

Χρήστος Β. Σιρόπουλος

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

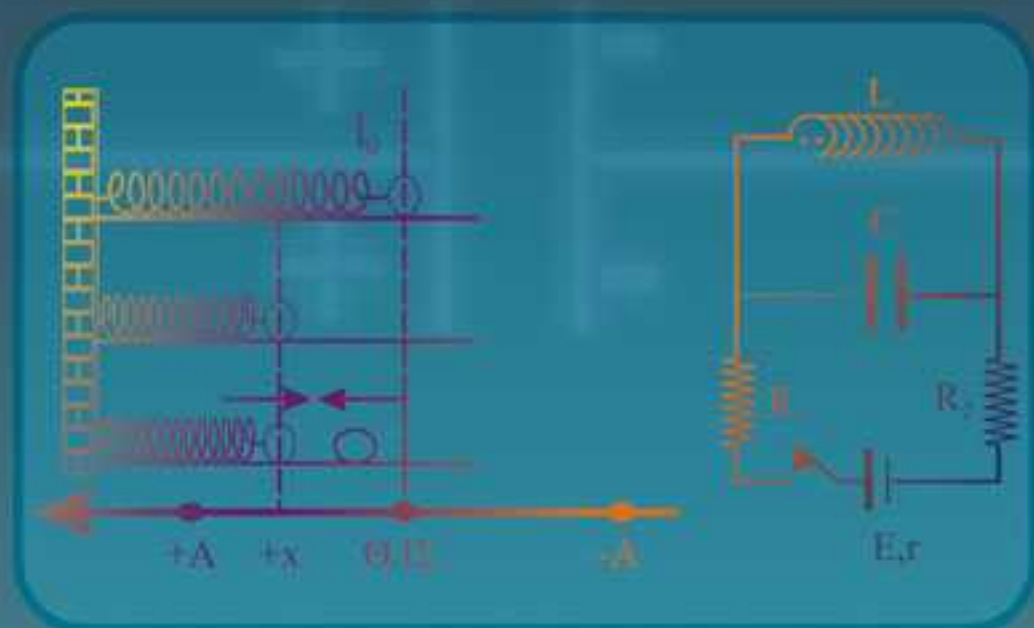
ΦΥΣΙΚΗ

Γ' Λυκείου

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΕ ΑΠΛΑ ΒΗΜΑΤΑ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	7
ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ	9
○ Θεωρία	9
○ Ερωτήσεις	9
○ Μεθοδολογία	16
○ Παραδείγματα	26
○ Ασκήσεις	33
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ.....	39
○ Θεωρία	39
○ Ερωτήσεις	39
○ Μεθοδολογία	43
○ Παραδείγματα	48
○ Ασκήσεις	65
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ.....	75
○ Θεωρία	75
○ Ερωτήσεις	75
○ Μεθοδολογία	78
○ Παραδείγματα	82
○ Ασκήσεις	111
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	129
○ Θεωρία	129
○ Ερωτήσεις	129
○ Μεθοδολογία	134
○ Παραδείγματα	145
○ Ασκήσεις	152
ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ.....	165
○ Θεωρία	165
○ Ερωτήσεις	165
○ Μεθοδολογία	168
○ Παραδείγματα	172
○ Ασκήσεις	177
ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ.....	187
○ Θεωρία	187
○ Ερωτήσεις	187

○ Μεθοδολογία.....	190
○ Παραδείγματα.....	192
○ Ασκήσεις.....	199
ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ.....	209
○ Θεωρία.....	209
○ Ερωτήσεις.....	210
○ Παραδείγματα.....	212
○ Ασκήσεις.....	215
ΕΝΟΤΗΤΑ 8: ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ.....	217
○ Θεωρία.....	217
○ Ερωτήσεις.....	218
○ Ασκήσεις.....	220
ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ.....	223
○ Θεωρία.....	223
○ Ερωτήσεις.....	224
○ Παραδείγματα.....	224
○ Ασκήσεις.....	228
ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ.....	233
○ Θεωρία.....	233
○ Ερωτήσεις.....	234
○ Παραδείγματα.....	235
○ Ασκήσεις.....	236
ΕΝΟΤΗΤΑ 11: ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ.....	239
○ Θεωρία.....	239
○ Ερωτήσεις.....	240
○ Παραδείγματα.....	240
○ Ασκήσεις.....	242
ΕΝΟΤΗΤΑ 12: ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ.....	245
○ Θεωρία.....	245
○ Ερωτήσεις.....	246
○ Παραδείγματα.....	246
○ Ασκήσεις.....	248
ΕΝΟΤΗΤΑ 13: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	253
○ Μονάδες.....	253
○ Βασικές σχέσεις σε τρίγωνο.....	254
○ Σχέσεις γωνιών.....	255
○ Λογάριθμοι.....	256
○ Διαγράμματα.....	257
○ Φυσικά μεγέθη.....	259
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	263

ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

- 📖 Να διαβάσετε τις σελίδες 8 – 10 του σχολικού βιβλίου. Να προσέξετε ιδιαίτερα τα Σχήματα 1.1, 1.3 και 1.4, καθώς και τους ορισμούς της αρχικής φάσης και της φάσης ταλάντωσης.
- 📖 Να γράψετε τις μαθηματικές σχέσεις που δίνονται στη θεωρία και να αναφέρετε τα μεγέθη που περιέχουν καθώς και τις μονάδες αυτών.

$$\text{Π. χ. } T = \frac{t}{N}$$

όπου T η περίοδος της ταλάντωσης μετράται σε sec, t ο χρόνος ταλάντωσης του σώματος μετράται σε sec και N ο αριθμός επαναλήψεων του φαινομένου.

- 📖 Να απαντήσετε στις Ερωτήσεις 2, 6 και 7 του σχολικού βιβλίου.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Στις ερωτήσεις που ακολουθούν να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

- A1)** Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι κίνηση
- i) ευθύγραμμη ομαλή,
 - ii) ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη,
 - iii) ομαλή κυκλική,
 - iv) ευθύγραμμη περιοδική.

- A2)** Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του είναι
- i) ανάλογη του χρόνου,
 - ii) αρμονική συνάρτηση του χρόνου,
 - iii) ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου,
 - iv) ομόρροπη με τη δύναμη επαναφοράς.
- A3)** Η ταχύτητα v σημειακού αντικειμένου το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση
- i) είναι μέγιστη, κατά μέτρο, στη θέση $x = 0$,
 - ii) έχει την ίδια φάση με την απομάκρυνση x ,
 - iii) είναι μέγιστη στις θέσεις $x = \pm A$,
 - iv) έχει την ίδια φάση με τη δύναμη επαναφοράς.
- A4)** Η επιτάχυνση a σημειακού αντικειμένου το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση
- i) είναι σταθερή,
 - ii) είναι ανάλογη και αντίθετη της απομάκρυνσης x ,
 - iii) έχει την ίδια φάση με την ταχύτητα,
 - iv) γίνεται μέγιστη στη θέση $x = 0$.
- A5)** Η φάση της απλής αρμονικής ταλάντωσης
- i) αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο,
 - ii) είναι σταθερή,
 - iii) ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο,
 - iv) είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου.
- A6)** Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_v - \varphi_x$ μεταξύ ταχύτητας v και απομάκρυνσης x στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι
- i) π
 - ii) $\frac{\pi}{2}$
 - iii) $-\pi$
 - iv) 0

- A7) Η διαφορά φάσης $\Delta\phi = \phi_x - \phi_a$ μεταξύ απομάκρυνσης x και επιτάχυνσης a στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι
- i) 0
 - ii) π
 - iii) $-\frac{\pi}{2}$
 - iv) $-\pi$
- A8) Η διαφορά φάσης $\Delta\phi = \phi_a - \phi_v$ μεταξύ επιτάχυνσης a και ταχύτητας v στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι
- i) $\frac{\pi}{2}$
 - ii) $-\frac{\pi}{2}$
 - iii) $-\pi$
 - iv) 0

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

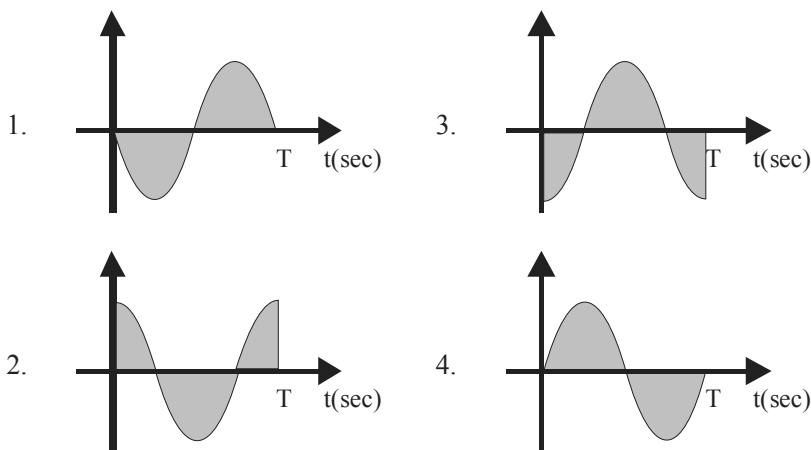
Στις ερωτήσεις που ακολουθούν να βάλετε το γράμμα Σ δίπλα σε κάθε σωστή πρόταση και το γράμμα Λ δίπλα σε κάθε λανθασμένη:

- B1) Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι ευθύγραμμη περιοδική κίνηση.
- B2) Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι ευθύγραμμη κίνηση, ομαλά μεταβαλλόμενη.
- B3) Η απομάκρυνση σημειακού αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του, όταν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.
- B4) Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του και η επιτάχυνση του a συνδέονται με την εξίσωση $a = -\omega^2 \cdot x$.
- B5) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η φάση της απομάκρυνσης x προηγείται της φάσης της ταχύτητας v κατά π .
- B6) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η φάση της απομάκρυνσης x καθυστερεί της φάσης της επιτάχυνσης a κατά π .
- B7) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η φάση της ταχύτητας v προηγείται της φάσης της επιτάχυνσης a κατά $\frac{\pi}{2}$.

- B8)** Στην απλή αρμονική ταλάντωση, το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο στη θέση $x = 0$.
- B9)** Στην απλή αρμονική ταλάντωση, το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ελάχιστο στις θέσεις $x = \pm A$.
- B10)** Στην απλή αρμονική ταλάντωση, τα διανύσματα v και a είναι πάντα αντίρροπα.

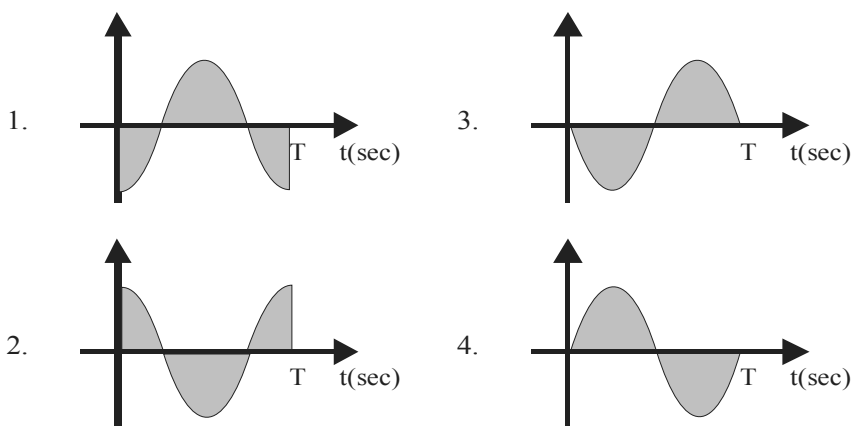
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

- Γ1)** Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση x μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $x = A \cdot \eta\mu\omega t$. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Εικόνα 1.1) αντιστοιχεί στην απομάκρυνση x , στην ταχύτητα v και στην επιτάχυνση a ;



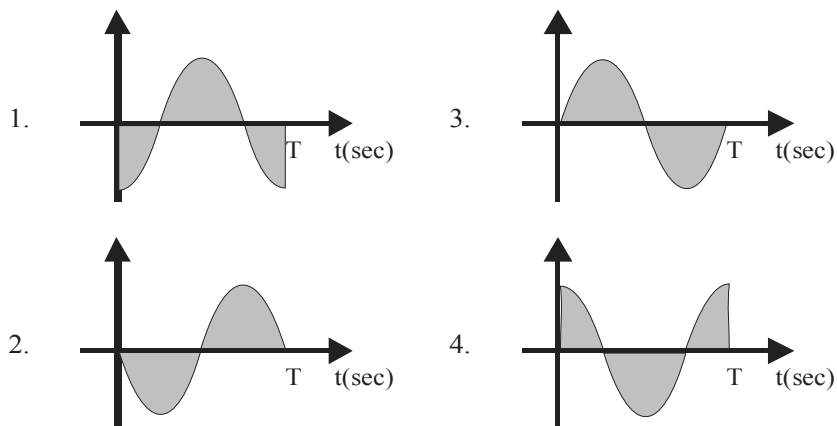
Εικόνα 1.1. Γραφικές παραστάσεις

- Γ2)** Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση x μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Εικόνα 1.2) αντιστοιχεί στην απομάκρυνση x , στην ταχύτητα v και στην επιτάχυνση a ;



Εικόνα 1.2. Γραφικές παραστάσεις

Γ3) Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η ταχύτητά του μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $v = v_0 \cdot \eta\mu\omega t$. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Εικόνα 1.3) αντιστοιχεί στην απομάκρυνση x , στην ταχύτητα v και στην επιτάχυνση a ;

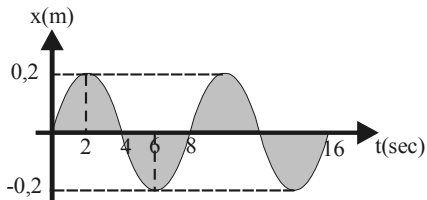


Εικόνα 1.3. Γραφικές παραστάσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Στις ερωτήσεις που ακολουθούν να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις:

- Δ1)** Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, φαίνεται στο σχήμα. Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

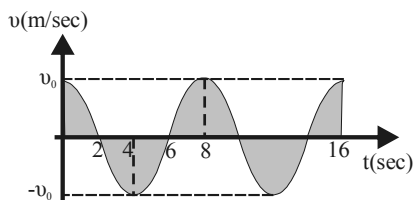


- i) Το μέτρο της ταχύτητας έχει τη μέγιστη τιμή του τις χρονικές στιγμές 0 sec, 4 sec και 8 sec.
- ii) Το μέτρο της επιτάχυνσης έχει τη μέγιστη τιμή του τις χρονικές στιγμές 2 sec και 6 sec.

iii) Τη χρονική στιγμή $t = 4$ sec το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $a = \frac{a_0}{2}$.

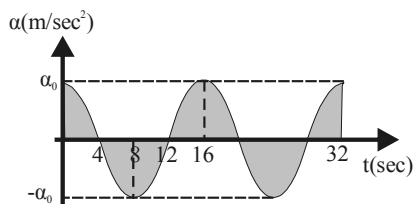
iv) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 7$ sec το μέτρο της ταχύτητας είναι μικρότερο από το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_2 = 2$ sec.

- Δ2)** Η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, φαίνεται στο σχήμα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές, ποιες είναι λανθασμένες και γιατί;



- i) Τις χρονικές στιγμές 0 sec, 4 sec και 8 sec το αντικείμενο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.
- ii) Τις χρονικές στιγμές 2 sec και 6 sec το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο.
- iii) Στο χρονικό διάστημα από 6 sec μέχρι 8 sec τα διανύσματα της ταχύτητας v και της συνισταμένης δύναμης F είναι συγγραμμικά και ομόρροπα.
- iv) Στο χρονικό διάστημα 0 sec μέχρι 2 sec το αντικείμενο κινείται προς τη θέση ισορροπίας του.

- Δ3)** Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, φαίνεται στο σχήμα. Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;



- i) Τις χρονικές στιγμές 0 sec, 8 sec και 16 sec η ταχύτητα του αντικειμένου είναι ίση με μηδέν.
- ii) Τη χρονική στιγμή $t = 14$ sec το αντικείμενο κινείται προς τη θέση ισορροπίας του.
- iii) Τις χρονικές στιγμές 4 sec και 12 sec το μέτρο της ταχύτητας του αντικειμένου έχει τη μέγιστη τιμή του.
- iv) Η ταχύτητα του αντικειμένου κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται από την εξίσωση $v = v_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \pi)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Στις ερωτήσεις που ακολουθούν να αναπτύξετε πλήρως τις απαντήσεις σας:

- E1) Ποια κίνηση λέγεται περιοδική; Να αναφέρετε τρία παραδείγματα περιοδικών κινήσεων.
- E2) Ποια κίνηση ονομάζεται ταλάντωση; Να αναφέρετε δύο παραδείγματα.
- E3) Ποια κίνηση ονομάζεται
 - i) γραμμική ταλάντωση;
 - ii) απλή αρμονική ταλάντωση;
- E4) Να αναφέρετε ένα σύστημα που θα μπορούσε να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.
- E5) Τι ονομάζουμε φάση της απλής αρμονικής ταλάντωσης; Να παραστήσετε γραφικά τη μεταβολή της φάσης σε συνάρτηση με το χρόνο.
- E6) Τι σημαίνει ο όρος «αρχική φάση»; Πώς γράφονται οι εξισώσεις $x = f(t)$, $v = f(t)$, $a = f(t)$ της απλής αρμονικής ταλάντωσης όταν υπάρχει αρχική φάση;
- E7) Ποια είναι η διαφορά φάσης μεταξύ
 - i) απομάκρυνσης – ταχύτητας;
 - ii) απομάκρυνσης – επιτάχυνσης;
 - iii) ταχύτητας – επιτάχυνσης, ενός υλικού σημείου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση;

○ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Χαρακτηριστικά μεγέθη της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι τα παρακάτω.

ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ (x ή y):

Ονομάζεται η απόσταση του σώματος κάθε χρονική στιγμή από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$ ή $y = 0$).

ΠΛΑΤΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ (A):

Ονομάζεται η μέγιστη απόσταση του σώματος από τη θέση ισορροπίας ($x = \pm A$, ή $y = \pm A$).

ΠΕΡΙΟΔΟΣ (T):

Ονομάζεται ο χρόνος που απαιτείται για να εκτελέσει το σώμα μια πλήρη ταλάντωση, δηλαδή να περάσει διαδοχικά δύο φορές από τη θέση ισορροπίας και να καταλήξει στη θέση που ξεκίνησε την ταλάντωσή του.

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ (f):

Ονομάζεται ο αριθμός των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στη μονάδα του χρόνου.

Επειδή όλα τα παραπάνω αναφέρονται αναλυτικά στη θεωρία, θα μελετήσουμε κυρίως τα μεγέθη που έχουν ιδιαίτερη σημασία. Όπως γνωρίζουμε, κάθε απλή αρμονική ταλάντωση μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε σε μια πλήρη κυκλική κίνηση. Για το λόγο αυτό στα σχήματα θα χρησιμοποιήσουμε τον τριγωνομετρικό κύκλο για την πλήρη αναπαράσταση της κίνησης μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης και την κατανόηση των εννοιών.

ΦΑΣΗ (ϕ):

Ονομάζουμε τη γωνία που καθορίζει την απομάκρυνση του σώματος ή του συστήματος σωμάτων από τη θέση ισορροπίας κάθε χρονική στιγμή t . Αυτό συμβαίνει διότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος σε κίνησή του σε κυκλική τροχιά.

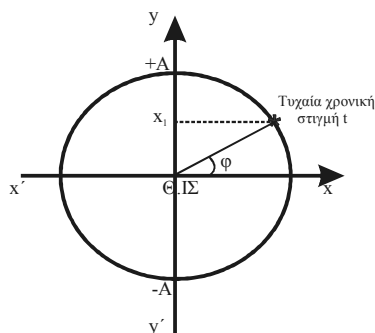
Για παράδειγμα, όταν το σώμα έχει φάση $2\pi \text{ rad}$ σημαίνει ότι βρίσκεται στη θέση που ξεκίνησε την ταλάντωσή του και έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση. Παρατηρήστε

το διπλανό σχήμα όπου φαίνεται ότι κάποια τυχαία χρονική στιγμή t το σώμα έχει φάση φ . Αυτή αντιστοιχεί στην απομάκρυνση x_1 του σώματος από τη θέση ισορροπίας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Κάθε φάση αντιστοιχεί σε μία απομάκρυνση.

Θα λέμε ότι δύο ταλαντώσεις βρίσκονται σε φάση όταν διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου T , δηλαδή $\Delta\varphi = 2k\pi$ όπου $k = 0, 1, 2, 3 \dots$



ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ:

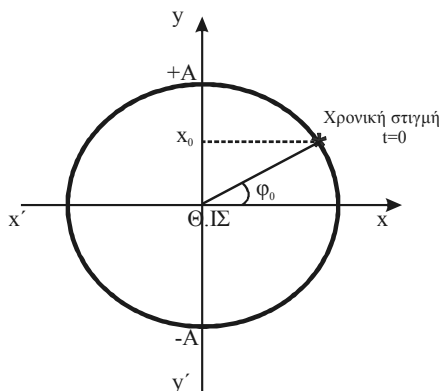
Ονομάζουμε την αρχική γωνία από τη θέση ισορροπίας, από την οποία ξεκινά το σώμα ή το σύστημα σωμάτων την ταλάντωσή του κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή μόλις αρχίζει την κίνησή του και η οποία αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη απομάκρυνση.

Το σώμα (ή το σύστημα) που ταλαντώνεται έχει αρχική φάση όταν:

- Τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει απομάκρυνση x_0 διάφορη του μηδενός ($x_0 \neq 0$). Δηλαδή ξεκινά την ταλάντωσή του από οποιαδήποτε θέση εκτός της $x = 0$ ή από τη θέση $x = 0$, έχοντας αρνητική ταχύτητα.
- Τη χρονική στιγμή $t \neq 0$ με $t \neq kT$ όπου $k = 1, 2, 3 \dots$ και T η περίοδος ταλάντωσης, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ξεκίνησε την ταλάντωσή του από μια θέση διάφορη της θέσης ισορροπίας του.
- Η εξίσωση της απομάκρυνσης που δίνεται από το πρόβλημα είναι διαφορετικής μορφής από τη γνωστή εξίσωση $x = A \cdot \eta\mu\omega t$ [π.χ $x = A \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$, οπότε θα έχω

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ άρα η αρχική φάση στο παράδειγμα είναι } \frac{\pi}{2}].$$

- Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η ταχύτητα του σώματος (ή του συστήματος) έχει τιμή μικρότερη από τη μέγιστη τιμή της.
- Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η επιτάχυνση του σώματος (ή του συστήματος) έχει τιμή διάφορη του μηδενός.



ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ (Δφ):

Μεταξύ δύο μεγεθών ονομάζεται η γωνία που αντιστοιχεί στο χρόνο που απαιτείται για να πάρει το ένα μέγεθος την αντίστοιχη τιμή ενός άλλου μεγέθους.

Για παράδειγμα, αν τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα είναι μηδέν, για να πάρει η απομάκρυνση την ίδια τιμή (δηλαδή μηδέν) περνά κάποιος χρόνος Δt . Αυτός ο χρόνος αντιστοιχεί σε κάποια γωνία η οποία ονομάζεται διαφορά φάσης. Η αντιστοιχία αυτή δίνεται από την απλή μέθοδο των τριών για τα μεγέθη χρόνος – φάση, αφού γνωρίζουμε ότι σε χρόνο μιας περιόδου T αντιστοιχεί γωνία 2π rad.

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\Delta\phi} \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \quad (1)$$

ή αλλιώς $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \omega t_1 - \omega t_2 = \omega(t_1 - t_2) \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$

Για να υπολογίσουμε τη φάση πρέπει να γνωρίζουμε τις τριγωνομετρικές σχέσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις ημιτόνων, συνημιτόνων και εφαπτομένης. Συγκεκριμένα:

α) Εάν $\eta\mu\phi = \alpha$, όπου α ένας αριθμός που αντιστοιχεί στο $\eta\mu\phi$ (π.χ. $\frac{1}{2}$).

Βρίσκω το τόξο θ που έχει ημίτονο τον αριθμό α , οπότε έχω:

$$\eta\mu\phi = \eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases} \phi = 2k\pi + \theta \\ \phi = 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}$$

Θέτοντας $k = 0$, υπολογίζω τις τιμές της γωνίας ϕ που αντιστοιχούν στην κίνηση του σώματος κατά την πρώτη πλήρη ταλάντωση.

Για παράδειγμα $\eta\mu\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\phi = \eta\mu 30^\circ \Rightarrow \eta\mu\phi = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \phi = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \phi = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

β) Εάν $\sigma\upsilon\nu\phi = \alpha$, όπου α ένας αριθμός που αντιστοιχεί στο $\sigma\upsilon\nu\phi$ (π.χ. $\frac{1}{2}$). Κατά τον ίδιο τρόπο θα έχω:

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \begin{cases} \phi = 2k\pi - \theta \\ \phi = 2k\pi + \theta \end{cases}$$

Για παράδειγμα $\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \phi = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \phi = k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

γ) Εάν $\epsilon\phi\phi = \alpha$, όπου α ένας αριθμός που αντιστοιχεί στο $\epsilon\phi\phi$ (π.χ. $\frac{1}{2}$). Όμοια όπως προηγούμενα:

$$\epsilon\phi\phi = \epsilon\phi\vartheta \Rightarrow \begin{cases} \phi = k\pi + \vartheta \\ \phi = k\pi - \vartheta \end{cases}$$

$$\text{Για παράδειγμα } \epsilon\phi\phi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \epsilon\phi\phi = \epsilon\phi 30^\circ \Rightarrow \epsilon\phi\phi = \epsilon\phi \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \phi = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \phi = k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

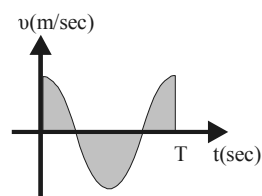
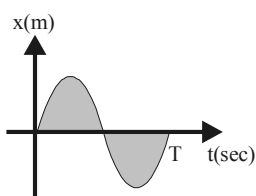
Θα πρέπει να αναφέρουμε τη σημασία της σταθεράς k στα προβλήματα των ταλαντώσεων. Η σταθερά k δηλώνει σε ποια ταλάντωση βρίσκεται το σώμα κατά την κίνησή του και όχι πόσες πλήρεις ταλαντώσεις έχει διαγράψει το σώμα. Αυτό σημαίνει ότι η σταθερά k αλλάζει κάθε φορά που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας (η οποία αντιστοιχεί στη θέση των 0° στον τριγωνομετρικό κύκλο), κινούμενο πάντα προς το θετικό ημιάξονα (η οποία αντιστοιχεί στη θέση των 90° στο τριγωνομετρικό κύκλο).

Για την κατανόηση των παραπάνω διαβάστε το Παράδειγμα 1.

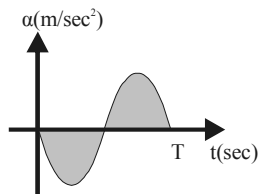
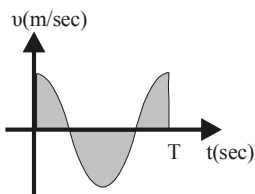
ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΜΕΓΕΘΩΝ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ:

Με βάση τις σχέσεις της ταλάντωσης και τις γραφικές παραστάσεις αυτών θα έχουμε τις διαφορές φάσεων μεταξύ των μεγεθών της απομάκρυνσης, της ταχύτητας, της επιτάχυνσης και της δύναμης, όπως φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.

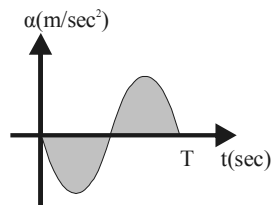
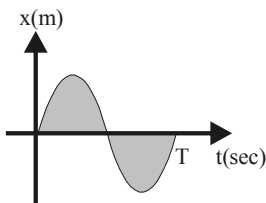
Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο και της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η απομάκρυνση x υστερεί της ταχύτητας v κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ rad.



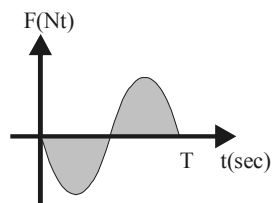
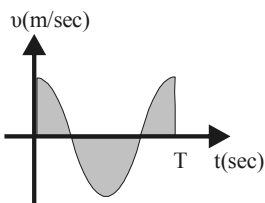
Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η ταχύτητα v υστερεί της επιτάχυνσης a κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ rad.



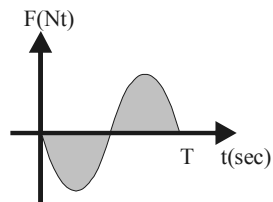
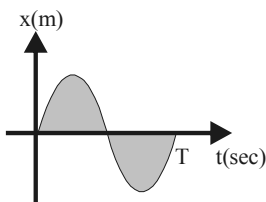
Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η απομάκρυνση x υστερεί της επιτάχυνσης a κατά γωνία π rad.



Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο και της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η ταχύτητα v υστερεί της δύναμης επαναφοράς $F_{\text{επ}}$ κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ rad.



Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο και της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η απομάκρυνση x υστερεί της δύναμης επαναφοράς $F_{\text{επ}}$ κατά γωνία π rad.



ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΓΕΘΩΝ:

Στις ασκήσεις των ταλαντώσεων αρκετές φορές θα χρειαστεί να γνωρίζουμε σχέσεις μεταξύ διαφόρων μεγεθών. Ο τρόπος εργασίας στις περιπτώσεις αυτές είναι ίδιος και οι σχέσεις αυτές αποδεικνύονται τις περισσότερες φορές με τη χρήση τριγωνομετρικών σχέσεων. Έτσι:

- Απόδειξη της σχέσης που συνδέει την απομάκρυνση με την ταχύτητα:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi) \Rightarrow \eta\mu^2(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{x^2}{A^2} \quad (1)$$

$$v = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \varphi) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{v^2}{\omega^2 \cdot A^2} \quad (2)$$

- Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι ισχύει $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$, οπότε αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2) σε αυτήν έχουμε:

$$\eta\mu^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega \cdot t + \varphi) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 \cdot A^2} = 1 \Rightarrow v^2 + \omega^2 \cdot x^2 = \omega^2 \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot A^2 - \omega^2 \cdot x^2 \Rightarrow v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\boxed{v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}}$$

- Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει και η σχέση μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης:

$$\boxed{a = \pm \omega \cdot \sqrt{v_0^2 - v^2}}$$

Προσέξτε ιδιαίτερα τη σχέση που συνδέει την απομάκρυνση με την επιτάχυνση διότι είναι πολύ απλή και χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις ασκήσεων:

$$\boxed{a = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow a = -\omega^2 \cdot x}$$

- Η εξίσωση της δύναμης είναι ίσως η βασικότερη εξίσωση των ταλαντώσεων.

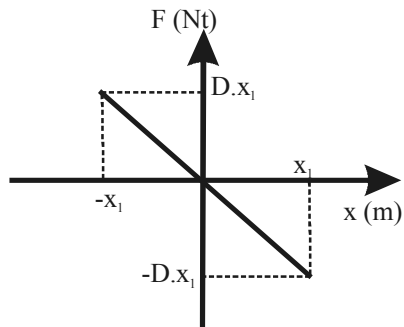
Από την εξίσωση αυτή καθορίζεται αν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ποια είναι η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί στο σώμα που ταλαντώνεται κάθε χρονική στιγμή κ.λπ. Η συνισταμένη δύναμη εκφράζεται σε συνάρτηση με την απομάκρυνση ή σε συνάρτηση με το χρόνο από τις σχέσεις:

$$\boxed{\Sigma F = F_{\epsilon\pi} = -D \cdot x} \quad \text{ή} \quad \boxed{\Sigma F = F_{\epsilon\pi} = -m \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi)}$$

Εκτός των τριών γραφικών παραστάσεων απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης που αναφέρει το σχολικό βιβλίο μπορούμε να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο, καθώς επίσης και τη γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση.

Η γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι ίδια με τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, διότι η δύναμη είναι ανάλογη της επιτάχυνσης $F = m \cdot a$ και έτσι δε χρειάζεται να τη σχεδιάσουμε.

Η γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση είναι εξίσωση πρώτου βαθμού αφού $F = -D \cdot x$ και σχεδιάζεται, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



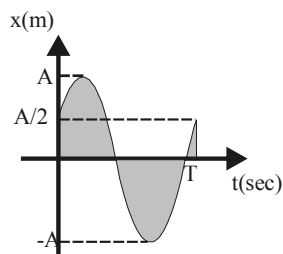
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ:

Επειδή στη φυσική δεν μας ενδιαφέρει ο λεπτομερής σχεδιασμός μιας γραφικής παράστασης, θα αναφέρουμε έναν εύκολο τρόπο για το σχεδιασμό μιας γραφικής παράστασης με αρχική φάση όπως αυτές που αναφέρει το σχολικό βιβλίο.

Εάν για παράδειγμα μάς ζητηθεί η γραφική παράσταση της εξίσωσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}), \text{ τότε σχεδιάζω την κλασσική γραφική}$$

παράσταση της απομάκρυνσης με το χρόνο χωρίς αρχική φάση και μετατοπίζω τον άξονα της απομάκρυνσης προς τα δεξιά. Η μετατόπιση γίνεται με τον εξής τρόπο:

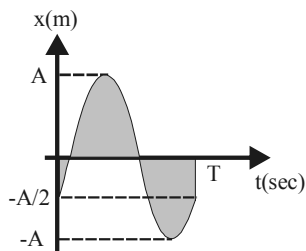


Χωρίζω το τεταρτημόριο $(0 - \frac{T}{4})$ σε τρία ίσα μέρη από τα

οποία το καθένα αντιστοιχεί σε γωνία $(\frac{\pi}{6})$ rad και μεταφέρω τον άξονα κατά το αντίστοιχο τμήμα. Τέλος, για να υπολογίσω την τιμή που αρχίζει η γραφική παράσταση θέτω στην εξίσωση της απομάκρυνσης $t = 0$ και έχω:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = A \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = A \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{A}{2}$$

Όμοια εργάζομαι για οποιαδήποτε άλλη γωνία. Εάν δε, η εξίσωση έχει αρνητική αρχική φάση η μετατόπιση του άξονα γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προς τα αριστερά. Δηλαδή:



ΦΥΣΙΚΗ Γ' Λυκείου

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΕ ΑΠΛΑ ΒΗΜΑΤΑ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Στόχος του βιβλίου είναι να βοηθήσει τους μαθητές στην προετοιμασία τους για την εισαγωγή τους στις Ανώτατες Σχολές. Δεν καταργεί το σχολικό βιβλίο, αλλά επιχειρεί να το συμπληρώσει ώστε να ετοιμαστούν οι μαθητές για τις Πανελλαδικές Εξετάσεις. Το βοήθημα που κρατάτε στα χέρια σας παρουσιάζει αναλυτικά τον τρόπο λύσης των ασκήσεων της Φυσικής και προετοιμάζει τους μαθητές για τις περιπτώσεις συνδυαστικών θεμάτων στη Φυσική. Η λύση των ασκήσεων της Φυσικής από το μαθητή είναι «παιχνίδι» — αρκεί να έχει κατά νου ότι για τη λύση, μας ενδιαφέρουν μόνο τα φαινόμενα που εμφανίζονται στην εκφώνηση.

Το βοήθημα περιλαμβάνει τις εξής ενότητες που αφορούν τις ταλαντώσεις:

- Εξισώσεις ταλάντωσης
- Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις
- Δυναμική προσέγγιση
- Σύνθεση ταλαντώσεων
- Ενέργεια ταλάντωσης
- Απαντήσεις ασκήσεων
- Ηλεκτρικές ταλαντώσεις
- Μαθηματικό παράρτημα
- Φθίνουσες ταλαντώσεις

Αγαπητοί μαθητές, μελετήστε τις αντίστοιχες ενότητες του σχολικού βιβλίου και εξασκηθείτε στα θέματα που αναφέρονται στο βοήθημα. Οι λύσεις των άλυτων παραδειγμάτων του σχολικού βιβλίου περιλαμβάνονται στο τέλος αυτού του βοηθήματος. Σας εύχομαι Καλή Επιτυχία!

Ο συγγραφέας

Ο Χρήστος Σιμόπουλος είναι πτυχιούχος του Φυσικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Εργάστηκε για τέσσερα χρόνια σε Φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης και σήμερα εργάζεται στο 8ο Γυμνάσιο Τρικάλων. Έχει παρακολουθήσει πλήθος ταχυρρυθμίων επιμορφωτικών προγραμμάτων, ήταν εισηγητής σε σεμινάρια που οργάνωσε το 6ο Ενιαίο Λύκειο Τρικάλων, ήταν υπεύθυνος επί δεκατία για το έργο «Εξ αποστάσεως πρόσβαση μαθητών στο Δίκτυο», έχει δημοσιεύσει μαζί με τους καθηγητές Γ. Δημου και Γ. Μήτακο την εργασία *Homogeneous Domain C4 and the Algebras*, και έχει γράψει μια πρωτότυπη μεθοδολογία Φυσικής για μαθητές όλων των τάξεων του Γυμνασίου και Λυκείου. Επίσης, έχει διατελέσει μέλος της ΕΛΜΕ Καρδίτσας.



εκδόσεις
ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ

Λορέκου 4, Στέλιος Λορέσης, 10440 ΑΘΗΝΑ, Τηλ: 210-5237535

Επισκεφθείτε μας στο Internet:
www.kildarithmos.gr

ISBN 978-960-461-191-1



9 789604 611911