεν μπορεί να το τροποποιήσει καθώς εκτυλίσσονται τα συμβάντα. Σε αντιδιαστολή, το μοντέλο του εκτεταμένου παιγνίου (extensive game) περιγράφει ρητά την ακολουθιακή φύση της λήψης αποφάσεων, επιτρέποντάς μας να μελετήσουμε περιστάσεις στις οποίες ο λήπτης αποφάσεων έχει την ελευθερία να αλλάξει γνώμη καθώς εκτυλίσσονται τα συμβάντα.

Σε αυτό και τα δύο επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε ένα μοντέλο στο οποίο ο κάθε λήπτης αποφάσεων είναι πάντα πλήρως πληροφορημένος σχετικά με όλες τις προηγούμενες ενέργειες. Στο Κεφάλαιο 10 θα μελετήσουμε ένα πιο γενικό μοντέλο, το οποίο επιτρέπει στους λήπτες αποφάσεων, κατά την επιλογή της ενέργειάς τους, να είναι ατελώς πληροφορημένοι σχετικά με τις προηγούμενες ενέργειες.

5.1 Εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση

5.1.1 Ορισμός

Για να περιγράψουμε ένα εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση, θα πρέπει να προσδιορίσουμε το σύνολο των παικτών και τις προτιμήσεις τους, όπως και στην περίπτωση του στρατηγικού παιγνίου (Ορισμός 2.1). Επιπρόσθετα, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη σειρά των κινήσεων των παικτών και τις ενέργειες που μπορεί να εκτελέσει ο κάθε παίκτης σε κάθε σημείο. Αυτό το κάνουμε περιγράφοντας το σύνολο όλων των ενεργειών που μπορούν δυνητικά να προκύψουν, μαζί με τον παίκτη που έχει την κίνηση σε κάθε σημείο κάθε ακολουθίας. Θα ονομάζουμε *τερματικό ιστορικό* (terminal history) την κάθε δυνατή ακολουθία ενεργειών και *συνάρτηση παίκτη* (player function) τη συνάρτηση που δίνει τον παίκτη ο οποίος έχει την κίνηση σε κάθε σημείο του κάθε τερματικού ιστορικού. Έτσι, ένα εκτεταμένο παίγνιο έχει τέσσερις συνιστώσες:

- παίκτες
- τερματικά ιστορικά
- συνάρτηση παίκτη
- προτιμήσεις για τους παίκτες

Πριν δώσω ακριβείς ορισμούς για τις τέσσερις αυτές συνιστώσες, θα δώσω ένα παράδειγμα που τις παρουσιάζει άτυπα.

◆ **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1** (Παίγνιο εισβολής) Ο κάτοχος μιας θέσης αντιμετωπίζει την πιθανότητα εισβολής από ένα διεκδικητή. (Ο διεκδικητής μπορεί, για παράδειγμα, να είναι μια εταιρεία που σκέφτεται να μπει σε μια αγορά που τη δεδομένη στιγμή κυριαρχείται από ένα μονοπώλιο, ένας πολιτικός που ανταγωνίζεται για την ηγεσία ενός κόμματος, ή ένα ζώο που ανταγωνίζεται για το δικαίωμα του ζευγαρώματος με τα θηλυκά ζώα.) Ο διεκδικητής μπορεί είτε να κάνει την εισβολή είτε όχι. Αν κάνει την εισβολή, ο κάτοχος της θέσης μπορεί είτε να αποσυρθεί είτε να πολεμήσει.

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε αυτή την κατάσταση ως εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση στο οποίο τα τερματικά ιστορικά είναι οι (*Εντός, Απόσυρση*), (*Εντός, Μάχη*), και *Εκτός*, και η συνάρτηση παίκτη αντιστοιχίζει την κίνηση στο διεκδικητή στην αρχή του αγώνα και στον κάτοχο της θέσης στο ιστορικό *Εντός*.

Στην αρχή ενός εκτεταμένου παιγνίου, καθώς και μετά από οποιαδήποτε ακολουθία συμβάντων, ο παίκτης επιλέγει μια ενέργεια. Τα σύνολα ενεργειών που είναι στη διάθεση των παικτών δεν δίνονται όμως ρητά από την περιγραφή του παιγνίου. Αντίθετα, η περιγραφή του παιγνίου προσδιορίζει το σύ-

νολο των τερματικών ιστορικών και τη συνάρτηση παίκτη, από τα οποία μπορούμε να συμπεράνουμε τα διαθέσιμα σύνολα ενεργειών.

Για παράδειγμα, στο παίγνιο εισβολής οι ενέργειες που έχει στη διάθεσή του ο διεκδικητής στην αρχή του παιγνίου είναι οι *Εντός* και *Εκτός*, επειδή αυτές οι ενέργειες (και καμία άλλη) ξεκινούν τερματικά ιστορικά, και οι ενέργειες που έχει στη διάθεσή του ο κάτοχος της θέσης είναι οι *Απόσυρση* και *Μάχη*, επειδή αυτές οι ενέργειες (και καμία άλλη) ακολουθούν την ενέργεια *Εντός* στα τερματικά ιστορικά. Γενικότερα, υποθέστε ότι οι (C, D) και (C, E) είναι τερματικά ιστορικά και ότι η συνάρτηση παίκτη αντιστοιχίζει τον παίκτη 1 στην αρχή του παιγνίου και τον παίκτη 2 στο ιστορικό C . Τότε δύο από τις ενέργειες που έχει στη διάθεσή του ο παίκτης 2 αφού ο παίκτης 1 επιλέξει στην αρχή του παιγνίου την ενέργεια C είναι οι D και E .

Τα τερματικά ιστορικά ενός παιγνίου προσδιορίζονται ως σύνολα ακολουθιών. Δεν αποτελεί όμως κάθε σύνολο ακολουθιών έγκυρο σύνολο τερματικής ιστορίας. Για παράδειγμα, αν το (C, D) είναι ένα τερματικό ιστορικό, δεν έχει νόημα να προσδιορίσουμε το C ως τερματικό ιστορικό: το γεγονός ότι το (C, D) είναι τερματικό ιστορικό υπονοεί ότι μετά την επιλογή της ενέργειας C στην αρχή του παιγνίου κάποιος παίκτης μπορεί να επιλέξει την ενέργεια D , και έτσι η ενέργεια C δεν τερματίζει το παίγνιο. Γενικότερα, μια ακολουθία που είναι *γνήσιο υποϊστορικό* ενός τερματικού ιστορικού δεν μπορεί και το ίδιο να είναι τερματικό ιστορικό. Αυτός ο περιορισμός είναι ο μόνος που χρειάζεται να θέσουμε ως προς τα σύνολα ακολουθιών προκειμένου τα σύνολα αυτά να μπορούν να ερμηνευτούν ως σύνολα τερματικών ιστορικών.

Για να διατυπώσουμε με ακρίβεια αυτόν τον περιορισμό, ορίζουμε ότι τα **υποϊστορικά** (subhistories) μιας πεπερασμένης ακολουθίας ενεργειών $(a^1, a^2, \dots, a^k)$ είναι η κενή ακολουθία που δεν αποτελείται από καθόλου ενέργειες, την οποία συμβολίζουμε με το $\emptyset$ (το **κενό ιστορικό**, που αναπαριστάνει την αρχή του παιγνίου), και όλες οι ακολουθίες της μορφής $(a^1, a^2, \dots, a^m)$, όπου $1 \leq m \leq k$. (Ειδικότερα, η πλήρης ακολουθία είναι και αυτή υποϊστορικό.) Παρομοίως, ορίζουμε ότι τα **υποϊστορικά** μιας μη πεπερασμένης ακολουθίας ενεργειών $(a^1, a^2, \dots)$ είναι η κενή ακολουθία $\emptyset$, κάθε υποακολουθία της μορφής $(a^1, a^2, \dots, a^m)$, όπου m είναι θετικός ακέραιος, και η πλήρης ακολουθία $(a^1, a^2, \dots)$. Ένα υποϊστορικό που δεν είναι ίσο με την πλήρη ακολουθία ονομάζεται **γνήσιο υποϊστορικό** (proper subhistory). Μια ακολουθία ενεργειών που αποτελεί υποϊστορικό κάποιου τερματικού ιστορικού ονομάζεται απλώς **ιστορικό** (history).

Στο παίγνιο εισβολής του Παραδείγματος 5.1, τα υποϊστορικά για το τερματικό ιστορικό (*Εντός*, *Απόσυρση*) είναι το κενό ιστορικό $\emptyset$ και οι ακολουθίες *Εντός* και (*Εντός*, *Απόσυρση*): τα γνήσια υποϊστορικά είναι το κενό ιστορικό και η ακολουθία *Εντός*.

► ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1 (Εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση) Ένα **εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση** αποτελείται από

- ένα σύνολο **παικτών**
- ένα σύνολο ακολουθιών (**τερματικά ιστορικά**) με την ιδιότητα ότι καμία ακολουθία δεν αποτελεί γνήσιο υποϊστορικό οποιασδήποτε άλλης ακολουθίας
- μια συνάρτηση (τη **συνάρτηση παίκτη**) η οποία αντιστοιχίζει έναν παίκτη σε κάθε ακολουθία που αποτελεί γνήσιο υποϊστορικό κάποιου τερματικού ιστορικού.
- για κάθε παίκτη, **προτιμήσεις** ως προς το σύνολο των τερματικών ιστορικών.

Το σύνολο των τερματικών ιστορικών είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών ενεργειών που μπορεί να προκύψουν· ο παίκτης που αντιστοιχίζεται από τη συνάρτηση παίκτη σε οποιοδήποτε ιστορικά h είναι ο παίκτης που εκτελεί μια ενέργεια μετά το h .

Όπως και στα στρατηγικά παίγνια, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις προτιμήσεις των παικτών δίνοντας μια *συνάρτηση απολαβής* (payoff function) που τις αναπαριστά (δείτε την Ενότητα 1.2.2). Σε κάποιες περιπτώσεις συσχετίζεται ένα αποτέλεσμα με κάθε τερματικό ιστορικό, και οι προτιμήσεις των παικτών ορίζονται φυσικά ως προς αυτά τα αποτελέσματα, αντί να ορίζονται άμεσα ως προς τα τερματικά ιστορικά. Για παράδειγμα, αν μοντελοποιούμε εταιρείες που επιλέγουν τιμές, τότε το σκεπτικό μας μπορεί να είναι ότι η κάθε εταιρεία ενδιαφέρεται σχετικά με το κέρδος της — το αποτέλεσμα ενός προφίλ τιμών — αντί να ενδιαφέρεται άμεσα για το προφίλ τιμών. Παρόλα αυτά, οι όποιες προτιμήσεις ως προς τα αποτελέσματα (δηλαδή τα κέρδη) μπορούν να μεταφραστούν άμεσα σε προτιμήσεις ως προς τερματικά ιστορικά (δηλαδή ακολουθίες τιμών). Στο γενικό ορισμό, τα αποτελέσματα προσδιορίζονται με βολικό τρόπο με τα τερματικά ιστορικά και οι προτιμήσεις ορίζονται ως προς αυτές τα ιστορικά, γεγονός που καταργεί την ανάγκη για ένα πρόσθετο στοιχείο στις προδιαγραφές του παιγνίου.

◆ Παράδειγμα 5.2 (Παίγνιο εισβολής) Στην περίπτωση που περιγράφεται στο Παράδειγμα 5.1, υποθέστε ότι το καλύτερο αποτέλεσμα για το διεκδικητή είναι να πραγματοποιήσει εισβολή και ο κάτοχος της θέσης να αποσυρθεί και το χειρότερο αποτέλεσμα είναι να πραγματοποιήσει εισβολή και ο κάτοχος της θέσης να πολεμήσει· ενώ το καλύτερο αποτέλεσμα για τον κάτοχο της θέσης είναι να μην πραγματοποιήσει εισβολή ο διεκδικητής και το χειρότερο αποτέλεσμα είναι να πραγματοποιήσει εισβολή και να υπάρξει μάχη. Τότε η

περίσταση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως το ακόλουθο εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση.

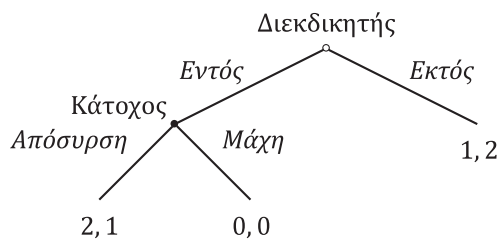
Παίκτες Ο διεκδικητής και ο κάτοχος της θέσης.

Τερματικές ιστορίες (Εντός, Απόσυρση), (Εντός, Μάχη), και Εκτός.

Συνάρτηση παίκτη $P(\emptyset) = \text{Διεκδικητής}$ και $P(\text{Εντός}) = \text{Κάτοχος}$.

Προτιμήσεις Οι προτιμήσεις του διεκδικητή αναπαριστούνται από τη συνάρτηση απολαβής u_1 για την οποία $u_1(\text{Εντός, Απόσυρση}) = 2$, $u_1(\text{Εκτός}) = 1$, και $u_1(\text{Εντός, Μάχη}) = 0$, ενώ οι προτιμήσεις του κατόχου της θέσης αναπαριστούνται από τη συνάρτηση απολαβής u_2 για την οποία $u_2(\text{Εκτός}) = 2$, $u_2(\text{Εντός, Απόσυρση}) = 1$, και $u_2(\text{Εντός, Μάχη}) = 0$.

Αυτό το παίγνιο μπορεί εύκολα να απεικονιστεί με ένα διάγραμμα. Ο μικρός κύκλος στην κορυφή της Εικόνας 5.1 αναπαριστάνει το κενό ιστορικό (την αρχή του παιγνίου). Η ετικέτα πάνω από τον κύκλο δείχνει ότι στην αρχή του παιγνίου ο διεκδικητής επιλέγει μια ενέργεια ($P(\emptyset) = \text{Διεκδικητής}$). Οι δύο διακλαδώσεις με ετικέτες *Εντός* και *Εκτός* αναπαριστούν τις επιλογές του διεκδικητή. Η διακλάδωση *Εντός* οδηγεί σε μια μικρή κουκκίδα, της οποίας η ετικέτα δείχνει ότι μετά το ιστορικό *Εντός* ο κάτοχος της θέσης αναλαμβάνει μια ενέργεια (δηλαδή, $P(\text{Εντός}) = \text{Κάτοχος}$). Οι δύο κλάδοι που ξεκινούν από την κουκκίδα αναπαριστούν τις επιλογές του κατόχου, *Απόσυρση* και *Μάχη*. Το ζευγάρι αριθμών κάτω από κάθε τερματικό ιστορικό δίνει τις απολαβές των παικτών για το ιστορικό αυτό, με πρώτη την απολαβή για το διεκδικητή. (Οι απολαβές των παικτών μπορεί να δίνονται με οποιαδήποτε σειρά. Για παίγνια όπως αυτό, όπου οι παίκτες εκτελούν τις κινήσεις με μια καλά καθορισμένη σειρά, γενικά θα παραθέτω τις απολαβές με τη σειρά αυτή. Για παίγνια στα οποία τα ονόματα των παικτών είναι 1, 2, 3, κ.ο.κ θα παραθέτω τις απολαβές με τη σειρά των ονομάτων των παικτών.)



Εικόνα 5.1 Το παίγνιο εισβολής του Παραδείγματος 5.2. Η απολαβή του διεκδικητή είναι ο πρώτος από τους αριθμούς κάθε ζεύγους.

Ο Ορισμός 5.1 δεν προσδιορίζει άμεσα τα σύνολα ενεργειών που έχουν στη διάθεσή τους οι παίκτες κατά τις διάφορες κινήσεις τους. Όπως αναφέραμε σε συντομία πριν από τον ορισμό, μπορούμε να συμπεράνουμε αυτά τα σύνολα με βάση τα σύνολα τερματικών ιστορικών και τη συνάρτηση παίκτη. Αν, για κάποιο μη τερματικό ιστορικό h , αποτελεί ιστορικό το (h, a) , τότε το a είναι μία από τις ενέργειες που έχει στη διάθεσή του ο παίκτης που έχει την κίνηση μετά το ιστορικό h . Επομένως το σύνολο όλων των ενεργειών που έχει στη διάθεσή του ο παίκτης που έχει την κίνηση μετά το ιστορικό h είναι το

$$A(h) = \{a: (h, a) \text{ είναι ιστορικό} \}. \quad (5.1)$$

Για παράδειγμα, στο παίγνιο της Εικόνας 5.1 τα ιστορικά είναι τα $\emptyset$, (*Εντός*), (*Εκτός*), (*Εντός*, *Απόσυρση*), και (*Εντός*, *Μάχη*). Επομένως το σύνολο των ενεργειών το οποίο έχει στη διάθεσή του ο παίκτης που έχει την κίνηση στην αρχή του παιγνίου, δηλαδή ο διεκδικητής, είναι το $A(\emptyset) = \{\text{Εντός}, \text{Εκτός}\}$, και το σύνολο των ενεργειών το οποίο έχει στη διάθεσή του ο παίκτης που έχει την κίνηση μετά το ιστορικό *Εντός*, δηλαδή ο κάτοχος, είναι το $A(\text{Εντός}) = \{\text{Απόσυρση}, \text{Μάχη}\}$.

• **ΑΣΚΗΣΗ 5.1** (Παραδείγματα εκτεταμένων παιγνίων με τέλεια πληροφόρηση)

- α. Αναπαραστήστε σε ένα διάγραμμα όπως αυτό της Εικόνας 5.1 το εκτεταμένο παίγνιο δύο παικτών με τέλεια πληροφόρηση στο οποίο τα τερματικά ιστορικά είναι τα (C, E) , (C, F) , (D, G) , και (D, H) , η συνάρτηση παίκτη είναι η $P(\emptyset) = 1$ και $P((C)) = P((D)) = 2$, ο παίκτης 1 προτιμά το αποτέλεσμα (C, F) από το (D, G) από το (C, E) από το (D, H) , και ο παίκτης 2 προτιμά το αποτέλεσμα (D, G) από το (C, F) από το (D, H) από το (C, E) .
- β. Γράψτε το σύνολο των παικτών, το σύνολο των τερματικών ιστορικών, τη συνάρτηση παίκτη, και τις προτιμήσεις των παικτών για το παίγνιο της Εικόνας 5.4.
- γ. Οι πολιτικοί Ρόζα και Ερρίκος πρέπει να επιλέξουν είτε το Βερολίνο (B) είτε την Αβάνα (A) ως τοποθεσία για το συνέδριο του κόμματος. Κάβουν την επιλογή τους ακολουθιακά. Ένα τρίτο άτομο, ο Κάρολος, προσδιορίζει ποιος κάνει την πρώτη κίνηση. Και η Ρόζα και ο Ερρίκος ενδιαφέρονται μόνο για τις ενέργειες που επιλέγουν, και όχι για το ποιος επιλέγει πρώτος. Η Ρόζα προτιμά το αποτέλεσμα όπου τόσο αυτή όσο και ο Ερρίκος επιλέγουν B από το αποτέλεσμα στο οποίο επιλέγουν και οι δύο A , και προτιμά αυτό το αποτέλεσμα σε σχέση με οποιοδήποτε από τα δύο αποτελέσματα στα οποία αυτή και ο Ερρίκος επιλέγουν διαφορετικές ενέργειες· είναι όμως αδιάφορη μεταξύ των δύο αυτών τελευταίων αποτελεσμάτων. Οι προτιμήσεις του Ερρίκου διαφέρουν

από εκείνες της Ρόζας στο ότι οι ρόλοι των B και A είναι αντίστροφοι. Οι προτιμήσεις του Καρόλου είναι ίδιες με εκείνες του Ερρίκου. Μοντελοποιήστε την περίσταση αυτή ως εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση. Προσδιορίστε τις συνιστώσες του παιγνίου και αναπαραστήστε το παίγνιο σε διάγραμμα.

Ο Ορισμός 5.1 επιτρέπει να έχουν απροσδιόριστα μεγάλο μήκος τα τερματικά ιστορικά. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του εκτεταμένου παιγνίου για να μελετήσουμε περιστάσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες δεν εξετάζουν κάποιο συγκεκριμένο σταθερό ορίζοντα κατά τη λήψη των αποφάσεών τους. Αν το μήκος του μεγαλύτερου τερματικού ιστορικού είναι στην πραγματικότητα πεπερασμένο, τότε λέμε ότι το παίγνιο έχει **πεπερασμένο ορίζοντα** (finite horizon).

Ακόμα και ένα παίγνιο με πεπερασμένο ορίζοντα μπορεί να έχει απείρως πολλά τερματικά ιστορικά, επειδή κάποιος παίκτης έχει στη διάθεσή του απείρως πολλές ενέργειες μετά από κάποιο ιστορικό. Αν το παίγνιο έχει και πεπερασμένο ορίζοντα και πεπερασμένο πλήθος τερματικών ιστορικών, τότε λέμε ότι είναι **πεπερασμένο**. Σημειώστε ότι ένα παίγνιο που δεν είναι πεπερασμένο δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα διάγραμμα όπως αυτό της Εικόνας 5.1, επειδή μια τέτοια εικόνα επιτρέπει μόνο πεπερασμένο πλήθος διακλαδώσεων.

Ένα εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση μοντελοποιεί μια περίσταση στην οποία ο κάθε παίκτης, κατά την επιλογή μιας ενέργειας, γνωρίζει όλες τις ενέργειες που έχουν επιλεγεί προηγουμένως (έχει *τέλεια πληροφόρηση*) και πάντα κάνει την κίνηση μόνος του (και όχι ταυτόχρονα με τους άλλους παίκτες). Στο επόμενο κεφάλαιο αναλύονται κάποιες περιστάσεις από την οικονομία και την πολιτική που καλύπτονται από αυτό το μοντέλο. Ένα παράδειγμα είναι ο ανταγωνισμός των ομάδων επιρροής για την προσέλκυση των μελών του νομοθετικού σώματος. Η περίσταση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εκτεταμένο παίγνιο στο οποίο οι ομάδες προσφέρουν ακολουθιακά πληρωμές για να προσελκύσουν τους νομοθέτες να ψηφίσουν υπέρ της προτιμώμενης τους εκδοχής για ένα νομοσχέδιο (Ενότητα 6.3). Ένα άλλο παράδειγμα είναι ο ανταγωνισμός (για παράδειγμα, μεταξύ εταιρειών που αναπτύσσουν νέες τεχνολογίες, ή μεταξύ σκηνοθετών που ετοιμάζουν ανταγωνιζόμενες ταινίες). Η περίσταση αυτή μοντελοποιείται ως εκτεταμένο παίγνιο στο οποίο τα ανταγωνιζόμενα μέρη επιλέγουν εναλλάξ πόση προσπάθεια θα αφιερώσουν (Ενότητα 6.4). Τα επιτραπέζια παιχνίδια, όπως το σκάκι, η τρίλιζα, και το go, στα οποία δεν υπάρχουν τυχαία συμβάντα, οι παίκτες κάνουν κινήσεις διαδοχικά, και ο κάθε παίκτης γνωρίζει πάντα όλες τις ενέργειες που έχουν πραγματοποιηθεί προηγουμένως, μπορούν επίσης να μοντελοποιηθούν

ως εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση (δείτε το ειδικό πλαίσιο της σελίδας 178???)

Στην Ενότητα 7.1 θα αναλύσω μια πιο γενική έννοια εκτεταμένου παιγνίου στο οποίο οι παίκτες μπορούν να κάνουν ταυτόχρονα κινήσεις, αν και ο κάθε παίκτης κατά την επιλογή της ενέργειάς του γνωρίζει και πάλι όλες τις προηγούμενες ενέργειες. Στο Κεφάλαιο 10 θα δούμε μια πολύ πιο γενική έννοια παιγνίου που επιτρέπει αυθαίρετα μοτίβα πληροφόρησης. Σε κάθε περίπτωση κάποιες φορές θα αναφέρω απλώς ως “εκτεταμένο παίγνιο” το εξεταζόμενο αντικείμενο.

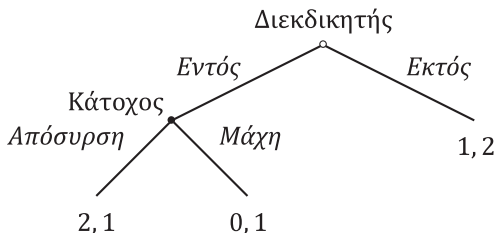
5.1.2 Λύσεις

Στο παίγνιο εισβολής της Εικόνας 5.1 φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο διεκδικητής θα εισβάλει και στη συνέχεια ο κάτοχος της θέσης θα αποσυρθεί. Ο διεκδικητής μπορεί να σκεφτεί ότι αν εισβάλει τότε ο κάτοχος της θέσης θα αποσυρθεί, αφού αυτό είναι καλύτερο για τον κάτοχο της θέσης από το να δώσει μάχη. Με δεδομένο ότι ο κάτοχος της θέσης θα αντιδράσει με αυτόν τον τρόπο στην εισβολή, ο διεκδικητής θα έχει καλύτερο αποτέλεσμα με το να εισβάλει.

Αυτή η μορφή επιχειρήματος ονομάζεται *αντίστροφη επαγωγή* (backward induction). Όταν ένας παίκτης έχει την κίνηση, συμπεραίνει, για καθεμία από τις δυνατές ενέργειές του, τις ενέργειες τις οποίες οι παίκτες (συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου) θα πραγματοποιήσουν ορθολογικά στη συνέχεια, και επιλέγει την ενέργεια που επιφέρει το τερματικό ιστορικό που προτιμά περισσότερο.

Αν και η αντίστροφη επαγωγή μπορεί να εφαρμοστεί στο παίγνιο της Εικόνας 5.1, δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση. Εξετάστε, για παράδειγμα, την παραλλαγή του παιγνίου που φαίνεται στην Εικόνα 5.2, όπου η απολαβή του κατόχου της θέσης για το τερματικό ιστορικό (*Εντός, Μάχη*) είναι 1 αντί για 0. Αν, στο τροποποιημένο παίγνιο, ο διεκδικητής πραγματοποιήσει την εισβολή, ο κάτοχος θα είναι αδιάφορος μεταξύ της απόσυρσης και της μάχης. Η αντίστροφη επαγωγή δεν λέει στο διεκδικητή τι θα κάνει σε αυτή την περίπτωση ο κάτοχος της θέσης, και έτσι αφήνει ανοιχτό το ερώτημα σχετικά με την ενέργεια την οποία θα πρέπει να επιλέξει ο διεκδικητής. Τα παίγνια με απείρως μεγάλα ιστορικά παρουσιάζουν μια άλλη δυσκολία ως προς την αντίστροφη επαγωγή: δεν έχουν κάποιο τέλος από το οποίο να ξεκινήσει κανείς την επαγωγή. Η γενίκευση του εκτεταμένου παιγνίου με τέλεια πληροφόρηση που επιτρέπει τις ταυτόχρονες κινήσεις (όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 7) δημιουργεί ένα ακόμα πρόβλημα: όταν οι παίκτες κάνουν ταυτόχρονα κινήσεις δεν μπορούμε γενικά να συμπεράνουμε με άμεσο τρόπο τη βέλτιστη ενέργεια για κάθε παίκτη. (Όπως και στα στρατηγι-

κά παίγνια, η βέλτιστη ενέργεια του κάθε παίκτη εξαρτάται από τις ενέργειες των άλλων παικτών.)



Εικόνα 5.2 Μια παραλλαγή του παιγνίου εισβολής της Εικόνας 5.1. Η απολαβή του διεκδικητή είναι ο πρώτος από τους αριθμούς κάθε ζευγαριού.

Μια άλλη προσέγγιση για τον ορισμό της ισορροπίας προέρχεται από την έννοια της ισορροπίας Nash. Η προσέγγιση αυτή προσπαθεί να μοντελοποιήσει μοτίβα συμπεριφοράς που μπορούν να διαρκέσουν σε μια σταθερή κατάσταση. Η έννοια της ισορροπίας που προκύπτει εφαρμόζεται σε όλα τα εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση. Επειδή η έννοια της αντίστροφης επαγωγής είναι πιο περιορισμένη, και επειδή οι αρχές της ισορροπίας Nash έχουν μελετηθεί στα προηγούμενα κεφάλαια, θα ξεκινήσω με τη μελέτη αυτής της βασισμένης σε σταθερή κατάσταση προσέγγισης. Στα παίγνια στα οποία είναι καλώς ορισμένη η αντίστροφη επαγωγή η προσέγγιση αυτή αποδεικνύεται ότι οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με την αντίστροφη επαγωγή, και έτσι δεν υπάρχει σύγκρουση μεταξύ των δύο ιδεών.

5.2 Στρατηγικές και αποτελέσματα

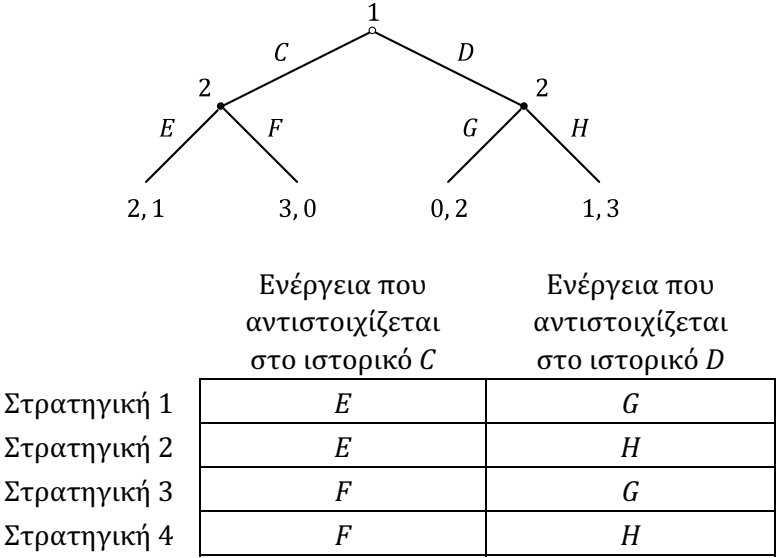
5.2.1 Στρατηγικές

Μια βασική έννοια στη μελέτη των εκτεταμένων παιγνίων είναι η έννοια της *στρατηγικής* (strategy). Η στρατηγική του παίκτη προσδιορίζει την ενέργεια που θα επιλέξει ο παίκτης για *κάθε* ιστορικό μετά από το οποίο είναι η σειρά του να κάνει κίνηση.

► **ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2 (Στρατηγική)** Η **στρατηγική** για τον παίκτη i σε ένα εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε ιστορικό h μετά από το οποίο είναι η σειρά του παίκτη i να κάνει κίνηση (δηλαδή $P(h) = i$, όπου P είναι η συνάρτηση παίκτη) μια ενέργεια του συνόλου $A(h)$ (που είναι το σύνολο των διαθέσιμων ενεργειών μετά το ιστορικό h).

Εξετάστε το παίγνιο που φαίνεται στο πάνω μέρος της Εικόνας 5.3.

- Ο παίκτης 1 κάνει κίνηση στην αρχή του παιγνίου (δηλαδή μετά το κενό ιστορικό), και οι ενέργειες που έχει στη διάθεσή του είναι οι C και D . Επομένως διαθέτει μόνο δύο στρατηγικές: μία που αντιστοιχίζει την ενέργεια C στο κενό ιστορικό, και μία που αντιστοιχίζει την ενέργεια D στο κενό ιστορικό.
- Ο παίκτης 2 έχει την κίνηση τόσο μετά από το ιστορικό C όσο και μετά το ιστορικό D . Μετά από το ιστορικό C οι ενέργειες που έχει στη διάθεσή του είναι οι E και F , ενώ μετά το ιστορικό D οι ενέργειες που έχει στη διάθεσή του είναι οι G και H . Επομένως η στρατηγική για τον παίκτη 2 είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει είτε την ενέργεια E είτε την ενέργεια F στο ιστορικό C , και είτε την ενέργεια G είτε την ενέργεια H στο ιστορικό D . Αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης 2 διαθέτει τέσσερις στρατηγικές, οι οποίες φαίνονται στο κάτω μέρος της Εικόνας 5.3.



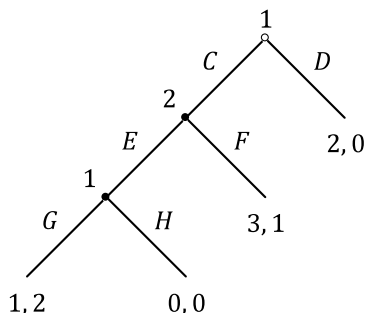
Εικόνα 5.3 Ένα εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση (πάνω τμήμα) και οι τέσσερις στρατηγικές του παίκτη 2 σε αυτό το παίγνιο (κάτω τμήμα).

Θα αναφέρομαι στις στρατηγικές του παίκτη 1 απλώς ως C και D , και στις στρατηγικές του παίκτη 2 απλώς ως EG , EH , FG , και FH . Σε πολλά άλλα πεπερασμένα παίγνια θα χρησιμοποιώ παρόμοια συντομογραφία: θα γράφω τη στρατηγική του παίκτη ως μια λίστα ενεργειών, με μία ενέργεια για κάθε ιστορικό μετά από το οποίο είναι η σειρά του παίκτη να κάνει κίνηση. Γενικά θα γράφω τις ενέργειες με τη σειρά με την οποία προκύπτουν στο παίγνιο και,

αν είναι διαθέσιμες στο ίδιο “στάδιο”, θα τις γράφω από αριστερά προς τα δεξιά με τη σειρά με την οποία φαίνονται στο διάγραμμα του παιγνίου. Όταν το νόημα μιας λίστας ενεργειών είναι ασαφές, θα αναφέρω ρητά το ιστορικό μετά από το οποίο πραγματοποιείται η κάθε ενέργεια.

Η καθεμία από τις στρατηγικές του παίκτη 2 για το παίγνιο που φαίνεται στο πάνω μέρος της Εικόνας 5.3 μπορεί να ερμηνευτεί ως πλάνο ενεργειών ή πλάνο ενδεχομένων (contingency plan): προσδιορίζει τι θα κάνει ο παίκτης 2 αν ο παίκτης 1 επιλέξει C , καθώς και τι θα κάνει αν ο παίκτης 1 επιλέξει D . Σε κάθε παίγνιο, η στρατηγική του παίκτη παρέχει επαρκείς πληροφορίες για να προσδιορίσουμε το πλάνο των ενεργειών του: τις ενέργειες που σκοπεύει να κάνει, *ότι* και να κάνουν οι άλλοι παίκτες. Πιο συγκεκριμένα, αν ο παίκτης υποδείξει έναν πράκτορα ο οποίος θα παίξει το παίγνιο για λογαριασμό του και πει στον πράκτορα τη στρατηγική του, τότε ο πράκτορας θα διαθέτει επαρκείς πληροφορίες για να εκτελέσει τις επιθυμίες του παίκτη *όποιες* ενέργειες και να κάνουν οι άλλοι παίκτες.

Σε κάποια παίγνια οι στρατηγικές κάποιων παικτών είναι *κάτι περισσότερο* από απλά πλάνα ενεργειών. Εξετάστε το παίγνιο της Εικόνας 5.4. Ο παίκτης 1 έχει την κίνηση τόσο στην αρχή του παιγνίου, όσο και μετά το ιστορικό (C, E) . Στην καθεμία από τις περιπτώσεις έχει στη διάθεσή του δύο ενέργειες, έτσι διαθέτει *τέσσερις* στρατηγικές: CG (δηλαδή C στην αρχή του παιγνίου και G μετά το ιστορικό (C, E)), CH , DG , και DH . Ειδικότερα, η κάθε στρατηγική προσδιορίζει μια ενέργεια μετά από το ιστορικό (C, E) *ακόμα και αν προσδιορίζει την ενέργεια D στην αρχή του παιγνίου*, οπότε το ιστορικό (C, E) δεν μπορεί να προκύψει! Το ζήτημα είναι ότι ο Ορισμός 5.2 απαιτεί ότι η στρατηγική οποιουδήποτε παίκτη i προσδιορίζει μια ενέργεια για *κάθε* ιστορικό μετά από το οποίο είναι η σειρά του παίκτη i να κάνει κίνηση, *ακόμα και για ιστορικά τα οποία, αν ακολουθηθεί η στρατηγική, δεν θα προκύψουν*.



Εικόνα 5.4 Ένα εκτεταμένο παίγνιο στο οποίο ο παίκτης 1 κάνει κίνηση τόσο πριν όσο και μετά τον παίκτη 2.

Εν όψει αυτού του σημείου και του γεγονότος ότι η λέξη “στρατηγική” είναι συνώνυμη στην καθομιλούμενη γλώσσα του “πλάνου ενεργειών”, μπορεί να θεωρείτε ότι η λέξη “στρατηγική” είναι ακατάλληλη για την έννοια του Ορισμού 5.2. Έχετε δίκιο. Μπορεί επίσης να αναρωτιέστε γιατί δεν μπορούμε να περιορίσουμε την προσοχή μας μόνο στα πλάνα ενεργειών.

Για τους σκοπούς της έννοιας της ισορροπίας Nash (που θα αναλύσουμε στην επόμενη ενότητα), *θα μπορούσαμε* στην πραγματικότητα να δουλέψουμε με πλάνα ενεργειών αντί για στρατηγικές. Όπως όμως θα δούμε, η έννοια της ισορροπίας Nash για ένα εκτεταμένο παίγνιο δεν είναι ικανοποιητική: η αντίληψη που υιοθετούμε εξαρτάται από τις πλήρεις στρατηγικές των παικτών. Όταν θα αναλύσουμε αυτή την αντίληψη (στην Ενότητα 5.4.4) θα εξηγήσω λεπτομερέστερα την ερμηνεία της στρατηγικής. Προς το παρόν, μπορείτε να σκέφτεστε τη στρατηγική του παίκτη ως ένα πλάνο για το τι θα κάνει ό,τι κι αν κάνουν οι άλλοι παίκτες, τόσο αν ο παίκτης εκτελέσει τις επιδιωκόμενες ενέργειές του όσο και αν κάνει λάθη. Για παράδειγμα, μπορούμε να ερμηνεύσουμε ότι η στρατηγική DG του παίκτη 1 στο παίγνιο της Εικόνας 5.4 σημαίνει “σκοπεύω να επιλέξω D , αν όμως κάνω το λάθος και επιλέξω C τότε στη συνέχεια θα επιλέξω G ”. (Αφού η έννοια της ισορροπίας Nash εξαρτάται μόνο από πλάνα ενεργειών, θα μπορούσα να είχα αναβάλει τον ορισμό της στρατηγικής μέχρι την Ενότητα 5.4. Δεν το έκανα επειδή η έννοια της στρατηγικής έχει κεντρική θέση στη μελέτη των εκτεταμένων παιγνίων, και ο ακριβής ορισμός της είναι πολύ απλούστερος από εκείνον για το πλάνο ενεργειών.)

❖ **ΑΣΚΗΣΗ 5.2** (Στρατηγικές σε εκτεταμένα παίγνια) Ποιες είναι οι στρατηγικές των παικτών στο παίγνιο εισβολής (Παράδειγμα 5.2); Ποιες είναι οι στρατηγικές της Ρόζα στο παίγνιο της Άσκησης 5.1γ;

5.2.2 Αποτελέσματα

Ένα προφίλ στρατηγικών προσδιορίζει το τερματικό ιστορικό που προκύπτει. Ας συμβολίσουμε το προφίλ στρατηγικών με το s και τη συνάρτηση παίκτη με το P . Στην αρχή του παιγνίου έχει την κίνηση ο παίκτης $P(\emptyset)$. Η στρατηγική του είναι η $s_{P(\emptyset)}$, και επιλέγει την ενέργεια $s_{P(\emptyset)}(\emptyset)$. Ας συμβολίσουμε την ενέργεια αυτή με το a^1 . Αν το ιστορικό a^1 δεν είναι τερματικό, στη συνέχεια έχει την κίνηση ο παίκτης $P(a^1)$. Η στρατηγική του είναι η $s_{P(a^1)}$ και επιλέγει την ενέργεια $s_{P(a^1)}(a^1)$. Ας συμβολίσουμε αυτή την ενέργεια με το a^2 . Αν το ιστορικό (a^1, a^2) δεν είναι τερματικό, τότε και πάλι η συνάρτηση παίκτη προσδιορίζει ποιος παίκτης έχει σειρά να κάνει κίνηση και η στρατηγική αυτού του παίκτη προσδιορίζει την ενέργεια που επιλέγει. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι

να κατασκευαστεί ένα τερματικό ιστορικό. Θα αναφέρουμε αυτό το τερματικό ιστορικό ως **αποτέλεσμα του s** , και θα το συμβολίζουμε με $O(s)$.

Για παράδειγμα, στο παίγνιο της Εικόνας 5.4 το αποτέλεσμα του ζευγαριού στρατηγικών (DG, E) είναι το τερματικό ιστορικό D , ενώ το αποτέλεσμα του ζευγαριού στρατηγικών (CH, E) είναι το τερματικό ιστορικό (C, E, H) .

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα $O(s)$ του προφίλ στρατηγικών s εξαρτάται μόνο από τα πλάνα ενεργειών των παικτών, και όχι από τις πλήρεις στρατηγικές τους. Αυτό σημαίνει ότι για να προσδιορίσουμε το $O(s)$ δεν χρειάζεται να αναφερθούμε σε καμία συνιστώσα οποιασδήποτε στρατηγικής παίκτη που να προσδιορίζει ενέργειες του παίκτη αυτού μετά από ιστορικά τα οποία αποκλείονται με βάση αυτή τη στρατηγική.

5.3 Ισορροπία Nash

Όπως και στα στρατηγικά παίγνια, ενδιαφερόμαστε για έννοιες ισορροπίας που μοντελοποιούν τη συμπεριφορά των παικτών σε μια σταθερή κατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι αναζητούμε μοτίβα συμπεριφορών που να έχουν την ιδιότητα ότι, αν ο κάθε παίκτης γνωρίζει τη συμπεριφορά κάθε άλλου παίκτη, δεν έχει λόγο να αλλάξει τη δική του συμπεριφορά. Θα ξεκινήσω με τον ορισμό μιας ισορροπίας Nash: ενός προφίλ στρατηγικών από το οποίο κανένας παίκτης δεν επιθυμεί να αποκλίνει, με δεδομένες τις στρατηγικές των άλλων παικτών. Ο ορισμός αποτελεί προσαρμογή του ορισμού της ισορροπίας Nash για ένα στρατηγικό παίγνιο (2.2).

► **ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3** (Ισορροπία Nash σε εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση) Το προφίλ στρατηγικών s^* σε ένα εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση αποτελεί **ισορροπία Nash** αν, για κάθε παίκτη i και κάθε στρατηγική r_i του παίκτη i , το τερματικό ιστορικό $O(s^*)$ που παράγεται από το s^* είναι τουλάχιστον εξίσου καλό σύμφωνα με τις προτιμήσεις του παίκτη i 's όπως και το τερματικό ιστορικό $O(r_i, s^*_{-i})$ που παράγεται από το προφίλ στρατηγικών (r_i, s^*_{-i}) στο οποίο ο παίκτης i επιλέγει τη στρατηγική r_i ενώ όλοι οι άλλοι παίκτες j επιλέγουν τη στρατηγική s_j^* . Ισοδύναμα, για κάθε παίκτη i ,

$$u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(r_i, s^*_{-i})) \text{ για κάθε στρατηγική } r_i \text{ του παίκτη } i,$$

όπου u_i είναι μια συνάρτηση απολαβής που αναπαριστάνει τις προτιμήσεις του παίκτη i και O είναι η συνάρτηση αποτελέσματος του παιγνίου.

Ένας τρόπος για να βρούμε τις ισορροπίες Nash σε ένα εκτεταμένο παίγνιο στο οποίο ο κάθε παίκτης έχει στη διάθεσή του πεπερασμένο πλήθος στρατηγικών είναι να παραθέσουμε την κάθε στρατηγική των παικτών, να βρούμε το αποτέλεσμα για κάθε προφίλ στρατηγικών, και να αναλύσουμε τις

πληροφορίες αυτές σαν να επρόκειτο για στρατηγικό παίγνιο. Με άλλα λόγια κατασκευάζουμε το ακόλουθο στρατηγικό παίγνιο, το οποίο είναι γνωστό ως **στρατηγική μορφή** (strategic form) του εκτεταμένου παιγνίου.

Παίκτες Το σύνολο παικτών του εκτεταμένου παιγνίου.

Ενέργειες Το σύνολο ενεργειών για κάθε παίκτη είναι το σύνολο των στρατηγικών του στο εκτεταμένο παίγνιο.

Προτιμήσεις Η απολαβή του κάθε παίκτη για κάθε προφίλ ενεργειών είναι η απολαβή του στο τερματικό ιστορικό που παράγεται από αυτό το προφίλ ενεργειών στο εκτεταμένο παίγνιο.

Από τον Ορισμό 5.3 βλέπουμε ότι

το σύνολο των ισορροπιών Nash για οποιοδήποτε στρατηγικό παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση είναι το σύνολο των στρατηγικών Nash για τη στρατηγική μορφή αυτού του παιγνίου.

◆ **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3** (Ισορροπίες Nash για το παίγνιο εισβολής) Στο παίγνιο εισβολής της Εικόνας 5.1, ο διεκδικητής έχει δύο διαθέσιμες στρατηγικές, *Εντός* και *Εκτός*, και ο κάτοχος της θέσεις έχει δύο στρατηγικές, *Απόσυρση* και *Μάχη*. Η στρατηγική μορφή του παιγνίου παρουσιάζεται στην Εικόνα 5.25. Βλέπουμε ότι το παίγνιο αυτό έχει δύο ισορροπίες Nash: (*Εντός*, *Απόσυρση*) και (*Εκτός*, *Μάχη*). Η πρώτη ισορροπία είναι το μοτίβο συμπεριφοράς που εντοπίζεται από την αντίστροφη επαγωγή, όπως αναλύσαμε στην αρχή της Ενότητας 5.1.2.

		Κάτοχος	
		<i>Απόσυρση</i>	<i>Μάχη</i>
Διεκδικητής	<i>Εντός</i>	2, 1	0, 0
	<i>Εκτός</i>	1, 2	1, 2

Εικόνα 5.5 Η στρατηγική μορφή για το παίγνιο εισβολής της Εικόνας 5.1.

Στη δεύτερη ισορροπία ο διεκδικητής επιλέγει πάντα *Εκτός*. Αυτή η στρατηγική είναι βέλτιστη με δεδομένη τη στρατηγική του κατόχου να προχωρήσει σε μάχη σε περίπτωση εισβολής. Επιπρόσθετα, η στρατηγική *Μάχη* του κατόχου είναι βέλτιστη με δεδομένη τη στρατηγική του διεκδικητή: ο διεκδικητής επιλέγει *Εκτός*, έτσι το αν ο κάτοχος της θέσης σκοπεύει να επιλέξει *Απόσυρση* ή *Μάχη* δεν κάνει καμία διαφορά ως προς την απολαβή του. Επομένως κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει την απολαβή του επιλέγοντας διαφορετική στρατηγική, με δεδομένη τη στρατηγική του άλλου παίκτη.

Αν σκεφτούμε σχετικά με το εκτεταμένο παίγνιο αυτού του παραδείγματος, προκαλείται ένα ερώτημα σχετικά με την ισορροπία Nash (*Εκτός, Μάχη*) το οποίο δεν προκύπτει στη στρατηγική μορφή του παιγνίου: Πώς γνωρίζει ο διεκδικητής ότι ο κάτοχος της θέσης θα επιλέξει *Μάχη* αν αυτός εισβάλει; Δίνουμε στο στρατηγικό παίγνιο την ερμηνεία ότι μοντελοποιεί μια περίπτωση στην οποία, όποτε ο διεκδικητής παίζει το παίγνιο, παρατηρεί την ενέργεια του κατόχου ακόμα και αν αυτός έχει επιλέξει την ενέργεια *Εκτός*. Σε αντιδιαστολή, δίνουμε στο εκτεταμένο παίγνιο την ερμηνεία ότι μοντελοποιεί μια περίπτωση στην οποία ο διεκδικητής που επιλέγει πάντα την ενέργεια *Εκτός* δεν παρατηρεί ποτέ την ενέργεια του κατόχου, επειδή ο κάτοχος δεν πραγματοποιεί ποτέ κίνηση. Σε ένα στρατηγικό παίγνιο, το σκεπτικό για τη συνθήκη της ισορροπίας Nash ότι η στρατηγική του κάθε παίκτη είναι βέλτιστη με δεδομένες τις στρατηγικές των άλλων παικτών είναι το ότι, σε μια σταθερή κατάσταση, η πείρα του κάθε παίκτη στο παίξιμο του παιγνίου τον κάνει να έχει σωστή πεποίθηση σχετικά με τις ενέργειες των άλλων παικτών. Αυτό το σκεπτικό δεν εφαρμόζεται στην ισορροπία Nash (*Εκτός, Μάχη*) του (εκτεταμένου) παιγνίου εισβολής, επειδή ο διεκδικητής που επιλέγει πάντα την ενέργεια *Εκτός* δεν παρατηρεί ποτέ την ενέργεια του κατόχου μετά το ιστορικό *Εντός*.

Μπορούμε να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία στην ερμηνεία της ισορροπίας Nash ενός εκτεταμένου παιγνίου εξετάζοντας μια ελαφρώς διαταραγμένη σταθερή κατάσταση στην οποία, σε σπάνιες περιπτώσεις, μπορούν να αναληφθούν ενέργειες εκτός της ισορροπίας (πιθανώς οι παίκτες να κάνουν λάθος ή να πειραματιστούν εσκεμμένα), και οι διαταραχές αυτές επιτρέπουν τελικά σε κάθε παίκτη να παρατηρήσει τις ενέργειες όλων των άλλων παικτών μετά από κάθε ιστορικό. Με δεδομένες αυτές τις διαταραχές, ο κάθε παίκτης μαθαίνει τελικά τις πλήρεις στρατηγικές των άλλων παικτών.

Αν όμως ερμηνεύσουμε την ισορροπία Nash (*Εκτός, Μάχη*) ως μια τέτοια διαταραγμένη σταθερή κατάσταση, συναντάμε ένα άλλο πρόβλημα. Σε αυτές τις (σπάνιες) περιπτώσεις όπου ο διεκδικητής εισβάλλει, η επακόλουθη συμπεριφορά του κατόχου της θέσης να προχωρήσει σε μάχη δεν είναι σταθερή κατάσταση για το υπόλοιπο του παιγνίου: αν ο διεκδικητής εισβάλει, ο κάτοχος της θέσης θα έχει μεγαλύτερη απολαβή με την απόσυρση παρά με τη μάχη. Με άλλα λόγια, η ισορροπία Nash (*Εκτός, Μάχη*) δεν αντιστοιχεί σε μια *εύρωστη* σταθερή κατάσταση για το εκτεταμένο παίγνιο.

Σημειώστε ότι το εκτεταμένο παίγνιο ενσωματώνει την παραδοχή ότι ο κάτοχος της θέσης δεν μπορεί να δεσμευτεί, κατά το ξεκίνημα του παιγνίου, ότι θα προχωρήσει σε μάχη αν ο διεκδικητής εισβάλει· σε αυτό το συμβάν θα είναι ελεύθερος να επιλέξει μεταξύ των ενεργειών *Απόσυρση* και *Μάχη*. Αν ο κάτοχος της θέσης *θα μπορούσε* να δεσμευτεί ότι θα προχωρήσει σε μάχη σε περίπτωση εισβολής, τότε η ανάλυση θα ήταν διαφορετική. Μια τέτοια δέ-

σμευση θα έκανε το διεκδικητή να μείνει μακριά, ένα αποτέλεσμα το οποίο προτιμά ο κάτοχος της θέσης. Με την απουσία της δυνατότητας να πραγματοποιήσει μια τέτοια δέσμευση ο κάτοχος της θέσης, μπορούμε να φανταστούμε ότι *ανακοινώνει* στην αρχή του παιγνίου ότι σκοπεύει να προχωρήσει σε μάχη· όμως μια τέτοια απειλή δεν είναι αξιόπιστη, επειδή όταν θα εισβάλει ο διεκδικητής η πιο αποδοτική ενέργεια του κατόχου είναι να αποσυρθεί.

☺ **ΑΣΚΗΣΗ 5.3** (Ισορροπίες Nash για εκτεταμένα παίγνια) Βρείτε τις ισορροπίες Nash για τα παίγνια της Άσκησης 5.1α και της Εικόνας 5.4. (Κατά την κατασκευή της στρατηγικής μορφής για το κάθε παίγνιο, φροντίστε να συμπεριλάβετε όλες τις στρατηγικές για κάθε παίκτη.)

☺ **ΑΣΚΗΣΗ 5.4** (Ψήφος με εναλλασσόμενο βέτο) Δύο άτομα επιλέγουν μια πολιτική που τους επηρεάζει και τους δύο θέτοντας εναλλάξ βέτο σε πολιτικές μέχρι να απομείνει μόνο μία. Πρώτα θέτει βέτο σε μια πολιτική το άτομο 1. Αν απομένουν περισσότερες από μία πολιτικές, το άτομο 2 θέτει στη συνέχεια βέτο σε μια πολιτική. Αν απομένουν και πάλι περισσότερες από μία πολιτικές, στη συνέχεια το άτομο 1 θέτει και πάλι βέτο σε μια πολιτική. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να μείνει χωρίς βέτο μία μόνο πολιτική. Υποθέστε ότι υπάρχουν τρεις δυνατές πολιτικές, οι X , Y , και Z , ότι το άτομο 1 προτιμά τη X από την Y από τη Z , και ότι το άτομο 2 προτιμά τη Z από την Y από τη X . Μοντελοποιήστε την κατάσταση αυτή ως εκτεταμένο παίγνιο και βρείτε τις ισορροπίες Nash για αυτό.

5.4 Υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία

5.4.1 Ορισμός

Η έννοια της ισορροπίας Nash παραβλέπει την ακολουθιακή δομή του εκτεταμένου παιγνίου· αντιμετωπίζει τις στρατηγικές σαν επιλογές που γίνονται “μια για πάντα” πριν να ξεκινήσει το παίγνιο. Κατά συνέπεια, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η σταθερή κατάσταση στην οποία αντιστοιχεί η ισορροπία Nash μπορεί να μην είναι εύρωστη.

Θα ορίσουμε τώρα μια έννοια ισορροπίας που μοντελοποιεί μία εύρωστη σταθερή κατάσταση. Αυτή η έννοια απαιτεί να είναι η στρατηγική του κάθε παίκτη βέλτιστη, με δεδομένες τις στρατηγικές των άλλων παικτών, όχι μόνο κατά την αρχή του παιγνίου, αλλά και μετά από κάθε δυνατό ιστορικό.

Για να ορίσουμε αυτή την έννοια, θα ορίσουμε πρώτη την έννοια του υποπαιγνίου (subgame). Για οποιοδήποτε μη τερματικό ιστορικό h , το υποπαιγνιο που έπεται του h είναι το τμήμα του παιγνίου που απομένει αφού προκύψει το h . Για παράδειγμα, το υποπαιγνιο που έπεται του ιστορικού

Εντός στο παίγνιο εισβολής (Παράδειγμα 5.1) είναι το παίγνιο στο οποίο ο κάτοχος της θέσης είναι ο μοναδικός παίκτης και υπάρχουν δύο τερματικά ιστορικά, τα *Απόσυρση* και *Μάχη*.

► Ορισμός 5.4 (*Υποπαίγνιο εκτεταμένου παιγνίου με τέλεια πληροφόρηση*) Έστω ότι το Γ είναι ένα εκτεταμένο παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση, με τη συνάρτηση παίκτη P . Για οποιοδήποτε μη τερματικό ιστορικό h του Γ , το **υποπαίγνιο** $\Gamma(h)$ που έπεται του ιστορικού h είναι το ακόλουθο εκτεταμένο παίγνιο.

Παίκτες Οι παίκτες του Γ .

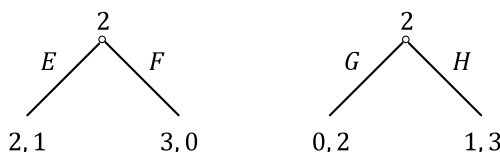
Τερματικές ιστορίες Το σύνολο όλων των ακολουθιών ενεργειών h' που είναι τέτοιες ώστε το (h, h') να είναι τερματικό ιστορικό του Γ .

Συνάρτηση παίκτη Σε κάθε γνήσιο υποϊστορικό h' ενός τερματικού ιστορικού αντιστοιχίζεται ο παίκτης $P(h, h')$.

Προτιμήσεις Καθένας από τους παίκτες προτιμά το h' από το h'' αν και μόνο αν προτιμά το (h, h') από το (h, h'') στο Γ .

Παρατηρήστε ότι το υποπαίγνιο που έπεται του κενού ιστορικού $\emptyset$ είναι το πλήρες παίγνιο. Κάθε άλλο υποπαίγνιο ονομάζεται *γνήσιο υποπαίγνιο* (proper subgame). Αφού υπάρχει ένα υποπαίγνιο για κάθε μη τερματικό ιστορικό, ο αριθμός των υποπαιγνίων είναι ίσος με τον αριθμό των μη τερματικών ιστορικών.

Ως παράδειγμα, το παίγνιο στο επάνω τμήμα της Εικόνας 5.3 έχει τρία μη τερματικά ιστορικά (το κενό ιστορικό, το C , και το D), επομένως έχει τρία υποπαίγνια: το πλήρες παίγνιο (το τμήμα του παιγνίου που έπεται του κενού ιστορικού), το παίγνιο που έπεται του ιστορικού C , και το παίγνιο που έπεται του ιστορικού D . Τα δύο γνήσια υποπαίγνια φαίνονται στην Εικόνα 5.6.



Εικόνα 5.6 Τα δύο γνήσια υποπαίγνια για το εκτεταμένο παίγνιο στο επάνω τμήμα της Εικόνας 5.3.

Το παίγνιο της Εικόνας 5.4 έχει και αυτό τρία μη τερματικά ιστορικά, επομένως έχει τρία υποπαίγνια: το πλήρες παίγνιο, το παίγνιο που έπεται του ιστορικού C , και το παίγνιο που έπεται του ιστορικού (C, E) . Τα δύο γνήσια υποπαίγνια φαίνονται στην Εικόνα 5.7.

Έπαινοι για το βιβλίο *Εισαγωγή στη θεωρία παιγνίων*

«Ένα εγχειρίδιο που θα απολαύσουν τόσο οι καθηγητές όσο και οι σπουδαστές, γεμάτο έξυπνα και συχνά πρωτότυπα παραδείγματα. Οι σοβαροί σπουδαστές που θα χρησιμοποιήσουν αυτό το βιβλίο είναι πολύ πιθανό να αποκτήσουν ένα νέο τρόπο σκέψης για πολλά από όσα παρατηρούν στον πραγματικό κόσμο.»

— Ted Bergstrom, *Καθηγητής Οικονομικών,
University of California, Santa Barbara*

«Ένα σπουδαίο βιβλίο, μακράν το καλύτερο της αγοράς σε ό,τι αφορά την πληρότητα και τη δομή.»

— Dorothea Herreiner, *Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Οικονομικών, Bowdoin College*

«Το ιδανικό εγχειρίδιο για την εφαρμοσμένη θεωρία παιγνίων... Εξετάζει πολύ αναλυτικά τη βασική θεωρία παιγνίων, χρησιμοποιώντας μόνο την απολύτως απαραίτητη, ξεκάθαρα ορισμένη τεχνική ορολογία, και καλύπτει ένα μεγάλο εύρος θεμάτων – από τα παραδοσιακά βασικά στοιχεία μέχρι τα σύγχρονα εργαλεία.»

— Randy Calvert, *Καθηγητής Πολιτικών Επιστημών, Washington University in St. Louis*

«Η προσέγγιση είναι διαισθητική, αλλά και αυστηρά δομημένη. Οι βασικές έννοιες εξηγούνται με μια σειρά παραδειγμάτων που καθοδηγούν τους σπουδαστές στην πορεία της ανάλυσης. Στη συνέχεια, τα παραδείγματα ακολουθούνται από ενδιαφέρουσες και διδακτικές ερωτήσεις. Η κύρια δύναμη του βιβλίου είναι το εντυπωσιακό σύνολο ασκήσεων – είναι εξαιρετικά οργανωμένες και έχουν απίστευτο εύρος, που κυμαίνεται από εύκολες ερωτήσεις μέχρι ασκήσεις για σπουδαστές που αγαπούν τις πραγματικές προκλήσεις.»

— In-Koo Cho, *Καθηγητής Οικονομικών στην έδρα William Kinkead Distinguished Professor,
University of Illinois at Urbana-Champaign*

«Το βιβλίο είναι πραγματικά εξαιρετικό. Γεμάτο με ασκήσεις, οι οποίες είναι και ενδιαφέρουσες αλλά και εφαρμόσιμες σε πραγματικά ζητήματα, που προσφέρουν μεγάλη ευελιξία στην εστίαση σε συγκεκριμένα παραδείγματα για την παρουσίαση της θεωρίας.»

— Christopher Proulx, *Αναπληρωτής Καθηγητής Οικονομικών,
University of California, Santa Barbara*

«Αυτό που κάνει το συγκεκριμένο βιβλίο να ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα είναι ο αξιοσημείωτος συνδυασμός αυστηρότητας και προσιτότητας. Οι κεντρικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων παρουσιάζονται με τη μαθηματική ακρίβεια που ταιριάζει σε ένα πτυχιακό μάθημα, αλλά ταυτόχρονα παρέχεται μια αφθονία πολυποίκιλων παραδειγμάτων τα οποία δίνουν στους προπτυχιακούς σπουδαστές μια σαφή κατανόηση της σημασίας των εννοιών και του τρόπου με τον οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν.»

— Charles A. Wilson, *Καθηγητής Οικονομικών, New York University*

Ο συγγραφέας

Ο **Martin J. Osborne** είναι Καθηγητής Οικονομικών στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο. Έχει γράψει, μαζί με τον Ariel Rubinstein, τα βιβλία *A Course in Game Theory* (1994) και *Bargaining and Markets* (1990).



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ

Λομακού 4, Σταθμός Λαρίσης, 10440 ΑΘΗΝΑ, Τηλ. 210-5237635

Επισκεφθείτε μας στο Internet:
www.klidarithmos.gr

ISBN 978-960-461-393-9

