

Susanna S. Epp

Διακριτά Μαθηματικά με εφαρμογές

Τρίτη αμερικανική
έκδοση



Επιστημονική επιμέλεια ελληνικής έκδοσης:
Βασίλης Μεταφτής, Αντώνης Τσολομύτης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1 Η λογική των σύνθετων προτάσεων

20

1.1 Λογικοί τύποι και λογικές ισοδυναμίες 20

Λογικές προτάσεις. Σύνθετες λογικές προτάσεις. Τιμές αληθείας. Υπολογισμός της αληθείας γενικότερων σύνθετων λογικών προτάσεων. Λογικές ισοδυναμίες. Ταυτολογίες και αντιφάσεις. Σύνοψη των λογικών ισοδυναμιών.

1.2 Προτάσεις υπό συνθήκη 37

Λογικές ισοδυναμίες που περιέχουν το $\rightarrow$. Αναπαράσταση της *Αν-Τότε* ως *Η*. Η άρνηση μιας υπό συνθήκη πρότασης. Η αντιθετοαντίστροφη μιας υπό συνθήκη πρότασης. Το αντίστροφο και το αντίθετο μιας πρότασης υπό συνθήκη. *Μόνο αν* και η αμφίδρομη υποθετική πρόταση. Αναγκαίες και ικανές συνθήκες. Σχόλια.

1.3 Έγκυρα και μη έγκυρα επιχειρήματα 49

Modus Ponens και Modus Tollens. Επιπλέον έγκυροι τύποι επιχειρημάτων: κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων. Λογικές πλάνες. Αντιφάσεις και έγκυρα επιχειρήματα. Σύνοψη των κανόνων εξαγωγής συμπεράσματος.

1.4 Εφαρμογή: Ψηφιακά λογικά κυκλώματα 63

Μαύρα κουτιά και πύλες. Ο πίνακας εισόδου/εξόδου ενός κυκλώματος. Η έκφραση Boole που αντιστοιχεί σε ένα κύκλωμα. Το κύκλωμα που αντιστοιχεί σε μια παράσταση Boole. Εύρεση κυκλώματος που αντιστοιχεί σε δεδομένο πίνακα εισόδου/εξόδου. Απλοποίηση συνδυαστικών κυκλωμάτων. Πύλες NAND και NOR.

1.5 Εφαρμογή: Συστήματα αρίθμησης και κυκλώματα πρόσθεσης 77

Δυαδική αναπαράσταση αριθμών. Πρόσθεση και αφαίρεση δυαδικών. Κυκλώματα για την πράξη της πρόσθεσης στους υπολογιστές. Συμπληρώματα του δύο και αναπαράσταση αρνητικών αριθμών στον υπολογιστή. Αναπαράσταση 8 bit ενός αριθμού. Πρόσθεση αρνητικών ακεραίων σε υπολογιστή. Δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης.

Κεφάλαιο 2 Η λογική των ποσοτικοποιημένων προτάσεων

94

2.1 Εισαγωγή στα κατηγορήματα και τις ποσοτικοποιημένες προτάσεις I 94

Ο καθολικός ποσοδείκτης $\forall$. Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$. Τυπική και μη τυπική γλώσσα. Καθολικές προτάσεις υπό συνθήκη. Ισοδύναμες μορφές καθολικών και υπαρξιακών προτάσεων. Έμμεση ποσοτικοποίηση. Ο Κόσμος του Tarski.

2.2 Εισαγωγή στα κατηγορήματα και τις ποσοτικοποιημένες προτάσεις II 108

Αρνήσεις ποσοτικοποιημένων προτάσεων. Αρνήσεις καθολικών προτάσεων υπό συνθήκη. Η σχέση μεταξύ των συμβόλων $\forall$, $\exists$, $\wedge$, και $\vee$. Αδιάφορα αληθείς καθολικές προτάσεις. Παραλλαγές των καθολικών προτάσεων υπό συνθήκη. Αναγκαίες και ικανές συνθήκες *Μόνο αν*.

- 2.3 Προτάσεις που περιέχουν πολλούς ποσοδείκτες** 117
Μετάφραση από μη τυπική σε τυπική γλώσσα. Ασαφής γλώσσα. Αρνήσεις πολλαπλώς ποσοτικοποιημένων προτάσεων. Σειρά ποσοδεικτών. Τυπική λογική σημειογραφία. Prolog.
- 2.4 Επιχειρήματα με ποσοτικοποιημένες προτάσεις** 131
Καθολικό Modus Ponens. Χρήση του καθολικού Modus Ponens σε μια απόδειξη. Καθολικό Modus Tollens. Απόδειξη της εγκυρότητας επιχειρημάτων με ποσοτικοποιημένες προτάσεις. Χρήση διαγραμμάτων για τον έλεγχο εγκυρότητας. Δημιουργία επιπλέον μορφών επιχειρημάτων. Επισήμανση για το σφάλμα αντιστρόφου και αντιθέτου.

Κεφάλαιο 3 Στοιχειώδης θεωρία αριθμών και μέθοδοι απόδειξης 145

- 3.1 Άμεση απόδειξη και αντιπαράδειγμα I: Εισαγωγή** 146
Ορισμοί. Απόδειξη υπαρξιακών προτάσεων. Διάψευση καθολικών προτάσεων με αντιπαράδειγματα. Απόδειξη καθολικών προτάσεων. Οδηγίες για τη συγγραφή αποδείξεων καθολικών προτάσεων. Συνήθη λάθη. Έναρξη των αποδείξεων. Απόδειξη ότι μια υπαρξιακή πρόταση είναι ψευδής. Εικασία, απόδειξη, και διάψευση.
- 3.2 Άμεση απόδειξη και αντιπαράδειγμα II: Ρητοί αριθμοί** 162
Περισσότερα για τη γενίκευση από το τυπικό συγκεκριμένο στοιχείο. Απόδειξη ιδιοτήτων ρητών αριθμών. Παραγωγή νέων μαθηματικών συμπερασμάτων από ήδη εδραιωμένα.
- 3.3 Άμεση απόδειξη και αντιπαράδειγμα III: Διαιρετότητα** 169
Απόδειξη των ιδιοτήτων της διαιρετότητας. Αντιπαράδειγματα και διαιρετότητα. Το θεώρημα της μοναδικής παραγοντοποίησης.
- 3.4 Άμεση απόδειξη και αντιπαράδειγμα IV: Διαχωρισμός σε περιπτώσεις και το θεώρημα πηλίκου-υπολοίπου** 178
Ανάλυση του θεωρήματος πηλίκου-υπολοίπου και παραδείγματα. *div* και *mod*. Εναλλακτικές αναπαραστάσεις ακεραίων και εφαρμογές στη θεωρία αριθμών.
- 3.5 Άμεση απόδειξη και αντιπαράδειγμα V: Κάτω και άνω ακέραιο μέρος** 186
Ορισμοί και βασικές ιδιότητες. Το κάτω ακέραιο μέρος του $n/2$.
- 3.6 Έμμεσο επιχείρημα: Αντίφαση και αντιθετοαντίστροφή** 193
Απόδειξη μέσω αντίφασης. Επιχείρημα μέσω αντιθετοαντίστροφης. Σχέση μεταξύ απόδειξης μέσω αντίφασης και απόδειξης μέσω αντιθετοαντίστροφης. Η απόδειξη ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων.
- 3.7 Δύο κλασικά θεωρήματα** 202
Ο άρρητος χαρακτήρας του $\sqrt{2}$. Το άπειρο του συνόλου των πρώτων αριθμών. Πότε να χρησιμοποιείτε έμμεση απόδειξη. Ανοικτά ερωτήματα της θεωρίας αριθμών.
- 3.8 Εφαρμογή: Αλγόριθμοι** 208
Μια αλγοριθμική γλώσσα. Σημειογραφία αλγορίθμων. Πίνακες καταγραφής. Ο αλγόριθμος της διαίρεσης. Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη.

Κεφάλαιο 4 Ακολουθίες και μαθηματική επαγωγή 221

4.1 Ακολουθίες 221

Τύποι ακολουθιών. Συμβολισμός του αθροίσματος. Συμβολισμός γινομένου. Συμβολισμός παραγοντικού. Ιδιότητες αθροισμάτων και γινομένων. Αλλαγή μεταβλητής. Ακολουθίες στον προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών. Εφαρμογή: Αλγόριθμος μετατροπής από τη βάση 10 στη βάση 2 με συνεχή διαίρεση με το 2.

4.2 Μαθηματική επαγωγή I 236

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Το άθροισμα των πρώτων n ακεραίων. Το άθροισμα γεωμετρικής προόδου.

4.3 Μαθηματική επαγωγή II 248

Σύγκριση της μαθηματικής επαγωγής και της επαγωγικής επιχειρηματολογίας. Απόδειξη ιδιοτήτων διαιρετότητας. Απόδειξη ανισοτήτων.

4.4 Ισχυρή μαθηματική επαγωγή και η αρχή της καλής διάταξης 256

Εφαρμογή της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής. Δυαδική αναπαράσταση ακεραίων. Η αρχή της καλής διάταξης για τους ακεραίους.

4.5 Μια εφαρμογή: Ορθότητα αλγορίθμων 265

Ισχυρισμοί. Αναλλοίωτες βρόχου. Ορθότητα του αλγορίθμου διαίρεσης. Ορθότητα του αλγορίθμου μέγιστου κοινού διαιρέτη.

Κεφάλαιο 5 Θεωρία συνόλων 276

5.1 Βασικοί ορισμοί της θεωρίας συνόλων 276

Υποσύνολα. Ισότητα συνόλων. Πράξεις συνόλων. Διαγράμματα Venn. Το κενό σύνολο. Διαμερίσεις συνόλων. Δυναμοσύνολα. Καρτεσιανά γινόμενα. Αλγόριθμος ο οποίος ελέγχει αν ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου (προαιρετική υποενότητα).

5.2 Ιδιότητες συνόλων 290

Ταυτότητες συνόλων. Πώς αποδεικνύουμε ταυτότητες συνόλων. Το κενό σύνολο.

5.3 Ανασκευές, αλγεβρικές αποδείξεις, και άλγεβρες Boole 304

Απόδειξη του ψεύδους μιας υποτιθέμενης ιδιότητας συνόλων. Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων. Ο αριθμός των υποσυνόλων ενός συνόλου. «Αλγεβρικές» αποδείξεις ταυτοτήτων συνόλων. Άλγεβρες Boole.

5.4 Το παράδοξο του Russell και το πρόβλημα του τερματισμού 315

Περιγραφή του παραδόξου του Russell. Το πρόβλημα του τερματισμού.

Κεφάλαιο 6 Απαρίθμηση και πιθανότητα 320

6.1 Εισαγωγή 321

Ορισμός δειγματικού χώρου και ενδεχομένου. Πιθανοθεωρητικός τύπος για ισοπίθανα αποτελέσματα. Μέτρηση των στοιχείων ενός καταλόγου, υποκατάλογοι, και διανύσματα.

- 6.2 Δέντρα δυνατών αποτελεσμάτων και ο κανόνας του πολλαπλασιασμού** 329
 Δέντρα δυνατών αποτελεσμάτων. Ο κανόνας του πολλαπλασιασμού. Πότε είναι δύσκολη ή αδύνατη η εφαρμογή του κανόνα πολλαπλασιασμού. Μεταθέσεις. Μεταθέσεις επιλεγμένων στοιχείων.
- 6.3 Καταμέτρηση των στοιχείων ξένων συνόλων: Ο κανόνας της πρόσθεσης** 344
 Ο κανόνας της πρόσθεσης. Ο κανόνας της διαφοράς. Η αρχή εγκλεισμού/αποκλεισμού.
- 6.4 Καταμέτρηση υποσυνόλων ενός συνόλου: Συνδυασμοί** 358
 r -συνδυασμοί. Διατεταγμένες και μη διατεταγμένες επιλογές. Σχέσεις μεταξύ μεταθέσεων και συνδυασμών. Μεταθέσεις συνόλων με επαναλαμβανόμενα στοιχεία. Μετρικές συμβουλές καταμέτρησης.
- 6.5 r -συνδυασμοί με επανάληψη** 373
 Συνδυασμοί με επανάληψη και τρόπος μέτρησής τους. Ποιον τύπο χρησιμοποιούμε;
- 6.6 Η άλγεβρα των συνδυασμών** 380
 Συνδυαστικοί τύποι. Το τρίγωνο του Pascal. Αλγεβρικές και συνδυαστικές αποδείξεις του τύπου του Pascal.
- 6.7 Το διωνυμικό θεώρημα** 386
 Διατύπωση του θεωρήματος. Αλγεβρικές και συνδυαστικές αποδείξεις. Εφαρμογές.
- 6.8 Τα αξιώματα των πιθανοτήτων και η αναμενόμενη τιμή** 394
 Αξιώματα πιθανοτήτων. Παραγωγή επιπλέον πιθανοθεωρητικών τύπων. Αναμενόμενη τιμή.
- 6.9 Δεσμευμένη πιθανότητα, τύπος του Bayes, και ανεξάρτητα ενδεχόμενα** 399
 Δεσμευμένη πιθανότητα. Το θεώρημα Bayes. Ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Κεφάλαιο 7 Συναρτήσεις 413

- 7.1 Συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα γενικό σύνολο** 413
 Ορισμός της συνάρτησης. Διαγράμματα του Venn. Η συνάρτηση ως μηχανή. Παραδείγματα συναρτήσεων. Συναρτήσεις Boole. Έλεγχος της επάρκειας του ορισμού μιας συνάρτησης.
- 7.2 Ένα προς ένα και επί, αντίστροφες συναρτήσεις** 426
 Συναρτήσεις ένα προς ένα. Συναρτήσεις ένα προς ένα σε άπειρα σύνολα. Εφαρμογή: Συναρτήσεις hash. Συναρτήσεις επί. Συναρτήσεις επί σε άπειρα σύνολα. Ιδιότητες εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων. Αντιστοιχίες ένα προς ένα και επί. Αντίστροφες συναρτήσεις.
- 7.3 Εφαρμογή: Η αρχή του περιστερώνα** 444
 Διατύπωση και ανάλυση της αρχής. Εφαρμογή στο δεκαδικό ανάπτυγμα κλασμάτων. Γενικευμένη αρχή του περιστερώνα. Απόδειξη της αρχής του περιστερώνα.

7.4 Σύνθεση συναρτήσεων 456

Ορισμοί και παραδείγματα. Σύνθεση συναρτήσεων ένα προς ένα. Σύνθεση συναρτήσεων επί.

7.5 Πληθικότητα με εφαρμογές στην υπολογισιμότητα 467

Ισοδύναμες πληθικότητες. Αριθμήσιμα σύνολα. Αναζήτηση μεγαλύτερων απείρων: Η διαδικασία διαγωνιοποίησης του Cantor. Εφαρμογή: Πληθικότητα και υπολογισιμότητα.

Κεφάλαιο 8 Αναδρομικοί ορισμοί 481**8.1 Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά 481**

Ορισμός αναδρομικής σχέσης. Παραδείγματα ακολουθιών που ορίζονται με αναδρομικό τρόπο. Το πλήθος των διαμερίσεων ενός συνόλου σε r υποσύνολα.

8.2 Επίλυση αναδρομικών σχέσεων με επαναλήψεις 499

Η μέθοδος της επανάληψης. Χρήση τύπων για την απλοποίηση λύσεων που προκύπτουν με τη μέθοδο των επαναλήψεων. Έλεγχος της ορθότητας ενός τύπου με μαθηματική επαγωγή. Εντοπισμός σφάλματος σε έναν τύπο.

8.3 Γραμμικές ομογενείς αναδρομικές σχέσεις δεύτερου βαθμού με σταθερούς συντελεστές 511

Προσδιορισμός της τεχνικής επίλυσης αυτών των σχέσεων. Η περίπτωση των διακριτών ριζών. Η περίπτωση της μίας ρίζας.

8.4 Γενικοί αναδρομικοί ορισμοί 523

Αναδρομικά ορισμένα σύνολα. Απόδειξη ιδιοτήτων αναδρομικά ορισμένων συνόλων. Αναδρομικός ορισμός του αθροίσματος, του γινομένου, της ένωσης, και της τομής. Αναδρομικά ορισμένες συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 9 Η αποδοτικότητα των αλγορίθμων 534**9.1 Πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής και τα γραφήματά τους 534**

Γραφήματα συναρτήσεων. Συναρτήσεις δυνάμεων. Η συνάρτηση κάτω ακέραιου μέρους. Σχεδίαση συναρτήσεων που ορίζονται σε σύνολα ακεραίων. Το γράφημα ενός πολλαπλασίου μιας συνάρτησης. Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις.

9.2 Τα σύμβολα O , Ω , και Θ 542

Ορισμοί και γενικές ιδιότητες των συμβολισμών O , Ω , και Θ . Τάξεις συναρτήσεων δυνάμεων. Οι τάξεις των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Τάξεις συναρτήσεων ακεραίων μεταβλητών. Επέκταση σε συναρτήσεις που προέρχονται από σύνθεση ρητών δυνάμεων.

9.3 Εφαρμογή: Αποδοτικότητα των αλγορίθμων I 555

Η χρονική αποδοτικότητα ενός αλγορίθμου. Υπολογισμός τάξης απλών αλγορίθμων. Ο αλγόριθμος σειριακής αναζήτησης. Αλγόριθμος ταξινόμησης με παρεμβολή.

- 9.4 Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις: Γραφήματα και τάξεις** 568
 Γραφήματα εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων. Εφαρμογή: Το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που απαιτούνται για την αναπαράσταση ενός ακεραίου σε δυαδική μορφή. Εφαρμογή: Χρήση λογαρίθμων για την επίλυση αναδρομικών σχέσεων. Εκθετικές και λογαριθμικές τάξεις.
- 9.5 Εφαρμογή: Αποδοτικότητα των αλγορίθμων II** 581
 Αλγόριθμοι «διαίρει και βασίλευε». Η αποδοτικότητα του αλγορίθμου δυαδικής αναζήτησης. Ταξινόμηση με συγχώνευση. Ανιχνεύσιμα και μη ανιχνεύσιμα προβλήματα. Ένα τελικό σχόλιο σχετικά με την αποδοτικότητα των αλγορίθμων.

Κεφάλαιο 10 Σχέσεις 596

- 10.1 Σχέσεις σε σύνολα** 596
 Ορισμός διμελούς σχέσης. Το διάγραμμα μιας σχέσης. Σχέσεις και συναρτήσεις. Η αντίστροφη μιας σχέσης. Το κατευθυνόμενο γράφημα μιας σχέσης. N -μελείς σχέσεις και σχεσιακές βάσεις δεδομένων.
- 10.2 Ανακλαστικότητα, συμμετρία, και μεταβατικότητα** 609
 Οι ιδιότητες ανακλαστικότητας, συμμετρίας, και μεταβατικότητας. Η μεταβατική κλειστότητα μιας σχέσης. Ιδιότητες των σχέσεων σε άπειρα σύνολα.
- 10.3 Σχέσεις ισοδυναμίας** 619
 Η σχέση που επάγεται από μια διαμέριση. Ορισμός της σχέσης ισοδυναμίας. Κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης ισοδυναμίας.
- 10.4 Η αριθμητική των υπολοίπων με εφαρμογές στην κρυπτογραφία** 636
 Ιδιότητες της ισοτιμίας modulo n . Αριθμητική των υπολοίπων. Προσδιορισμός του αντιστρόφου modulo n . Το λήμμα του Ευκλείδη. Το μικρό θεώρημα του Fermat και το κινέζικο θεώρημα υπολοίπων. Γιατί είναι αποτελεσματικός ο κώδικας RSA;
- 10.5 Σχέσεις μερικής διάταξης** 657
 Αντισυμμετρία. Σχέσεις μερικής διάταξης. Λεξικογραφική σειρά. Διαγράμματα Hasse. Μερικώς και ολικώς διατεταγμένα σύνολα. Τοπολογική ταξινόμηση. Μια εφαρμογή. PERT και CPM.

Κεφάλαιο 11 Γραφήματα και δέντρα 675

- 11.1 Γραφήματα: Εισαγωγή** 675
 Βασική ορολογία και παραδείγματα. Ειδικά γραφήματα. Η έννοια του βαθμού.
- 11.2 Μονοπάτια και κυκλώματα** 691
 Ορισμοί. Κυκλώματα Euler. Χαμιλτονιανά κυκλώματα.
- 11.3 Αναπαράσταση των γραφημάτων με πίνακες** 710
 Πίνακες. Πίνακες και κατευθυνόμενα γραφήματα. Πίνακες και (μη κατευθυνόμενα) γραφήματα. Πίνακες και συνεκτικές συνιστώσες. Πολλαπλασιασμός πινάκων. Υπολογισμός περιπάτων μήκους N .

- 11.4 *Ισομορφισμοί γραφημάτων* 724
Ορισμός ισομορφισμού γραφημάτων και παραδείγματα. Ισομορφικά αναλλοίωτες πο-
σότητες. Ισομορφισμός γραφημάτων για απλά γραφήματα.
- 11.5 *Δέντρα* 732
Ορισμοί και παραδείγματα δέντρων. Χαρακτηρισμός δέντρων. Δέντρα με ρίζα. Δυα-
δικά δέντρα.
- 11.6 *Δέντρα επικάλυψης* 750
Ορισμός δέντρου επικάλυψης. Ελάχιστα δέντρα επικάλυψης. Ο αλγόριθμος του Kru-
skal. Ο αλγόριθμος του Prim.

Κεφάλαιο 12 Κανονικές εκφράσεις και πεπερασμένα αυτόματα 761

- 12.1 *Τυπικές γλώσσες και κανονικές εκφράσεις* 762
Ορισμοί και παραδείγματα τυπικών γλωσσών και κανονικών εκφράσεων. Πρακτικές
χρήσεις των κανονικών εκφράσεων.
- 12.2 *Αυτόματα πεπερασμένων καταστάσεων* 773
Ορισμός του αυτομάτου πεπερασμένων καταστάσεων. Η γλώσσα που αποδέχεται ένα
αυτόματο. Η συνάρτηση καταληκτικής κατάστασης. Σχεδίαση ενός αυτομάτου πεπε-
ρασμένων καταστάσεων. Προσομοίωση αυτομάτου πεπερασμένων καταστάσεων με
χρήση λογισμικού. Αυτόματα πεπερασμένων καταστάσεων και κανονικές εκφράσεις.
Κανονικές γλώσσες.
- 12.3 *Απλοποίηση αυτομάτων πεπερασμένων καταστάσεων* 791
* ισοδυναμία καταστάσεων. k ισοδυναμία καταστάσεων. Προσδιορισμός των κλά-
σεων της * ισοδυναμίας. Το αυτόματο πηλίκου. Κατασκευή του αυτομάτου πηλίκου.
Ισοδύναμα αυτόματα.

Παράρτημα Α Ιδιότητες των πραγματικών αριθμών 805

Παράρτημα Β Λύσεις και υποδείξεις επιλεγμένων ασκήσεων 808

Πίνακας συμβόλων 921

Ευρετήριο 927

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο σκοπός μου με αυτό το βιβλίο ήταν να δώσω μια σαφή και προσιτή παρουσίαση των διακριτών μαθηματικών για προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές που σπουδάζουν επιστήμη υπολογιστών, μαθηματικά, εκπαίδευση στα μαθηματικά και μηχανολογία. Στόχος του βιβλίου είναι να θέσει τις μαθηματικές βάσεις για μαθήματα της επιστήμης των υπολογιστών όπως δομές δεδομένων, αλγόριθμοι, θεωρία βάσεων δεδομένων, θεωρία αυτομάτων και τυπικές γλώσσες, σχεδιασμός μεταγλωττιστών και κρυπτογραφία, αλλά και για μαθήματα μαθηματικών όπως γραμμική και αφηρημένη άλγεβρα, συνδυαστική, πιθανότητες, λογική και συνολοθεωρία, και θεωρία αριθμών. Συνδυάζοντας τη θεωρία και την πράξη, προσπάθησα να δείξω ότι τα μαθηματικά, εκτός από το ότι είναι αξιαγάπητα, ενδιαφέροντα και όμορφα από μόνα τους, έχουν σημαντικές εφαρμογές.

Το μόνο προαπαιτούμενο είναι ένα καλό υπόβαθρο στην απλή άλγεβρα· το μάθημα μπορεί να διδαχθεί είτε πριν είτε μετά από ένα μάθημα απειροστικού λογισμού. Προηγούμενες εκδόσεις του βιβλίου έχουν χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε ιδρύματα της Βόρειας και Νότιας Αμερικής, της Ευρώπης, της Μέσης Ανατολής και της Αυστραλίας.

Σύμφωνα με τις πρόσφατες προτάσεις του Ινστιτούτου Ηλεκτρολόγων και Ηλεκτρονικών Μηχανικών-Ένωσης Υπολογιστών (Institute for Electrical and Electronic Engineers Computer Society, IEEE-CS) και της Ένωσης Συσκευών Υπολογιστών (Association for Computing Machinery, ACM) τα διακριτά μαθηματικά πρέπει να αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος των «βασικών γνώσεων» των φοιτητών της επιστήμης των υπολογιστών, ενώ η μελέτη του αντικειμένου κατά το πρώτο έτος σπουδών τους πρέπει να διαρκεί τουλάχιστον ένα εξάμηνο, ή ακόμα και δύο όπου αυτό είναι δυνατόν. Αυτό το βιβλίο περιλαμβάνει όλα τα θέματα που προτείνουν αυτοί οι οργανισμοί και μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά είτε για ένα εξαμηνιαίο μάθημα είτε για δύο.

Κάποτε, τα περισσότερα από τα θέματα των διακριτών μαθηματικών διδασκόνταν μόνο σε προπτυχιακούς φοιτητές κατά το τελευταίο έτος των σπουδών τους. Η βασική, και εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, πρόκληση της συγγραφής αυτού του βιβλίου ήταν η εύρεση του κατάλληλου τρόπου διδασκαλίας αυτών των θεμάτων ώστε να γίνουν κατανοητά από πρωτοετείς και δευτεροετείς φοιτητές. Ο τρόπος παρουσίασης αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια μιας μεγάλης περιόδου πειραματισμών κατά την οποία οι φοιτητές μου ήταν ταυτόχρονα, από πολλές απόψεις, και δάσκαλοί μου. Οι ερωτήσεις τους, τα σχόλιά τους και τα γραπτά τους, μου υποδείκνυαν ποιες έννοιες και τεχνικές τους δυσκόλευαν, ενώ ο τρόπος με τον οποίο ανταποκρίνονταν στις παρουσιάσεις που τους έκανα μου έδειχνε τι ήταν αποτελεσματικό στο χτίσιμο της κατανόησης των εννοιών και κινούσε το ενδιαφέρον τους. Πολλές από τις αλλαγές σε αυτή την έκδοση είναι αποτέλεσμα της συνεχούς αλληλεπίδρασης με τους φοιτητές.

Τα θέματα ενός μαθήματος διακριτών μαθηματικών

Τα διακριτά μαθηματικά περιγράφουν διαδικασίες που αποτελούνται από μια ακολουθία ξεχωριστών βημάτων. Αντίθετα, ο απειροστικός λογισμός περιγράφει διαδικασίες που μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο. Όπως οι ιδέες του απειροστικού λογισμού αποτέλεσαν τα θεμέλια της επιστήμης και της τεχνολογίας κατά τη βιομηχανική επανάσταση, έτσι και οι ιδέες των διακριτών μαθηματικών υποστηρίζουν την επιστήμη και την τεχνολογία της εποχής των υπολογιστών. Τα κύρια θέματα ενός πρώτου μαθήματος διακριτών μαθηματικών είναι η λογική και η απόδειξη, η επαγωγή και η επανάληψη, η συνδυαστική και οι διακριτές πιθανότητες, οι αλγόριθμοι και η ανάλυσή τους, και οι εφαρμογές στη μοντελοποίηση.

Λογική και Απόδειξη Ο σπουδαιότερος ίσως στόχος ενός εισαγωγικού μαθήματος στα διακριτά μαθηματικά είναι να βοηθήσει τους φοιτητές να αναπτύξουν την ικανότητα να

σκέφτονται αφηρημένα. Αυτό σημαίνει να έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν λογικά ορθές μορφές επιχειρημάτων και να αποφεύγουν κοινά λογικά σφάλματα, να επιχειρηματολογούν με βάση τους ορισμούς, να χρησιμοποιούν ευθεία αλλά και πλάγια επιχειρήματα για να αποδεικνύουν νέα αποτελέσματα από ήδη γνωστά, και να μπορούν να εργάζονται με συμβολικές αναπαραστάσεις σαν να ήταν συγκεκριμένα αντικείμενα.

Επαγωγή και αναδρομή Μια ενδιαφέρουσα εξέλιξη των τελευταίων ετών είναι η εκτίμηση της δύναμης και ομορφιάς της «αναδρομικής σκέψης». Πρακτικά, αυτό σημαίνει να εξετάσουμε ένα πρόβλημα υποθέτοντας ότι παρόμοια προβλήματα μικρότερης κλίμακας έχουν ήδη λυθεί και να προσπαθούμε να συνδυάσουμε αυτές τις λύσεις των επιμέρους προβλημάτων για να λύσουμε το μεγαλύτερο πρόβλημα. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται εκτεταμένα στην ανάλυση αλγορίθμων, όπου αναδρομικές σχέσεις που προκύπτουν από αναδρομικού τύπου συλλογισμούς δίνουν τύπους που επιβεβαιώνονται με μαθηματική επαγωγή.

Συνδυαστική και διακριτές πιθανότητες Η συνδυαστική στα μαθηματικά της απαρίθμησης, της διάταξης αντικειμένων, και της πιθανότητας είναι η μελέτη των νόμων για τις μετρήσεις τυχαίων γεγονότων. Η διακριτή πιθανότητα εστιάζει σε καταστάσεις που ασχολούνται με διακριτά σύνολα αντικειμένων, όπως ο προσδιορισμός της πιθανότητας να έρθει κορώνα συγκεκριμένες φορές όταν ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα αρκετές φορές. Επιδεξιότητα στη συνδυαστική και τις πιθανότητες χρειάζεται σχεδόν σε κάθε αντικείμενο όπου εφαρμόζονται τα μαθηματικά, από την οικονομία μέχρι τη βιολογία, την επιστήμη των υπολογιστών, τη χημεία, τη φυσική και τη διοίκηση επιχειρήσεων.

Αλγόριθμοι και η ανάλυσή τους Η λέξη *αλγόριθμος* ήταν γενικά άγνωστη στο μέσο του εικοστού αιώνα, ενώ τώρα είναι μία από τις πρώτες λέξεις που συναντάει κανείς στην επιστήμη των υπολογιστών. Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με έναν υπολογιστή, είναι απαραίτητο να βρούμε έναν αλγόριθμο ή μια βήμα προς βήμα ακολουθία οδηγιών τις οποίες θα ακολουθήσει ο υπολογιστής. Ο σχεδιασμός ενός αλγορίθμου απαιτεί κατανόηση των μαθηματικών του προβλήματος που πρόκειται να λυθεί. Ο προσδιορισμός της ορθότητας ή μη ενός αλγορίθμου απαιτεί περίπλοκους χειρισμούς με μαθηματική επαγωγή. Ο υπολογισμός του χρόνου ή της μνήμης που χρειάζεται ένας αλγόριθμος ώστε να μπορεί να συγκριθεί με άλλους αλγορίθμους που δίνουν την ίδια έξοδο απαιτεί γνώσεις συνδυαστικής, επαναληπτικών σχέσεων, συναρτήσεων, και συμβολισμών O , Ω , και Θ .

Διακριτές δομές Οι διακριτές μαθηματικές δομές είναι αφηρημένες δομές που περιγράφουν, κατηγοριοποιούν, και αναδεικνύουν τις κρυφές σχέσεις μεταξύ διακριτών μαθηματικών αντικειμένων. Οι δομές που μελετάμε σε αυτό το βιβλίο είναι τα σύνολα των ακεραίων και των ρητών, γενικά σύνολα, άλγεβρες Boole, συναρτήσεις, σχέσεις, γραφήματα και δέντρα, τυπικές γλώσσες και κανονικές εκφράσεις, και αυτόματα πεπερασμένων καταστάσεων.

Εφαρμογές και μοντελοποίηση Τα μαθηματικά αντικείμενα γίνονται καλύτερα κατανοητά όταν τα εξετάζουμε σε μια ποικιλία καταστάσεων και τα χρησιμοποιούμε για την επίλυση προβλημάτων που συναντώνται σε ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών. Ένα από τα σπουδαιότερα μαθήματα των μαθηματικών είναι ότι μας επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε το ίδιο μαθηματικό μοντέλο για να λύνουμε προβλήματα τα οποία, φαινομενικά, είναι τελείως ανόμοια. Ένας από τους στόχους αυτού του βιβλίου είναι να δείξει στους φοιτητές την εκπληκτική πρακτική χρησιμότητα μερικών πολύ αφηρημένων μαθηματικών ιδεών.

Ειδικά χαρακτηριστικά αυτού του βιβλίου

Μαθηματική συλλογιστική Το χαρακτηριστικό που κάνει αυτό να βιβλίο να ξεχωρίζει από άλλα βιβλία διακριτών μαθηματικών είναι ότι διδάσκει — με διεξοδικό αλλά εύληπτο τρόπο στους πρωτοετείς και δευτεροετείς φοιτητές — την κρυφή λογική και συλλογι-

στική που αποτελούν τη βάση της μαθηματικής σκέψης. Για πολλά χρόνια δίδασκα ένα ιδιαίτερα διαδραστικό μάθημα μετάβασης στα αφηρημένα μαθηματικά σε φοιτητές των μαθηματικών και της επιστήμης των υπολογιστών. Αυτή η εμπειρία μου έδειξε ότι αν και είναι εφικτό να διδάξεις τους περισσότερους φοιτητές να καταλαβαίνουν και να κατασκευάζουν σαφή μαθηματικά επιχειρήματα, υπάρχουν κάποια εμπόδια που είναι δύσκολο να ξεπεραστούν. Για να είναι αποτελεσματικό το βιβλίο ενός τέτοιου μαθήματος πρέπει να ασχολείται αρκετά με τις δυσκολίες του φοιτητή στη λογική και στη γλώσσα με άμεσο τρόπο. Πρέπει επίσης να περιέχει πολλά σαφή παραδείγματα και ασκήσεις για να δώσει τη δυνατότητα στους φοιτητές να αναπτύξουν τα απαραίτητα νοητικά μοντέλα που θα τους επιτρέψουν να κατανοήσουν πιο αφηρημένα προβλήματα. Η αντιμετώπιση της λογικής και της απόδειξης σε αυτό το βιβλίο συνδυάζει κοινή λογική και αυστηρή προσέγγιση με ένα τρόπο που εξηγεί τα ουσιώδη χωρίς να κουράζει τους φοιτητές με τεχνικές λεπτομέρειες.

Ελικοειδής προσέγγιση στην ανάπτυξη των εννοιών Ένας αριθμός από έννοιες σε αυτό το βιβλίο εμφανίζεται με ολοένα και πιο σύνθετες μορφές στα διαδοχικά κεφάλαια για να βοηθήσει τους φοιτητές να αναπτύξουν επίπεδα αφαίρεσης. Για παράδειγμα, μέχρι να συναντήσουν το σχετικά προχωρημένο θέμα του μικρού θεωρήματος του Fermat και του κινέζικου θεωρήματος υπολοίπου στην Ενότητα 10.4, θα έχουν ήδη εισαχθεί στη μαθηματική λογική στα Κεφάλαια 1 και 2, θα έχουν μάθει τις βασικές μεθόδους της απόδειξης και τις έννοιες *mod* και *div* στο Κεφάλαιο 3, θα έχουν μελετήσει τις διαμερίσεις ακεραίων στο Κεφάλαιο 5, θα έχουν θεωρήσει τις *mod* και *div* ως συναρτήσεις στο Κεφάλαιο 7, και θα έχουν εξοικειωθεί με τις σχέσεις ισοδυναμίας στις Ενότητες 10.2 και 10.3. Αυτή η προσέγγιση ανακεφαλαιώνει τα θέματα και αναπτύσσει τη μαθηματική ωριμότητα με φυσικό τρόπο.

Υποστήριξη για τους φοιτητές Οι φοιτητές οπωσδήποτε πρέπει να μάθουν πολλά πράγματα μόνοι τους. Μαθαίνοντας να μελετούν μόνοι τους, κάτι που συχνά είναι δύσκολο, πραγματοποιούν ένα σημαντικό βήμα προς την εξασφάλιση μιας επιτυχημένης επαγγελματικής καριέρας. Αυτό το βιβλίο διαθέτει ορισμένα χαρακτηριστικά που θα βοηθήσουν τους φοιτητές να μάθουν να διαβάσουν μόνοι τους.

Λυμένα παραδείγματα

Το βιβλίο περιέχει περισσότερα από 500 λυμένα παραδείγματα, που είναι γραμμένα σε μορφή εκφώνησης-λύσης και είναι ανάλογα, τόσο σε περιεχόμενο όσο και σε δυσκολία, με τις ασκήσεις. Πολλές λύσεις προβλημάτων με αποδείξεις έχουν γραφεί σε δύο στάδια: πρώτα εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί η απόδειξη ή η ανασκευή και μετά παρατίθεται η περίληψη της λύσης μέσα σε ένα πλαίσιο. Αυτός ο τρόπος επιτρέπει στους φοιτητές να διαβάσουν το πρόβλημα και, αν θέλουν, να περάσουν κατευθείαν στην περίληψη ή, αν δεν κατανοούν την περίληψη, να επιστρέψουν στη συζήτηση. Αυτός ο τρόπος εξοικονομεί χρόνο για τους φοιτητές που ξαναδιαβάζουν το κείμενο κατά την προετοιμασία τους για τις εξετάσεις.

Ασκήσεις

Το βιβλίο περιέχει περίπου 2.500 ασκήσεις. Οι ασκήσεις στο τέλος κάθε ενότητας έχουν σχεδιαστεί ώστε οι φοιτητές διαφορετικών κλάδων και ποικίλων δυνατοτήτων να μπορούν να βρουν κάποιες ασκήσεις που θα έχουν τη δυνατότητα να λύσουν σωστά και κάποιες άλλες που θα τους δυσκολέψουν.

Λύσεις ασκήσεων

Το Παράρτημα Β περιέχει ένα μεγάλο αριθμό πλήρως λυμένων ασκήσεων. Οι φοιτητές καλό θα ήταν να συμβουλευονται τις λύσεις αφού πρώτα έχουν καταβάλει κάθε προσπάθεια να λύσουν τις ασκήσεις μόνοι τους. Αν προσπαθήσουν πρώτα μόνοι τους και μετά συγκρίνουν τη δική τους λύση με αυτή που δίνεται, θα οδηγηθούν σε καλύτερο επίπεδο κατανόησης. Επιπλέον, πολλά προβλήματα, συμπεριλαμβανομένων μερικών από τα πιο δύσκολα, δεν έχουν λυθεί πλήρως ή περιλαμβάνουν υποδείξεις ώστε οι φοιτητές να μπορούν να επαληθεύσουν αν ο συλλογισμός τους είναι σωστός και να

κάνουν τις κατάλληλες προσαρμογές. Επίσης, υπάρχουν πολλές ασκήσεις χωρίς λύση ώστε να μάθουν οι φοιτητές να ασχολούνται με προβλήματα σε ρεαλιστικό πλαίσιο εργασίας.

Σχήματα και πίνακες

Τα σχήματα και οι πίνακες έχουν προστεθεί σε σημεία που θεωρήσαμε ότι θα βοηθήσουν τον αναγνώστη να κατανοήσει καλύτερα το πρόβλημα. Στα περισσότερα σχήματα, γίνεται χρήση και δεύτερου χρώματος για να γίνουν ακόμα πιο κατανοητά.

Αναφορές

Πολλοί φοιτητές μου έχουν γράψει ότι το βιβλίο τους βοήθησε πολύ στα πιο προχωρημένα μαθήματα που πήραν στη συνέχεια των σπουδών τους. Ένας μου έγραψε ότι χρησιμοποίησε την πρώτη έκδοση τόσο πολύ ώστε το βιβλίο διαλύθηκε και αναγκάστηκε να αγοράσει και τη δεύτερη έκδοση, την οποία συνέχισε να χρησιμοποιεί και στο μεταπτυχιακό του. Η τακτική μου να τοποθετώ τους ορισμούς και τα θεωρήματα σε πλαίσια, να βάζω τίτλους στις ασκήσεις και να παρέχω λίστες με τύπους και τις σημασίες των συμβόλων στα εσώφυλλα κάνει το βιβλίο εύχρηστο τόσο για μελέτη όσο και αργότερα ως βιβλίο αναφοράς.

Υποστήριξη του καθηγητή Έχω λάβει πλήθος πολύτιμων παρατηρήσεων από καθηγητές που έχουν χρησιμοποιήσει προηγούμενες εκδόσεις του βιβλίου. Το βιβλίο έχει βελτιωθεί σημαντικά λόγω αυτών των παρατηρήσεων.

Ασκήσεις

Η μεγάλη ποικιλία ασκήσεων όλων των επιπέδων δυσκολίας δίνει στους καθηγητές μεγάλη ελευθερία να οργανώσουν το μάθημά τους ανάλογα με τις δυνατότητες των φοιτητών τους. Οι ασκήσεις με λύσεις στο τέλος του βιβλίου έχουν γαλάζια αρίθμηση, ενώ εκείνες που οι λύσεις τους παρέχονται σε διαφορετικό εγχειρίδιο (εγχειρίδιο λύσεων) έχουν αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του τρία. Υπάρχουν ασκήσεις κάθε τύπου που δεν έχουν απάντηση ούτε σε αυτό το βιβλίο ούτε στο εγχειρίδιο λύσεων, ώστε οι καθηγητές να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν οποιονδήποτε συνδυασμό ασκήσεων, με ή χωρίς λύσεις. Ο μεγάλος αριθμός ασκήσεων παρέχει στους καθηγητές σημαντικές δυνατότητες επιλογής προβλημάτων για χρήση τόσο σε εξετάσεις όσο και σε επαναληπτικά μαθήματα. Οι καθηγητές θα πρέπει να προτιμούν τις ασκήσεις που διατυπώνονται με τη μορφή ερωτήσεων αντί εκείνων που ζητούν να «αποδειχθεί ότι», ώστε να ενθαρρύνεται η συζήτηση στην τάξη σχετικά με το ρόλο της απόδειξης και του αντιπαραδείγματος στην επίλυση προβλημάτων.

Ελαστικές ενότητες

Οι περισσότερες ενότητες χωρίζονται σε υποενότητες ώστε όταν ο καθηγητής πιέζεται από το χρόνο να μπορεί να παραλείψει συγκεκριμένες ενότητες ή να τις αφήσει να τις διαβάσουν μόνοι τους οι φοιτητές. Ο χωρισμός σε υποενότητες βοηθάει τον διδάσκοντα να χωρίσει σε τμήματα μια ενότητα, στην περίπτωση που θέλει να αφιερώσει περισσότερα από ένα μαθήματα γι' αυτή.

Παρουσίαση των αποδεικτικών μεθόδων

Είναι αναπόφευκτο οι αποδείξεις και ανασκευές σε αυτό το βιβλίο να φαίνονται πολύ εύκολες στους καθηγητές. Πολλοί φοιτητές, όμως, τις βρίσκουν δύσκολες. Σε αυτό το βιβλίο, επιχειρώ να δείξω στους φοιτητές τον τρόπο σύνταξης και δόμησης αποδείξεων και ανασκευών, περιγράφοντας τα είδη των προσεγγίσεων που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί όταν αντιμετωπίζουν δύσκολα προβλήματα στην έρευνά τους.

Βιβλίο καθηγητή

Το βιβλίο καθηγητή είναι διαθέσιμο σε οποιονδήποτε διδάσκει χρησιμοποιώντας το παρόν βιβλίο. Το βιβλίο καθηγητή περιέχει προτάσεις για τον τρόπο προσέγγισης της ύλης κάθε κεφαλαίου, λύσεις για όλες τις ασκήσεις που δεν λύνονται πλήρως στο Παράρτημα Β, διαφάνειες, επαναληπτικό υλικό, ιδέες για εργασίες και επιπλέον ασκήσεις.

Τα νέα χαρακτηριστικά της τρίτης έκδοσης

Οι αλλαγές που έγιναν σε αυτή την έκδοση βασίστηκαν σε προτάσεις συναδέλφων και άλλων αναγνωστών της πρώτης και της δεύτερης έκδοσης, και στη συνεχιζόμενη επαφή με φοιτητές μαθηματικών και επιστήμης των υπολογιστών.

Βελτιωμένη παιδαγωγική προσέγγιση

- Ο αριθμός των ασκήσεων αυξήθηκε στις 2.500 περίπου. Προστέθηκαν περίπου 980 νέες ασκήσεις.
- Προστέθηκαν ασκήσεις στα θέματα στα οποία υπήρχε μεγαλύτερη ανάγκη για εξάσκηση και τροποποιήθηκαν κατάλληλα ώστε να ληφθούν καλύτερα υπόψη οι δυσκολίες των φοιτητών.
- Στο Παράρτημα Β προστέθηκαν περισσότερες πλήρεις λύσεις ώστε να βοηθηθούν οι φοιτητές στα δύσκολα θέματα.
- Ο τρόπος παρουσίασης των θεμάτων επανεξετάστηκε σε όλο το βιβλίο και όπου κρίθηκε σκόπιμο αναθεωρήθηκε.
- Έγινε προσεκτική δουλειά για να βελτιωθεί η μορφή και η παρουσίαση του κειμένου.
- Επεκτάθηκαν οι συζητήσεις για ιστορικά θέματα και πρόσφατα αποτελέσματα και αυξήθηκαν οι φωτογραφίες των επιστημόνων των οποίων η δουλειά παρουσιάζεται στο βιβλίο.

Λογική

- Η παρουσίαση των ποσοδεικτών έχει επεκταθεί σημαντικά, με την προσθήκη μιας νέας ενότητας αφιερωμένης αποκλειστικά στους πολλαπλούς ποσοδείκτες.
- Προστέθηκαν ασκήσεις που χρησιμοποιούν τον Κόσμο του Tarski, ένα υπέροχο παιδαγωγικό εργαλείο που αναπτύχθηκε από τους Jon Barwise και John Etchemendy του Πανεπιστημίου του Stanford.
- Προστέθηκαν εφαρμογές για την αναζήτηση στο Διαδίκτυο.
- Απλοποιήθηκαν οι όροι διαφόρων μορφών συλλογισμών.

Εισαγωγή στην απόδειξη

- Επεκτάθηκαν οι οδηγίες συγγραφής αποδείξεων.
- Οι περιγραφές μεθόδων αποδείξεων γράφτηκαν με σαφέστερο τρόπο.
- Οι ασκήσεις έχουν επανελεγχθεί και κάποιες έχουν μεταφερθεί σε άλλο σημείο ώστε να διευκολυνθεί η κατανόηση από τους φοιτητές.

Επαγωγή και επανάληψη

- Βελτιώθηκε η σκιαγράφηση των αποδείξεων με μαθηματική επαγωγή.
- Οι υποενότητες της ενότητας των ακολουθιών οργανώθηκαν εκ νέου.
- Οι ομάδες ασκήσεων των ενοτήτων της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής και της καλής διάταξης, και των επαγωγικών/επαναληπτικών ορισμών επεκτάθηκαν σημαντικά.

Θεωρία αριθμών

- Προστέθηκε μια υποενότητα ανοιχτών προβλημάτων στη θεωρία αριθμών, και επεκτάθηκε η συζήτηση για τις πρόσφατες εξελίξεις.
- Προστέθηκε μια νέα ενότητα στην αριθμητική υπολοίπων και στην κρυπτογραφία. Περιλαμβάνεται μια συζήτηση για την κρυπτογραφία RSA, το μικρό θεώρημα του Fermat και το κινέζικο θεώρημα υπολοίπων.
- Η συζήτηση για τον έλεγχο αν ένας ακέραιος είναι πρώτος μεταφέρθηκε αργότερα στο Κεφάλαιο 3 για να γίνει σαφής η εξάρτησή του από την έμμεση επιχειρηματολογία.

Θεωρία συνόλων

- Οι ιδιότητες του κενού συνόλου παρουσιάζονται πλέον στην πρώτη ενότητα του Κεφαλαίου 5.
- Η δεύτερη ενότητα του Κεφαλαίου 5 είναι πλέον αφιερωμένη αποκλειστικά σε αποδείξεις στοιχείων.
- Οι αλγεβρικές αποδείξεις των συνολοθεωρητικών ιδιοτήτων και η χρήση αντιπαράδειγμάτων στην ανασκευή ιδιοτήτων συνόλων έχουν μεταφερθεί στην τρίτη ενότητα του Κεφαλαίου 5.
- Η παρουσίαση των αλγεβρών Boole έχει επεκταθεί και επισημαίνεται η σχέση ανάμεσα στις λογικές ισοδυναμίες, τις ιδιότητες συνόλων, και τις άλγεβρες Boole.

Συνδυαστική και διακριτές πιθανότητες

- Προστέθηκαν ασκήσεις στην ενότητα του διωνυμικού θεωρήματος.
- Προστέθηκαν δύο νέες ενότητες στις πιθανότητες, όπου μεταξύ άλλων καλύπτονται η αναμενόμενη τιμή, η δεσμευμένη πιθανότητα και η ανεξαρτησία, και το θεώρημα Bayes.
- Εξηγούνται οι συνδυαστικές πτυχές των διευθύνσεων του διαδικτυακού πρωτοκόλλου (Internet Protocol, IP).

Συναρτήσεις

- Οι ασκήσεις για ένα προς ένα και επί συναρτήσεις έχουν βελτιωθεί.
- Έχει επεκταθεί το σύνολο των ασκήσεων στην πληθικότητα με εφαρμογές στην υπολογισιμότητα.

Αποδοτικότητα των αλγορίθμων

- Οι Ενότητες 9.2 και 9.4 επανεξετάστηκαν και προστέθηκαν οι συμβολισμοί Θ και Ω .
- Οι Ενότητες 9.3 και 9.5 έχουν αναθεωρηθεί αντίστοιχα, με καλύτερη επεξήγηση της έννοιας της διάταξης για έναν αλγόριθμο.
- Η εξέταση της ταξινόμησης με εισαγωγή και της ταξινόμησης με επιλογή βελτιώθηκε και επεκτάθηκε.

Κανονικές εκφράσεις και αυτόματα πεπερασμένων καταστάσεων

- Οι προηγούμενες διάσπαρτες ενότητες για τις τυπικές γλώσσες και τα αυτόματα πεπερασμένων καταστάσεων συνενώθηκαν σε ένα αυτόνομο κεφάλαιο.
- Προστέθηκε μια νέα ενότητα για τις κανονικές εκφράσεις, καθώς και μια συζήτηση για τη σχέση ανάμεσα στις κανονικές εκφράσεις και στα αυτόματα πεπερασμένων καταστάσεων.

Ιστοσελίδα

Δημιουργήθηκε μια ιστοσελίδα γι' αυτό το βιβλίο που περιέχει πληροφορίες και υλικό τόσο για τους φοιτητές όσο και για τους διδάσκοντες. Περιέχει:

- περιγραφές και συνδέσμους σε πολλές σελίδες στο Διαδίκτυο με προσβάσιμες πληροφορίες σχετικά με τα διακριτά μαθηματικά,
- συνδέσμους σε μικροεφαρμογές που παρουσιάζουν ή προσφέρουν εξάσκηση σε θέματα διακριτών μαθηματικών,
- πρόσθετα παραδείγματα και ασκήσεις με λύσεις,
- οδηγούς επανάληψης για τα κεφάλαια του βιβλίου.

Μια ειδική ενότητα για τους διδάσκοντες περιέχει:

- διαφάνειες και ηλεκτρονικές διαφάνειες σε αρχεία τύπου PowerPoint,
- επιπλέον ασκήσεις για εξετάσεις.

Οδηγός για τη χρήση του βιβλίου με τις λύσεις

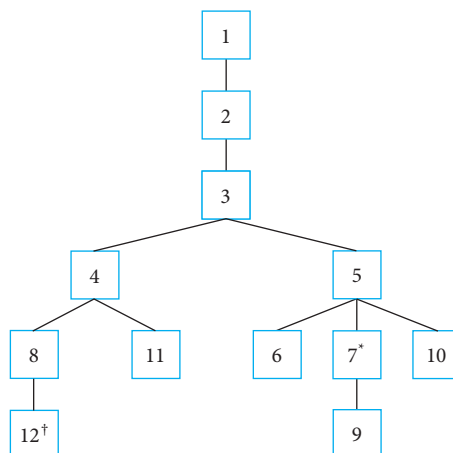
Κατά τη συγγραφή αυτού του βιβλίου, προσπάθησα να δώσω αρκετή βοήθεια στους φοιτητές μέσω της παρουσίασης της ύλης, των λυμένων παραδειγμάτων, και των λύσεων των ασκήσεων ώστε να έχουν στη διάθεσή τους ό,τι χρειάζεται για την πλήρη κατανόηση του μαθήματος. Πιστεύω ότι οι φοιτητές που θα ολοκληρώσουν τη μελέτη αυτού του βιβλίου και θα κατάφερον να λύσουν μόνοι τους όλες τις ασκήσεις που έχουν λυθεί στο Παράρτημα Β, θα κατανοήσουν πολύ καλά το αντικείμενο. Όμως, γνωρίζω ότι κάποιοι φοιτητές θα θέλουν να έχουν πρόσβαση σε επιπλέον βοηθητικό υλικό. Γι' αυτόν το λόγο, έχω γράψει τον οδηγό λύσεων και μελέτης για το φοιτητή, που διατίθεται ξεχωριστά από αυτό το βιβλίο, και περιέχει τις πλήρεις λύσεις των ασκήσεων οι οποίες δεν είναι πλήρως λυμένες στο Παράρτημα Β και που ο αριθμός τους διαιρείται με το 3. Αυτός ο οδηγός περιέχει εναλλακτικές επεξηγήσεις για κάποιες έννοιες και ερωτήσεις επανάληψης για κάθε κεφάλαιο.

Οργάνωση του βιβλίου

Αυτό το βιβλίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για ένα μάθημα ενός ή δύο εξαμήνων. Κάθε κεφάλαιο περιέχει κύριες ενότητες, ενότητες με προαιρετικό υλικό και ενότητες με προαιρετικές εφαρμογές. Οι διδάσκοντες έχουν την άνεση να επιλέξουν όποιο υποσύνολο θεωρούν ότι ταιριάζει καλύτερα με το μάθημα και τους φοιτητές τους. Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τη διαίρεση των εννοιών σε κατηγορίες.

Κεφάλαιο	Κύρια ενότητα	Ενότητες με προαιρετικό μαθηματικό υλικό	Ενότητες με προαιρετικές εφαρμογές στους υπολογιστές
1	1.1–1.3		1.4, 1.5
2	2.1–2.4	2.2, 2.3	2.3
3	3.1–3.4, 3.6	3.5, 3.7	3.8
4	4.1–4.2	4.3–4.4	4.5
5	5.1	5.2–5.4	5.4
6	6.1–6.4	6.5–6.9	6.3
7	7.1–7.2	7.3–7.5	7.1, 7.2, 7.5
8	8.1, 8.2	8.3, 8.4	8.4
9	9.1, 9.2	9.4	9.3, 9.5
10	10.1–10.3	10.4, 10.5	10.4, 10.5
11	11.1, 11.5	11.2, 11.3, 11.4	11.1, 11.2, 11.5, 11.6
12	12.1, 12.2	12.3	12.1–12.3

Το δενδροειδές διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει, κατά προσέγγιση, την αλληλοεξάρτηση των κεφαλαίων. Τα κεφάλαια που βρίσκονται σε διαφορετικά κλαδιά του δέντρου είναι αρκετά ανεξάρτητα ώστε οι διδάσκοντες να μη χρειάζεται να κάνουν σημαντικές προσαρμογές αν τα προσπεράσουν και απλώς ακολουθήσουν τις διαδρομές κατά μήκος των κλαδιών του δέντρου.



Ευχαριστίες

Χρωστάω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε πολλούς ανθρώπους στο Πανεπιστήμιο του DePaul για την υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια που δούλεα πάνω στις εκδόσεις αυτού του βιβλίου. Κάποιοι συνάδελφοι χρησιμοποίησαν πρώιμες μορφές και προηγούμενες εκδόσεις του βιβλίου και μου έκαναν εξαιρετικά σχόλια για βελτιώσεις. Γι' αυτό, ευχαριστώ τους Louis Aquila, J. Marshall Ash, Allan Berele, Jeffrey Bergen, William Chin, Barbara Cortzen, Constantine Georgakis, Sigrun Goes, Jerry Goldman, Lawrence Gluck, Leonid Krop, Carolyn Narasimhan, Walter Pranger, Eric Rieders, Ayse Sahin, Yuen-Fat Wong, και ειδικότερα την Jeanne LaDuke. Οι χιλιάδες φοιτητές στους οποίους δίδαξα διακριτά μαθηματικά είχαν σημαντικότερη επίδραση στη μορφή του βιβλίου. Μοιράζοντας τις σκέψεις τους και τους τρόπους σκέψης τους μαζί μου, με δίδαξαν πώς να διδάσκω καλύτερα. Τους οφείλω ευγνωμοσύνη για τη βοήθειά τους. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στη διοίκηση του Πανεπιστημίου του DePaul, ιδιαίτερα στον Κοσμήτορα, Michael Mezey, και στον πρώην Κοσμήτορα, Richard Meister, που θεώρησαν αξιόλογη ακαδημαϊκή εργασία τη συγγραφή αυτού του βιβλίου.

Ευχαριστώ τους διορθωτές για τις πολύτιμες παρατηρήσεις τους γι' αυτή την έκδοση του βιβλίου: τους Pablo Echeverria του Camden County College, William Gasarch του University of Maryland, Joseph Kolibal του University of Southern Mississippi, Benny Lo του International Technological University, George Luger του University of New Mexico, Norman Richert του University of Houston-Clear Lake, Peter Williams του California State University at San Bernardino και τον Jay Zimmerman του Towson University. Για τη βοήθειά τους στην πρώτη και δεύτερη έκδοση αυτού του βιβλίου, είμαι ευγνώμων στους Itshak Borosh, Texas A & M University, Douglas M. Campbell, Brigham Young University, David G. Cantor, University of California at Los Angeles, C. Patrick Collier, University of Wisconsin-Oshkosh, Kevan H. Croteau, Francis Marion University, Irinel Drogan, University of Texas at Arlington, Henry A. Etlinger, Rochester Institute of Technology, Melvin J. Friske, Wisconsin Lutheran College, Ladnor Geissinger, University of North Carolina, Jerrold R. Griggs, University of South Carolina, Nancy Baxter Hastings, Dickinson College, Lillian Hupert, Loyola University Chicago, Leonard T. Malinowski, Finger Lakes Community College, John F. Morrison, Towson State University, Paul Pederson, University of Denver, George Peck, Arizona State University, Roxy Peck, California Polytechnic State University, San Luis Obispo, Dix Pettey, University of Missouri, Anthony Ralston, State University of New York at Buffalo, John Roberts, University of Louisville, και George Schultz,

*Οι διδάσκοντες που προτιμούν να ορίσουν τη συνάρτηση ως διμελή σχέση μπορούν να καλύψουν την Ενότητα 10.1 πριν την Ενότητα 7.1.

†Η Ενότητα 10.3 χρειάζεται για την Ενότητα 12.3 αλλά όχι για τις Ενότητες 12.1 και 12.2.

St. Petersburg Junior College, Clearwater. Πολλές ευχαριστίες οφείλω επίσης στους John Carroll, San Diego State University, Dr. Joseph S. Fulda, και Porter G. Webster, University of Southern Mississippi για την απίστευτη επιμέλειά τους και την ενθάρρυνση που μου έδωσαν.

Επίσης ωφελήθηκα πάρα πολύ από τις παρατηρήσεις πολλών διδασκόντων που μου πρόσφεραν γενναιόδωρα τις ιδέες τους για βελτιώσεις βασισμένες στις εμπειρίες τους από τις προηγούμενες εκδόσεις του βιβλίου. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στους Goldstine, Pennsylvania State University, David Hecker, St. Joseph's University, Tom Jenkyns, Brock University, Robert Messer, Albion College, Piotr Rudnicki, University of Alberta, Anwar Shiek, Diné College, Norton Starr, Amherst College. Είχα επίσης εξαιρετη βοήθεια από τους John Banks, Christopher Novak, DePaul University, και Ian Crewe, Ascension Collegiate School, κατά τη διάρκεια της παραγωγής του βιβλίου.

Χρωστώ ευγνωμοσύνη σε πολλούς ανθρώπους στις εταιρείες Wadsworth and Brooks/Cole Publishing, ιδιαίτερα τον εκδότη μου, Robert Pirtle, για την ικανότητά του να πραγματοποιεί καλά πράγματα ως δια μαγείας, τους προηγούμενους εκδότες μου, Heather Bennett και Barbara Holland, για την ενθάρρυνση και τον ενθουσιασμό τους, και τη διευθύντρια παραγωγής, Janet Hill, για την κατανόησή της και την προθυμία της να μου επιτρέψει να έχω ρόλο σε όλα τα στάδια της παραγωγής. Δεν μπορώ να φανταστώ καλύτερη διευθύντρια παραγωγής από τη Martha Emry, της οποίας τα υψηλής ποιότητας πρότυπα και η προσοχή της στις λεπτομέρειες ήταν πάντα εμπνευσμένες. Ο σχεδιασμός της Kathleen Cunningham και η φωτοσύνθεση από την Techsetters, Inc. θα εκτιμηθούν από όλους τους αναγνώστες του βιβλίου.

Όσο μεγαλώνω τόσο συνειδητοποιώ το τεράστιο χρέος που οφείλω στους δικούς μου δασκάλους των μαθηματικών που διαμόρφωσαν τον τρόπο με τον οποίο βλέπω το αντικείμενο. Τα πρώτα μου ευχαριστώ πρέπει να πάνε στο σύζυγό μου, Helmut Epp, ο οποίος, σε ένα ραντεβού όταν ακόμα ήμουν στο Γυμνάσιο (!), με εισήγαγε στη δύναμη και την ομορφιά των αξιωμάτων των μαθηματικών και την άποψη ότι τα μαθηματικά είναι ένα αντικείμενο τόσο με ιδέες όσο και με τύπους και τεχνικές. Όσον αφορά την εκπαίδευσή μου, είμαι ευγνώμων στους Daniel Zelinsky και Ky Fan του Northwestern University και Izaak Wirszup, I. N. Herstein και Irving Kaplansky του University of Chicago, που όλοι τους, ο καθένας με το δικό του τρόπο, με βοήθησαν να εκτιμήσω την κομψότητα και αυστηρότητα των μαθηματικών, αλλά και τη συγκίνηση που προκαλούν.

Στην οικογένειά μου, χρωστώ ευχαριστίες πέρα από κάθε όριο. Είμαι ευγνώμων στη μητέρα μου που το ευγενικό ενδιαφέρον της για τα έργα της ανθρώπινης διάνοησης με έβαλαν πριν πολλά χρόνια στο δρόμο που οδήγησε σε αυτό το βιβλίο, και στον εκλιπόντα πατέρα μου, που η αφοσίωσή του στα βιβλία ήταν σταθερή πηγή έμπνευσης. Ευχαριστώ τα παιδιά μου και τα εγγόνια μου για την αγάπη τους και την αποδοχή των απαιτήσεων που επέβαλλε η συγγραφή αυτού του βιβλίου στη ζωή μου. Και περισσότερο από κάθε άλλον, είναι ευγνώμων στο σύζυγό μου που για πολλά χρόνια με ενθάρρυνε με την πίστη του στην αξία αυτής της εργασίας και με υποστήριξε με την αγάπη του και τις σοφές συμβουλές του.

Susanna Epp

62. Υποθέστε ότι το $a[1], a[2], a[3], \dots, a[m]$ είναι διάνυσμα και θεωρήστε το ακόλουθο τμήμα αλγορίθμου:

```
sum := 0
for k := 1 to m
    sum := sum + a[k]
next k
```

Συμπληρώστε τα κενά παρακάτω ώστε κάθε τμήμα του αλγορίθμου να κάνει την ίδια δουλειά με το παραπάνω.

α. $sum := 0$ β. $sum := 0$
 for $i := 0$ to _____ for $j := 2$ to _____
 $sum :=$ _____ $sum :=$ _____
 next i next j

Χρησιμοποιήστε διαδοχικές διαιρέσεις με το 2 για να μετατρέψετε (με το χέρι) τους ακεραίους των Ασκήσεων 63–65 από τη βάση 10 στη βάση 2.

63. 90 64. 98 65. 205

Κατασκευάστε έναν πίνακα για να καταγράψετε όλα τα βήματα του Αλγορίθμου 4.1.1 με είσοδο τις Ασκήσεις 66–68.

66. 23 67. 28 68. 44

69. Γράψτε μια μη τυπική περιγραφή αλγορίθμου (χρησιμοποιώντας διαδοχικές διαιρέσεις με το 16) για να μετατρέψετε ένα μη αρνητικό ακέραιο από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα (με βάση το 16).

Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο που αναπτύξατε για την Άσκηση 69 για να μετατρέψετε τους ακεραίους των Ασκήσεων 70–72 στο δεκαεξαδικό σύστημα.

70. 287 71. 693 72. 2,301

73. Γράψτε μια τυπική περιγραφή του αλγορίθμου που αναπτύξατε στην Άσκηση 69.

4.2 Μαθηματική επαγωγή I

[Η μαθηματική επαγωγή είναι] η συνήθης αποδεικτική τεχνική στην επιστήμη των υπολογιστών.

— Anthony Ralston, 1984

Η μαθηματική επαγωγή είναι μία από τις πιο πρόσφατα ανεπτυγμένες αποδεικτικές μεθόδους στην ιστορία των μαθηματικών. Χρησιμοποιείται για την επαλήθευση εικασιών που αφορούν σε αποτελέσματα διαδικασιών που εμφανίζονται κατ' επανάληψη και σύμφωνα με καθορισμένα μοτίβα. Θα παρουσιάσουμε αυτή την τεχνική με ένα παράδειγμα.

Μερικοί ισχυρίζονται ότι το λεπτό του αμερικάνικου δολαρίου είναι τόσο μικρό νόμισμα ώστε πρέπει να αποσυρθεί. Λένε ότι αν πέσει από τα χέρια κάποιου αυτός σπανίως θα σκύψει να το πάρει. Άλλοι ισχυρίζονται ότι αν αποσυρθεί το λεπτό θα υπάρχουν προβλήματα με την ευελιξία στον καθορισμό των τιμών των αγαθών. Ποιες τιμές θα μπορούσαν να εξοφληθούν με το ακριβές αντίτιμο στην περίπτωση απόσυρσης του λεπτού και αντικατάστασής του με ένα νόμισμα αξίας 3¢; Η απάντηση είναι ότι οι μόνες τιμές που δεν θα μπορούσαν να πληρωθούν με το ακριβές αντίτιμο είναι οι 1¢, 2¢, 4¢, και 7¢. Με άλλα λόγια,

Μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό τουλάχιστον 8 λεπτών χρησιμοποιώντας νομίσματα των 3¢ και 5¢.

Ποιο τυπικά:

Για όλους τους ακεραίους $n \geq 8$, μπορούμε να πάρουμε n λεπτά χρησιμοποιώντας νομίσματα αξίας 3¢ και 5¢.

Ακόμα πιο τυπικά:

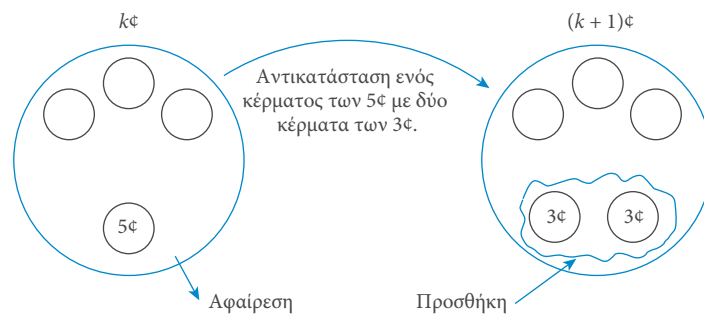
Για όλους τους ακεραίους $n \geq 8$, η $P(n)$ είναι αληθής, όπου $P(n)$ είναι η πρόταση «μπορούμε να πάρουμε n λεπτά χρησιμοποιώντας νομίσματα αξίας 3¢ και 5¢».

Θα μπορούσατε να ελέγξετε ότι η $P(n)$ είναι αληθής για λίγες συγκεκριμένες τιμές του n , όπως κάνουμε στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός Λεπτών	Πώς λαμβάνεται
8¢	3¢ + 5¢
9¢	3¢ + 3¢ + 3¢
10¢	5¢ + 5¢
11¢	3¢ + 3¢ + 5¢
12¢	3¢ + 3¢ + 3¢ + 3¢
13¢	3¢ + 5¢ + 5¢
14¢	3¢ + 3¢ + 3¢ + 5¢
15¢	5¢ + 5¢ + 5¢
16¢	3¢ + 3¢ + 5¢ + 5¢
17¢	3¢ + 3¢ + 3¢ + 3¢ + 5¢

Οι περιπτώσεις που φαίνονται στον πίνακα μας δίνουν επαγωγικού τύπου στοιχεία για να υποστηρίξουμε ότι η $P(n)$ είναι αληθής για όλα τα n . Πράγματι, η $P(n)$ είναι αληθής για όλα τα $n \geq 8$ αν, και μόνο αν, είναι εφικτό να συνεχίσουμε να συμπληρώνουμε τον πίνακα για οσοδήποτε μεγάλες τιμές του n .

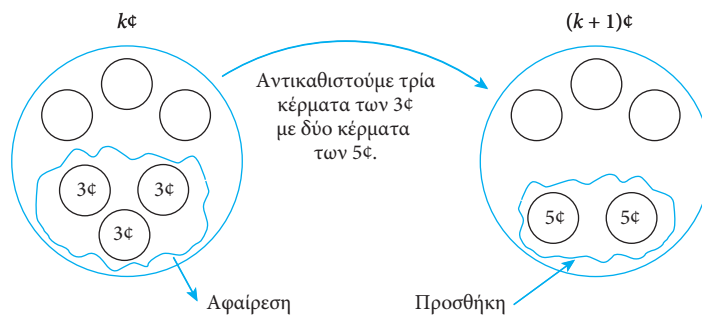
Η k γραμμή του πίνακα δίνει πληροφορίες για το πώς θα πάρουμε k ¢ χρησιμοποιώντας κέρματα των 3¢ και των 5¢. Για να συνεχίσουμε τον πίνακα στην επόμενη γραμμή, πρέπει να δώσουμε οδηγίες για το πώς θα υπολογιστούν τα $(k+1)$ ¢ χρησιμοποιώντας κέρματα των 3¢ και 5¢. Το μυστικό είναι να παρατηρήσουμε πρώτα ότι αν μπορούμε να υπολογίσουμε k ¢ χρησιμοποιώντας τουλάχιστον ένα κέρμα των 5¢, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε $(k+1)$ ¢ αντικαθιστώντας το κέρμα των 5¢ με δύο κέρματα των 3¢, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2.1.



Σχήμα 4.2.1

Αν, από την άλλη μεριά, τα k ¢ λαμβάνονται χωρίς χρήση του κέρματος των 5¢, τότε χρησιμοποιούνται μόνο κέρματα των 3¢. Και αφού το σύνολο είναι τουλάχιστον 8¢, πρέπει να περιλαμβάνονται τρία ή περισσότερα κέρματα των 3¢. Για να πάρουμε ένα σύνολο $(k+1)$ ¢, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τρία από τα κέρματα των 3¢ με δύο των 5¢ όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2.2 της επόμενης σελίδας.

Η δομή του παραπάνω επιχειρήματος μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά ως εξής: Για να δείξουμε ότι η $P(n)$ είναι αληθής για όλους τους ακραίους $n \geq 8$, (1) δείχνουμε ότι η $P(8)$ είναι αληθής, και (2) δείχνουμε ότι η αλήθεια της $P(k+1)$ προκύπτει απαραίτητα από την αλήθεια της $P(k)$ για κάθε $k \geq 8$. Κάθε επιχείρημα αυτής της μορφής καλείται επιχείρημα μαθηματικής επαγωγής.



Σχήμα 4.2.2

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής

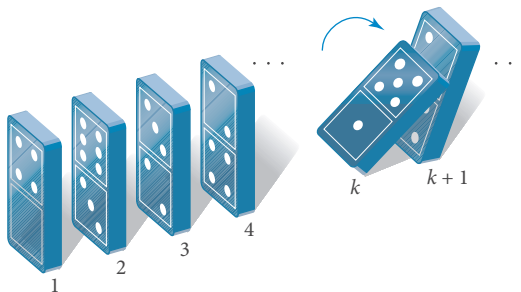
Έστω ότι η $P(n)$ είναι μια ιδιότητα που ορίζεται για ακραίους n , και έστω ότι ο a είναι ένας συγκεκριμένος ακέραιος. Υποθέτουμε ότι οι ακόλουθες δυο προτάσεις είναι αληθείς:

1. Η $P(a)$ είναι αληθής.
2. Για όλους τους ακραίους $k \geq a$, αν η $P(k)$ είναι αληθής τότε και η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Τότε ισχύει η πρόταση
για όλους τους ακραίους $n \geq a$, η $P(n)$ είναι αληθής.

Η πρώτη γνωστή καταγεγραμμένη μαθηματική επαγωγή βρίσκεται στα γραπτά του Ιταλού επιστήμονα Francesco Maurolico το 1575. Την ίδια τεχνική χρησιμοποιούσαν κατά το δέκατο έβδομο αιώνα και οι Pierre de Fermat και Blaise Pascal. Ο Fermat ονόμαζε την επαγωγή «μέθοδο της άπειρης καθόδου» («method of infinite descent»). Το 1883 ο Augustus De Morgan (γνωστός από τους κανόνες De Morgan) περιέγραψε προσεκτικά τη διαδικασία και την ονόμασε *μαθηματική επαγωγή*.

Για να πάρετε μια διαισθητική εικόνα για τη μαθηματική επαγωγή, φανταστείτε μια άπειρη συλλογή από ντόμινο τοποθετημένα το ένα πίσω από το άλλο με τέτοιο τρόπο ώστε αν ένα ντόμινο πέσει να ρίξει και το επόμενο. (Δείτε το Σχήμα 4.2.3.) Φανταστείτε τώρα ότι πέφτει το πρώτο ντόμινο. Τι θα συμβεί; ... Θα πέσουν όλα!

Σχήμα 4.2.3 Όταν πέφτει το k ντόμινο, ρίχνει και το $(k+1)$.

Για να δείτε τη σχέση ανάμεσα σε αυτή την εικόνα και την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, υποθέστε ότι η $P(n)$ είναι η πρόταση «το n ντόμινο πέφτει». Υποθέτουμε ότι για κάθε $k \geq 1$, αν η $P(k)$ είναι αληθής (το k ντόμινο πέφτει), τότε η $P(k+1)$ είναι επίσης αληθής (το $(k+1)$ ντόμινο πέφτει). Υποθέτουμε επίσης ότι η $P(1)$ είναι αληθής (το πρώτο ντόμινο πέφτει). Έτσι, από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η $P(n)$ (το n ντόμινο πέφτει) είναι αληθής για κάθε $n \geq 1$.

Η ισχύς της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή θεωρείται αξίωμα. Γι' αυτόν το λόγο αναφερόμαστε σε αυτή ως *αρχή* της μαθηματικής επαγωγής αντί ως θεώρημα. Είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη ιδιότητα των ακεραίων, που εύκολα τη δέχεται κανείς ως αληθή με βάση τη διαίσθησή του:

Υποθέτουμε ότι το S είναι οποιοδήποτε σύνολο ακεραίων που ικανοποιεί (1) $a \in S$, και (2) για όλους τους ακεραίους k , αν $k \in S$ τότε $k + 1 \in S$. Τότε το S πρέπει να περιέχει κάθε ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο του a .

Για να κατανοήσουμε την ισοδυναμία των δυο διατυπώσεων, απλώς ορίζουμε ως S το σύνολο όλων των ακεραίων για τους οποίους η $P(n)$ είναι αληθής.

Η απόδειξη ενός επιχειρήματος με μαθηματική επαγωγή είναι μια διαδικασία δύο βημάτων. Το πρώτο βήμα λέγεται *αρχικό βήμα* ή *βήμα έναρξης*, και το δεύτερο *επαγωγικό βήμα*.

Η μέθοδος απόδειξης με μαθηματική επαγωγή

Θεωρήστε μια πρόταση της μορφής, «για όλους τους ακεραίους $n \geq a$, η ιδιότητα $P(n)$ είναι αληθής». Για να αποδείξουμε μια τέτοια πρόταση ακολουθούμε τα παρακάτω δύο βήματα:

Βήμα 1 (αρχικό βήμα): Δείχνουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = a$.

Βήμα 2 (επαγωγικό βήμα): Δείχνουμε ότι για όλους τους ακεραίους $k \geq a$, αν η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k$ τότε είναι αληθής για $n = k + 1$. Για να πραγματοποιήσουμε αυτό το βήμα,

υποθέτουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k$, όπου k είναι οποιοσδήποτε συγκεκριμένος, αλλά τυχαία επιλεγμένος, ακέραιος με $k \geq a$.

[Αυτή η υπόθεση ονομάζεται **επαγωγική υπόθεση**.]

Έτσι

δείχνουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k + 1$.

Δίνουμε εδώ την τυπική απόδειξη για τα κέρματα που διατυπώσαμε χωρίς τυπικό τρόπο προηγουμένως.

Πρόταση 4.2.1

Έστω ότι η $P(n)$ είναι η ιδιότητα « $n\text{€}$ μπορούν να υπολογιστούν με κέρματα των 3€ και 5€ ». Τότε η $P(n)$ είναι αληθής για όλους τους ακεραίους $n \geq 8$.

Απόδειξη:

Δείξτε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 8$: Η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 8$ επειδή $8\text{€} = 3\text{€} + 5\text{€}$.

Δείξτε ότι για όλους τους ακεραίους $k \geq 8$, αν η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k$, τότε είναι αληθής και για $n = k + 1$: Υποθέτουμε ότι μπορούμε να πάρουμε $k\text{€}$ χρησιμοποιώντας κέρματα των 3€ και των 5€ για κάποιο ακέραιο $k \geq 8$. [Αυτή είναι η *επαγωγική υπόθεση*.] Πρέπει να δείξουμε τώρα ότι μπορούμε να πάρουμε και $(k + 1)\text{€}$ χρησιμοποιώντας κέρματα των 3€ και 5€ . Αν υπάρχει κέρμα των 5€ ανάμεσα σε αυτά που απαρτίζουν τα $k\text{€}$, το αντικαθιστούμε με δύο κέρματα των 3€ · το αποτέλεσμα θα είναι $(k + 1)\text{€}$. Αν δεν υπάρχει κέρμα των 5€ σε αυτά που απαρτίζουν τα $k\text{€}$, τότε πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 3 κέρματα των 3€ , αφού $k \geq 8$. Αφαιρούμε αυτά τα τρία κέρματα των 3€ και τα αντικαθιστούμε με δύο των 5€ · το αποτέλεσμα θα είναι $(k + 1)\text{€}$. Έτσι, σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να πάρουμε $(k + 1)\text{€}$ χρησιμοποιώντας κέρματα των 3€ και των 5€ , [όπως έπρεπε να δείχθει].

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει πώς χρησιμοποιούμε τη μαθηματική επαγωγή για να αποδείξουμε έναν τύπο που δίνει το άθροισμα των πρώτων n ακεραίων.

Παράδειγμα 4.2.1 Άθροισμα των n πρώτων ακεραίων

Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή για να αποδείξετε ότι

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{για όλους τους ακεραίους } n \geq 1.$$

Λύση Για να κατασκευάσετε μια απόδειξη με επαγωγή, πρέπει πρώτα να βρείτε ποια είναι η ιδιότητα $P(n)$. Σε αυτή την περίπτωση, η $P(n)$ είναι

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \leftarrow \text{η ιδιότητα } (P(n))$$

[Για να δείτε ότι η $P(n)$ είναι μια πρόταση, παρατηρήστε ότι το αντικείμενό της είναι «το άθροισμα των ακεραίων από το 1 μέχρι το n » και το ρήμα της είναι το «ισούται».]

Στο αρχικό βήμα της απόδειξης, πρέπει να δείξετε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 1$ ή με άλλα λόγια, ότι η $P(1)$ είναι αληθής. Τώρα για να βρούμε την $P(1)$ αντικαθιστούμε 1 στη θέση του n στην $P(n)$. Το αριστερό σκέλος της $P(1)$ είναι το άθροισμα όλων των διαδοχικών ακεραίων που ξεκινούν με το 1 και τελειώνουν στο 1. Αυτό είναι απλώς το 1. Έτσι η $P(1)$ είναι η

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}. \quad \leftarrow \text{αρχική } (P(1))$$

Φυσικά, αυτή η εξίσωση είναι αληθής διότι το δεξιό σκέλος είναι

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1,$$

που ισούται με το αριστερό σκέλος.

Στο επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι η $P(k)$ είναι αληθής για κάποιον ακέραιο k με $k \geq 1$. [Αυτή είναι η επαγωγική υπόθεση.] Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής. Ποιες είναι οι $P(k)$ και $P(k+1)$; Για να βρούμε την $P(k)$ αντικαθιστούμε k στη θέση κάθε n στην $P(n)$. Έτσι, η $P(k)$ είναι η

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad \leftarrow \text{επαγωγική υπόθεση } (P(k))$$

Παρόμοια, για να βρούμε την $P(k+1)$ αντικαθιστούμε κάθε n της $P(n)$ με την ποσότητα $(k+1)$. Έτσι, η $P(k+1)$ είναι

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

ή ισοδύναμα,

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad \leftarrow \text{να δειχθεί η } (P(k+1))$$

Τώρα η επαγωγική υπόθεση είναι ότι η $P(k)$ είναι αληθής. Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την υπόθεση για να δείξουμε ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής; Η $P(k+1)$ είναι μια εξίσωση, και η αλήθεια μιας εξίσωσης μπορεί ναδειχθεί με διάφορους τρόπους. Ένας από τους πιο άμεσους είναι να μετασχηματίσουμε το αριστερό σκέλος στο δεξιό χρησιμοποιώντας άλγεβρα και άλλους γνωστούς κανόνες και έγκυρες υποθέσεις, μεταξύ των οποίων και την επαγωγική υπόθεση. Σε αυτή την περίπτωση, το αριστερό σκέλος της $P(k+1)$ είναι

$$1 + 2 + \cdots + (k+1),$$

που ισούται με

$$(1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) \quad \text{προσδιορισμός του προτελευταίου όρου και ομαδοποίηση}$$

Αλλά με αντικατάσταση από την επαγωγική υπόθεση,

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \begin{array}{l} \text{αφού η επαγωγική υπόθεση λέει} \\ \text{ότι } 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \end{array} \end{aligned}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε άλγεβρα για να δείξουμε ότι αυτή η έκφραση ισούται με το δεξιό σκέλος της $P(k+1)$:

$$\begin{aligned} & \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \quad \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και πα-} \\ \text{ρονομαστή του δεύτερου όρου με το} \\ \text{2 για να πάρουμε κοινό παρονομα-} \\ \text{στή} \end{array} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \quad \text{με πρόσθεση κλασμάτων} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \quad \text{βγάζουμε κοινό παράγοντα το } (k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \begin{array}{l} \text{υπολογίζουμε τους παράγοντες} \\ (k+1) \text{ και } (k+2) \end{array} \end{aligned}$$

που ισούται με το δεξιό σκέλος της $P(k+1)$.

Συνοψίζουμε την παραπάνω ανάλυση ως εξής:

Θεώρημα 4.2.2 Άθροισμα των πρώτων n ακεραίων

Για όλους τους ακεραίους $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Απόδειξη (με μαθηματική επαγωγή):

Έστω ότι η ιδιότητα $P(n)$ είναι η εξίσωση $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Δείχνουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 1$: Για να δείξουμε την ιδιότητα για $n = 1$, πρέπει να δείξουμε ότι $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Αλλά το αριστερό σκέλος της εξίσωσης είναι 1, και το δεξιό είναι $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ και αυτό. Άρα η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 1$.

συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

Δείχνουμε ότι για όλους τους ακεραίους $k \geq 1$, αν η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k$ τότε είναι αληθής για $n = k + 1$:

[Υποθέτουμε ότι η ιδιότητα $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ είναι αληθής για κάποιον ακέραιο $k \geq 1$ στη θέση του n .]

Υποθέτουμε ότι $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, για κάποιον ακέραιο $k \geq 1$.

[Αυτή είναι η επαγωγική υπόθεση.]

[Πρέπει να δείξουμε ότι η ιδιότητα $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ είναι αληθής όταν αντικαταστήσουμε το $k + 1$ στη θέση του n .]

Πρέπει να δείξουμε ότι $1 + 2 + \dots + (k + 1) = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2}$, ή ισοδύναμα ότι $1 + 2 + \dots + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$. 4.2.1

[Θα δείξουμε ότι το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (4.2.1) ισούται με το δεξιό σκέλος.]

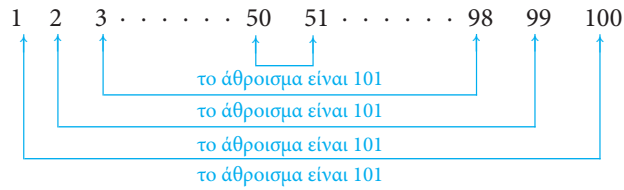
Αλλά το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (4.2.1) είναι το

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (k + 1) &= (1 + 2 + \dots + k) + (k + 1) && \text{Ο προτελευταίος όρος είναι ο } k \text{ γιατί οι όροι} \\ &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) && \text{είναι διαδοχικοί ακέραιοι και ο τελευταίος εί-} \\ &= \frac{k(k + 1)}{2} + \frac{(k + 1) \cdot 2}{2} && \text{ναι ο } k + 1. \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}, && \text{με αντικατάσταση από την επαγωγική υπόθεση} \end{aligned}$$

που είναι το δεξιό σκέλος της εξίσωσης (4.2.1) [όπως έπρεπε να δειχθεί].

[Αφού δείξαμε και το αρχικό και το επαγωγικό βήμα, συμπεραίνουμε ότι το θεώρημα είναι αληθές.]

Λέγεται μια ιστορία για έναν από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, τον Carl Friedrich Gauss (1777–1855), σύμφωνα με την οποία όταν ήταν μικρό παιδί ο δάσκαλος του ζήτησε να προσθέσει τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 100. Ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές να υπολογίσουν το άθροισμα, ώστε να τους απασχολήσει για να μπορέσει εκείνος να διορθώσει γραπτά. Αλλά λίγες στιγμές αργότερα ο Gauss βρήκε την σωστή απάντηση. Είναι περιττό να πούμε ότι ο δάσκαλος τα έχασε. Πώς μπόρεσε ο νεαρός Gauss να υπολογίσει τόσο γρήγορα; Τα επόμενα χρόνια ο Gauss εξήγησε ότι είχε φανταστεί τους αριθμούς σε ζευγάρια σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα.



Το άθροισμα κάθε ζεύγους είναι 101, και υπάρχουν 50 ζεύγη· άρα το συνολικό άθροισμα είναι $50 \cdot 101 = 5.050$.

Παράδειγμα 4.2.2 Εφαρμογές του τύπου του αθροίσματος των πρώτων n ακεραίων

α. Βρείτε το $2 + 4 + 6 + \dots + 500$.

β. Βρείτε το $5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 50$.

γ. Για οποιονδήποτε ακέραιο $h \geq 2$, βρείτε το $1 + 2 + 3 + \dots + (h - 1)$.

Λύση

$$\alpha. 2 + 4 + 6 + \dots + 500 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 250)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{250 \cdot 251}{2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{εφαρμογή του τύπου για το άθροισμα} \\ \text{των πρώτων } n \text{ ακεραίων για } n = 250 \end{array}$$

$$= 62.750.$$

$$\beta. 5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 50 = (1 + 2 + 3 + \dots + 50) - (1 + 2 + 3 + 4)$$

$$= \frac{50 \cdot 51}{2} - 10 \quad \begin{array}{l} \text{εφαρμογή του τύπου για το άθροισμα} \\ \text{των πρώτων } n \text{ ακεραίων για } n = 50 \end{array}$$

$$= 1.265$$

$$\gamma. 1 + 2 + 3 + \dots + (h - 1) = \frac{(h - 1) \cdot [(h - 1) + 1]}{2} \quad \begin{array}{l} \text{εφαρμογή του τύπου για το άθροισμα} \\ \text{των πρώτων } n \text{ ακεραίων για } n = h - 1 \end{array}$$

$$= \frac{(h - 1) \cdot h}{2} \quad \text{αφού } (h - 1) + 1 = h. \quad \blacksquare$$

Στο επόμενο παράδειγμα ζητείται να αποδειχθεί ένας άλλος διάσημος μαθηματικός τύπος — ο τύπος του αθροίσματος της γεωμετρικής προόδου. Σε μια **γεωμετρική πρόοδο**, κάθε όρος ισούται με τον προηγούμενο επί ένα σταθερό παράγοντα. Αν ο πρώτος όρος είναι 1 και ο σταθερός παράγοντας είναι r , τότε η ακολουθία είναι $1, r, r^2, r^3, \dots, r^n, \dots$. Το άθροισμα των πρώτων n όρων αυτής της ακολουθίας δίνεται από τον τύπο

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

για όλους τους ακεραίους $n \geq 0$ και τους πραγματικούς αριθμούς r που δεν είναι ίσοι με 1. Η αναπτυγμένη μορφή αυτού του τύπου είναι η

$$r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1},$$

και επειδή $r^0 = 1$ και $r^1 = r$, ο τύπος για $n \geq 1$ μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Παράδειγμα 4.2.3 Άθροισμα γεωμετρικής προόδου

Αποδείξτε ότι $\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ και για όλους τους πραγματικούς αριθμούς r διάφορους του 1.

Λύση Σε αυτό το παράδειγμα, η ιδιότητα $P(n)$ είναι πάλι μια εξίσωση, αν και σε αυτή την περίπτωση περιλαμβάνει μια πραγματική μεταβλητή r :

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}. \quad \leftarrow \text{η ιδιότητα } (P(n))$$

Αφού το r μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός εκτός του 1, ξεκινάμε την απόδειξη υποθέτοντας ότι ο r είναι ένας συγκεκριμένος αλλά τυχαία επιλεγμένος πραγματικός αριθμός διάφορος του 1. Έπειτα, συνεχίζουμε την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή στο n , αρχίζοντας με το $n = 0$. Στο αρχικό βήμα πρέπει να δείξουμε ότι η $P(0)$ είναι αληθής· δηλαδή, να δείξουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 0$. Οπότε αντικαθιστούμε 0 για κάθε n στην $P(n)$:

$$\sum_{i=0}^0 r^i = \frac{r^{0+1} - 1}{r - 1}. \quad \leftarrow \text{αρχική } (P(0))$$

Στο επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι η $P(k)$ είναι αληθής· δηλαδή, υποθέτουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k$. Οπότε αντικαθιστούμε k για κάθε n στην $P(n)$:

$$\sum_{i=0}^k r^i = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}. \quad \leftarrow \text{επαγωγική υπόθεση } (P(k))$$

Μετά δείχνουμε ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής· δηλαδή, δείχνουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k+1$. Έτσι αντικαθιστούμε $k+1$ για κάθε n στην $P(n)$:

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{(k+1)+1} - 1}{r - 1},$$

ή, εναλλακτικά,

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1}. \quad \leftarrow \text{για να δείξουμε την } (P(k+1))$$

Θεώρημα 4.2.3 Άθροισμα γεωμετρικής προόδου

Για κάθε πραγματικό αριθμό r εκτός του 1, και για κάθε ακέραιο $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Απόδειξη:

Έστω ότι η ιδιότητα $P(n)$ είναι η εξίσωση $\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$.

Υποθέτουμε ότι το r είναι ένας συγκεκριμένος αλλά τυχαία επιλεγμένος πραγματικός αριθμός διάφορος του 1. Πρέπει να δείξουμε ότι για όλους τους ακεραίους $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Θα το δείξουμε με μαθηματική επαγωγή στο n .

Δείχνουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 0$: Για $n = 0$ πρέπει να δείξουμε ότι

$$\sum_{i=0}^0 r^i = \frac{r^{0+1} - 1}{r - 1}.$$

Το αριστερό σκέλος αυτής της εξίσωσης είναι το $r^0 = 1$. Το δεξιό σκέλος είναι

$$\frac{r^1 - 1}{r - 1} = \frac{r - 1}{r - 1} = 1$$

ξανά αφού $r^1 = r$ και $r \neq 1$. [Οπότε η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 0$.]

Δείχνουμε ότι για όλους τους ακέραιους $k \geq 0$, αν η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k$ τότε είναι αληθής για $n = k + 1$:

[Υποθέτουμε ότι η ιδιότητα $\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$ είναι αληθής όταν ένας ακέραιος $k \geq 0$ αντικατασταθεί στη θέση του n .]

Υποθέτουμε ότι $\sum_{i=0}^k r^i = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}$, για $k \geq 0$. [Αυτή είναι η επαγωγική υπόθεση.]

[Πρέπει να δείξουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k + 1$.]

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{(k+1)+1} - 1}{r - 1}. \quad 4.2.2$$

[Θα δείξουμε ότι το αριστερό σκέλος αυτής της εξίσωσης ισούται με το δεξιό.]

Αλλά το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (4.2.2) είναι το

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \sum_{i=0}^k r^i + r^{k+1} && \text{γράφουμε τον } (k+1) \text{ όρο ξεχωριστά από} \\ &&& \text{τους πρώτους } k \text{ όρους} \\ &= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + r^{k+1} && \text{με αντικατάσταση από} \\ &&& \text{την επαγωγική υπόθεση} \\ &= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + \frac{r^{k+1}(r - 1)}{r - 1} && \text{πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον} \\ &&& \text{παρονομαστή του δεύτερου όρου με } (r - 1) \\ &&& \text{για να έχουμε κοινό παρονομαστή} \\ &= \frac{(r^{k+1} - 1) + r^{k+1}(r - 1)}{r - 1} && \text{πρόσθεση κλασμάτων} \\ &= \frac{r^{k+1} - 1 + r^{k+2} - r^{k+1}}{r - 1} && \text{πολλαπλασιασμός και χρήση του} \\ &&& r^{k+1} \cdot r = r^{k+1+1} = r^{k+2}. \\ &= \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1} && \text{διαγραφή των } r^{k+1}. \end{aligned}$$

που είναι το δεξιό σκέλος της εξίσωσης (4.2.2) [όπως έπρεπε να δειχθεί].

[Αφού αποδείξαμε το αρχικό και το επαγωγικό βήμα, συμπεραίνουμε ότι το θεώρημα είναι αληθές.]

Παρατηρήστε ότι ο τύπος για το άθροισμα γεωμετρικής προόδου μπορεί να θεωρηθεί ως μια οικογένεια διαφορετικών τύπων για κάθε r , εκτός του 1.

Παράδειγμα 4.2.4 Εφαρμογή του τύπου του αθροίσματος γεωμετρικής προόδου

Σε καθένα από τα (α) και (β) παρακάτω, υποθέστε ότι ο m είναι ένας ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 3.

α. Βρείτε το $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{m-2}$.

β. Βρείτε το $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^m$.

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{m-2} &= \frac{3^{(m-2)+1} - 1}{3 - 1} && \text{εφαρμόζουμε τον τύπο του αθροίσματος} \\ &= \frac{3^{m-1} - 1}{2}. && \text{γεωμετρικής προόδου για } r = 3 \text{ και } n = m - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^m &= 3^2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{m-2}) && \text{κοινός παράγοντας το } 3^2 \\ &= 9 \cdot \left(\frac{3^{m-1} - 1}{2} \right) && \text{από το (α).} \end{aligned}$$

Όπως και στον τύπο για το άθροισμα των πρώτων n ακεραίων, υπάρχει τρόπος να σκεφτεί κανείς τον τύπο του αθροίσματος γεωμετρικής προόδου που τον κάνει να φαίνεται απλός και διαισθητικά κατανοητός. Έστω ότι

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n.$$

Τότε

$$rS_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1},$$

και άρα

$$rS_n - S_n = (r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1}) - (1 + r + r^2 + \dots + r^n) = r^{n+1} - 1. \quad 4.2.3$$

Αλλά

$$rS_n - S_n = (r - 1)S_n. \quad 4.2.4$$

Εξισώνοντας τα δεξιά σκέλη των εξισώσεων (4.2.3) και (4.2.4) και διαιρώντας με το $r - 1$ παίρνουμε

$$S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Αυτός ο τρόπος παραγωγής του τύπου είναι ελκυστικός και πειστικός. Όμως, δεν είναι τόσο αυστηρά λογικός όπως η απόδειξη με μαθηματική επαγωγή. Για να πάμε από το ένα βήμα στο άλλο στους παραπάνω υπολογισμούς, υποθέτουμε ότι οι όροι μεταξύ των αποσιωπητικών (...) έχουν συγκεκριμένη εμφάνιση και όταν απαλείφονται συμβαίνουν αυτά που θέλουμε να συμβούν. Αλλά είναι αδύνατον να εξετάσουμε κάθε έναν από αυτούς τους όρους και κάθε υπολογισμό, και έτσι η ακρίβεια αυτών των ισχυρισμών δεν μπορεί να ελεγχθεί πλήρως. Η μαθηματική επαγωγή μας επιτρέπει να εστιάσουμε στο τι ακριβώς συμβαίνει μεταξύ των αποσιωπητικών και να επαληθεύσουμε χωρίς καμία αμφιβολία ότι οι υπολογισμοί είναι αληθείς.

Ομάδα ασκήσεων 4.2

- Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή (και την απόδειξη της Πρότασης 4.2.1 ως μοντέλο) για να δείξετε ότι οποιαδήποτε ποσότητα χρημάτων μεγαλύτερη ή ίση των 14¢ μπορεί να υπολογιστεί με νομίσματα των 3¢ και των 8¢.
- Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή για να δείξετε ότι τα ταχυδρομικά τέλη 12¢ ή παραπάνω, μπορούν να υπολογιστούν με γραμματόσημα των 3¢ και των 7¢.

3. Για κάθε θετικό ακέραιο n , έστω $P(n)$ ο τύπος

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- α. Γράψτε την $P(1)$. Είναι η $P(1)$ αληθής;
 β. Γράψτε την $P(k)$.
 γ. Γράψτε την $P(k+1)$.
 δ. Σε μια απόδειξη με μαθηματική επαγωγή του τύπου για όλους τους ακραίους $n \geq 1$, τι πρέπει να δειχθεί στο επαγωγικό βήμα;
4. Για κάθε ακέραιο n με $n \geq 2$, έστω $P(n)$ ο τύπος

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

- α. Γράψτε την $P(2)$. Είναι η $P(2)$ αληθής;
 β. Γράψτε την $P(k)$.
 γ. Γράψτε την $P(k+1)$.
 δ. Σε μια απόδειξη με μαθηματική επαγωγή του τύπου για όλους τους ακραίους $n \geq 2$, τι πρέπει να δειχθεί στο επαγωγικό βήμα;
5. Συμπληρώστε τα τμήματα που λείπουν στην ακόλουθη απόδειξη ότι

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 1$.

Απόδειξη: Έστω ότι η ιδιότητα $P(n)$ είναι η εξίσωση

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n.$$

Δείξτε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 1$: Για να επιβεβαιώσουμε τον τύπο για $n = 1$, πρέπει να δείξουμε ότι όταν αντικαταστήσουμε το 1 στη θέση του n , το αριστερό σκέλος ισούται με το δεξιό. Αλλά όταν $n = 1$, το αριστερό σκέλος είναι το άθροισμα όλων των περιττών ακραίων από το 1 έως το $2 \cdot 1 - 1$, που είναι το άθροισμα των περιττών ακραίων από το 1 έως το 1, που είναι απλά 1. Το δεξιό σκέλος είναι (α), που πάλι ισούται με 1. Έτσι η ιδιότητα είναι αληθής για $n = 1$.

Δείξτε ότι για όλους τους ακραίους $k \geq 1$, αν η ιδιότητα είναι αληθής για $n = k$ τότε είναι αληθής για $n = k + 1$: Έστω k ένας ακέραιος με $k \geq 1$.

[Υποθέστε ότι η ιδιότητα $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ είναι αληθής όταν αντικαταστήσουμε το n με k .]

Υποθέστε ότι $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = \underline{(β)}$.

[Αυτή είναι η επαγωγική υπόθεση.]

[Πρέπει να δείξουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής όταν αντικαταστήσουμε το n με $k + 1$.]

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\underline{(γ)} = \underline{(δ)}. \quad 4.2.5$$

Αλλά το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (4.2.5) είναι το

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2(k+1)-1) &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2k+1) \quad \text{μετά από πράξεις} \\ &= [1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)] + (2k+1) \\ &\quad \text{ο προτελευταίος όρος είναι } 2k-1 \text{ διότι } \underline{(ε)} \\ &= k^2 + (2k+1) \quad \text{αφού } \underline{(β)} \\ &= (k+1)^2 \quad \text{μετά από πράξεις} \end{aligned}$$

που είναι το δεξιό σκέλος της εξίσωσης (4.2.5) [όπως έπρεπε να δειχθεί].

[Αφού αποδείξαμε το αρχικό και το επαγωγικό βήμα, συμπεραίνουμε ότι ο τύπος είναι αληθής.]

Η παραπάνω απόδειξη είχε πολλές επεξηγήσεις για να γίνει κατανοητή η λογική ροή της. Συνήθως, αυτά τα σχόλια παραλείπονται.

Αποδείξτε κάθε πρόταση στις Ασκήσεις 6–9 χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Μην τις αποδείξετε με το Θεώρημα 4.2.2 ή το Θεώρημα 4.2.3.

6. Για όλους τους ακραίους $n \geq 1$,

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n.$$

7. Για όλους τους ακραίους $n \geq 1$,

$$1 + 6 + 11 + 16 + \dots + (5n-4) = \frac{n(5n-3)}{2}.$$

8. Για όλους τους ακραίους $n \geq 0$,

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

9. Για όλους τους ακραίους $n \geq 3$,

$$4^3 + 4^4 + 4^5 + \dots + 4^n = \frac{4(4^n - 16)}{3}.$$

Αποδείξτε καθέναν από τους τύπους στις Ασκήσεις 10–17 χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

10. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, για όλους τους ακραίους $n \geq 1$.

11. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$, για όλους τους ακραίους $n \geq 1$.

12. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, για όλους τους ακραίους $n \geq 1$.

13. $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$, για όλους τους ακραίους $n \geq 2$.

14. $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+2} + 2$, για όλους τους ακραίους $n \geq 0$.

- Υ 15. $\sum_{i=1}^n i(i!) = (n+1)! - 1$, για όλους τους ακραίους $n \geq 1$.

16. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$, για όλους τους ακραίους $n \geq 2$.

17. $\prod_{i=0}^n \left(\frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{2i+2} \right) = \frac{1}{(2n+2)!}$, για όλους τους ακραίους $n \geq 0$.

- Υ * 18. Αν ο x είναι ένας πραγματικός αριθμός που δεν διαιρείται με το π , τότε για όλους τους ακραίους $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2n-1)x \\ = \frac{1 - \cos 2nx}{2 \sin x}. \end{aligned}$$

Susanna S. Epp

Διακριτά Μαθηματικά με εφαρμογές

Τρίτη αμερικανική έκδοση

Δεύτερη βελτιωμένη ελληνική έκδοση

Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια παρουσίαση των Διακριτών Μαθηματικών για φοιτητές Επιστήμης των Υπολογιστών, Μαθηματικών, και Μηχανολογίας. Στόχος του βιβλίου είναι να θέσει τις μαθηματικές βάσεις σε μαθήματα της Επιστήμης των Υπολογιστών, όπως οι δομές δεδομένων, οι αλγόριθμοι, η θεωρία βάσεων δεδομένων, η θεωρία αυτομάτων, οι τυπικές γλώσσες, ο σχεδιασμός μεταγλωττιστών, και η κρυπτογραφία, αλλά και σε θέματα των μαθηματικών όπως η γραμμική και αφηρημένη άλγεβρα, η συνδυαστική, οι πιθανότητες, η λογική, η θεωρία συνόλων, και η θεωρία αριθμών.

Τα Διακριτά Μαθηματικά αποτελούν πλέον βασικό αντικείμενο μελέτης του κλάδου της Επιστήμης των Υπολογιστών. Οργανισμοί όπως τα αμερικανικά επιμελητήρια IEEE-CS (Institute for Electrical and Electronic Engineers Computer Society) και ACM (Association for Computer Machinery) προτείνουν τη διδασκαλία του μαθήματος των Διακριτών Μαθηματικών για ένα τουλάχιστον εξάμηνο κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους σπουδών. Το συγκεκριμένο βιβλίο καλύπτει όλα τα θέματα που προτείνουν οι παραπάνω οργανισμοί, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία του μαθήματος είτε σε ένα είτε σε δύο εξάμηνα.

Τα κυριότερα χαρακτηριστικά του βιβλίου είναι τα εξής:

- Περιλαμβάνει όλα τα θέματα που καλύπτονται συνήθως σε ένα εισαγωγικό μάθημα Διακριτών Μαθηματικών, όπως: λογική και απόδειξη, επαγωγή και επανάληψη, συνδυαστική και διακριτές πιθανότητες, αλγόριθμοι και ανάλυση, και εφαρμογές στη μοντελοποίηση.
- Συνδυάζει τη θεωρία με την πράξη, βοηθώντας τον αναγνώστη να αντιληφθεί ότι τα μαθηματικά, εκτός από το ότι είναι ενδιαφέροντα από μόνα τους, έχουν και σημαντικές εφαρμογές.
- Διδάσκει στους φοιτητές — με διεξοδικό αλλά και κατανοητό τρόπο — την κρυφή λογική και επιχειρηματολογία στην οποία βασίζεται η μαθηματική σκέψη.
- Αναπτύσσει τις μαθηματικές έννοιες σταδιακά, με ολοένα και πιο σύνθετες μορφές, γεγονός που διευκολύνει και ενισχύει τη δόμηση της μαθηματικής αντίληψης με φυσικό τρόπο.
- Το βιβλίο είναι κατάλληλο επίσης για αυτοδιδασκαλία, καθώς περιέχει περισσότερα από 500 λυμένα παραδείγματα και 2500 ασκήσεις διαφόρων επιπέδων δυσκολίας. Οι πιο δύσκολες από τις ασκήσεις συνοδεύονται από υποδείξεις για την επίλυσή τους, ενώ οι λύσεις ενός μέρους αυτών των ασκήσεων παρατίθενται στο Παράρτημα Β του βιβλίου.
- Η μεγάλη ποικιλία ασκήσεων για όλα τα επίπεδα δυσκολίας δίνει στους διδάσκοντες τη δυνατότητα να οργανώσουν το μάθημά τους ανάλογα με τις δυνατότητες των φοιτητών τους.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ

Σοφοκλή 4, Σηφίας Ρεμόνης, 10440 ΑΘΗΝΑ, Τηλ: 210-5237035

Επισκεφθείτε μας στο Internet:
www.klidarithmos.gr

ISBN 978-960-461-325-0



9 789604 613250