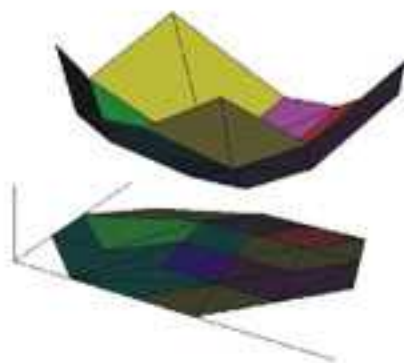
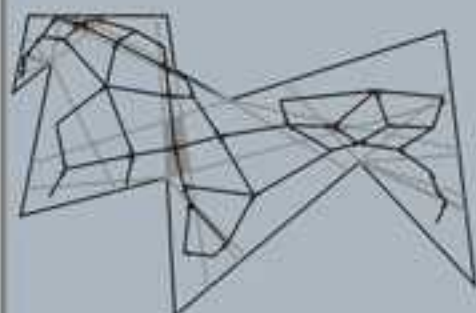


ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μια σύγχρονη
αλγοριθμική προσέγγιση



Γιάννης Ζ. Εμίνης



Περιεχόμενα

Χαιρετισμός	17
Πρόλογος	19
1 Εισαγωγή	23
1.1 Τι είναι η Υπολογιστική Γεωμετρία;	23
1.2 Εφαρμογές	25
1.3 Υπολογιστικό μοντέλο και πολυπλοκότητα	35
1.4 Δομές δεδομένων	39
I Ορατότητα	43
2 Ορατότητα στο επίπεδο	45
2.1 Απλά πολύγωνα	46
2.2 Φύλαξη μουσείου	48
2.3 Τριγωνοποίηση απλού πολυγώνου	51
2.3.1 Κατηγορήμα προσανατολισμού	53
2.4 Υποδιαίρεση σε μονότονα πολύγωνα	54
2.5 Τριγωνοποίηση μονότονου πολυγώνου	61
2.6 Ασκήσεις	63
3 Γεωμετρία της ορατότητας	67
3.1 Κατηγορήματα ορατότητας	68

3.2	Πολύγωνο ορατότητας και συνδυαστική αναπαράσταση	70
3.3	Υποδιαίρεσεις ορατότητας	71
3.3.1	Υποδιαίρεση της περιμέτρου	73
3.3.2	Υποδιαίρεση του εσωτερικού	77
3.4	Φύλαξη από το εσωτερικό του πολυγώνου	79
3.5	Ασκήσεις	82

II Κυρτότητα 85

4 Κυρτό περίβλημα στο επίπεδο 87

4.1	Ακραία σημεία	88
4.1.1	Συνδυασμοί σημείων και Μετασχηματισμοί	91
4.2	Κατασκευή πολυγωνικού περιβλήματος	95
4.2.1	Αλγόριθμος περιτύλιξης	98
4.2.2	Διαίρει και βασίλευε	101
4.2.3	Αυξητικός αλγόριθμος	103
4.3	Ασκήσεις	108

5 Κυρτό περίβλημα στο χώρο 113

5.1	Κυρτά πολύεδρα και πολυπλοκότητα	114
5.1.1	Κορυφές, ακμές, έδρες και όψεις	117
5.1.2	Είδη πολυέδρων	120
5.1.3	Πολυπλοκότητα πολυέδρων	122
5.1.4	Αναπαράσταση	123
5.2	Κατασκευή πολυεδρικού περιβλήματος	125
5.2.1	Αυξητικός αλγόριθμος	126
5.2.2	Αλγόριθμος περιτύλιξης	133
5.3	Ασκήσεις	136

6 Ειδικά θέματα κυρτότητας 139

6.1	Δυϊσμός	140
6.1.1	Πόλωση και γενίκευση	141
6.1.2	Μη κατακόρυφες ευθείες	143
6.2	Γραμμική βελτιστοποίηση	147
6.2.1	Μοντελοποίηση προβλημάτων	151
6.2.2	Αυξητικός αλγόριθμος	153
6.3	Διαταραχή δεδομένων	159
6.4	Ασκήσεις	167

III	Γειτονία	169
7	Διάγραμμα Voronoi	171
7.1	Αναπαράσταση υποδιαίρεσης του επιπέδου	172
7.2	Ορισμοί και ιδιότητες διαγράμματος Voronoi	174
7.3	Κατασκευή διαγράμματος Voronoi	181
7.3.1	Αυξητικός αλγόριθμος	181
7.3.2	Αναγωγή στο ΚΠ3	186
7.3.3	Αλγόριθμος σάρωσης του Fortune	189
7.3.4	Διαίρει και βασίλευε	195
7.4	Ασκήσεις	196
8	Τριγωνοποίηση Delaunay	199
8.1	Ορισμοί και ιδιότητες τριγωνοποίησης Delaunay	200
8.2	Κατασκευή τριγωνοποίησης Delaunay	205
8.2.1	Αυξητικός αλγόριθμος	205
8.2.2	Αναγωγή στο ΚΠ3	209
8.3	Ασκήσεις	211
9	Εφαρμογές των τριγωνοποιήσεων Delaunay	213
9.1	α -σχήματα σημειοσυνόλων	214
9.1.1	Ιδιότητες α -σχημάτων	219
9.1.2	Υπολογισμός α -σχήματος	221
9.2	Μέσος άξονας	223
9.3	Πλησιέστερα σημεία	224
9.4	Ασκήσεις	227
IV	Διατάξεις και Γεωμετρική αναζήτηση	229
10	Διατάξεις	231
10.1	Διατάξεις ευθύγραμμων τμημάτων	232
10.1.1	Έλεγχος ύπαρξης τομής	233
10.1.2	Κάτω φράγμα	237
10.1.3	Εύρεση όλων των τομών	238
10.2	Διατάξεις ευθειών	243
10.2.1	Αυξητικός αλγόριθμος	245
10.3	Εφαρμογές διατάξεων	249
10.3.1	Δυσμός	249
10.3.2	Κάτω περιβάλλουσες	250
10.4	Ασκήσεις	253

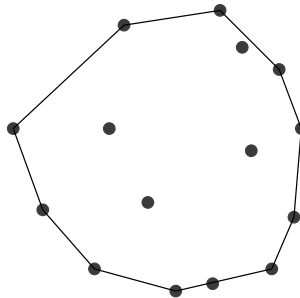
11 Γεωμετρική αναζήτηση	257
11.1 Μονοδιάστατα δεδομένα	258
11.2 kd -δένδρα	260
11.3 Δένδρα περιοχής	263
11.3.1 Κλασματική επαλληλία	267
11.4 Δένδρα προτεραιότητας	269
11.5 Ασκήσεις	269
Βιβλιογραφία	273
Ευρετήριο	283

4

Κυρτό περίβλημα στο επίπεδο

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε μη κυρτά πολύγωνα στο επίπεδο και, σε σχέση με αυτά τα πολύγωνα, συζητήσαμε προβλήματα ορατότητας. Περνάμε τώρα στη μελέτη *κυρτών* πολυγώνων και μελετάμε το θεμελιώδες πρόβλημα του κυρτού περιβλήματος (convex hull) σημείων, γνωστό και ως κυρτή θήκη, στο επίπεδο (σχήμα 4.1).

Στην πρώτη ενότητα, παρουσιάζουμε ορισμένες έννοιες σε δύο διαστάσεις, όπως την έννοια του ακραίου σημείου σε δεδομένο σημειοσύνολο και της αντίστοιχης ευθείας στήριξης. Για μεγαλύτερη αυστηρότητα, αναφερόμαστε στους μετασχηματισμούς του επιπέδου οι οποίοι αφήνουν τα ακραία σημεία αμετάβλητα· ο αναγνώστης μπορεί να παραλείψει αυτή τη συζήτηση χωρίς να αντιμετωπίσει πρόβλημα στην κατανόηση των επόμενων εννοιών. Η κυρτότητα θα αποτελέσει μια πολύ ισχυρή έννοια, η οποία οδηγεί σε πληθώρα εφαρμογών, από την Ρομποτική και την Αναγνώριση Προτύπων, μέχρι την Υπολογιστική Άλγεβρα.



Σχήμα 4.1: Κυρτό περίβλημα σημείων στο επίπεδο.

Παρουσιάζονται, στη συνέχεια, διαφορετικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα της κατασκευής κυρτού περιβλήματος (ΚΠ2), με έμφαση στον αλγόριθμο περιτύλιξης και τον αυξητικό αλγόριθμο, οι οποίοι θα γενικευθούν στο επόμενο κεφάλαιο σε μεγαλύτερη διάσταση. Για τον αλγόριθμο περιτύλιξης, δείχνουμε πως είναι ευαίσθητος εξόδου, ενώ για τον αυξητικό αλγόριθμο παρουσιάζουμε μια ανάλυση της αναμενόμενης πολυπλοκότητάς του. Επίσης, παρουσιάζεται η μέθοδος Διαίρει και βασίλευε. Μελετάμε την ασυμπτωτική πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης όλων των παραπάνω αλγορίθμων και δείχνουμε πως, για ορισμένους αλγορίθμους, αυτή η πολυπλοκότητα είναι βέλτιστη.

Μια σύγχρονη ερευνητική κατεύθυνση είναι ο επανασχεδιασμός γνωστών αλγορίθμων έτσι ώστε να καταναλώνουν μνήμη σταθερής πολυπλοκότητας, πέραν αυτής που είναι απαραίτητη για την αποθήκευση των δεδομένων. Τέτοιοι αλγόριθμοι καλούνται επιτόπιοι (in place) και αποκτούν ιδιαίτερη σημασία στην εποχή των μαζικών δεδομένων και του Διαδικτύου. Περισσότερες πληροφορίες για προβλήματα σχετικά με κυρτά πολύγωνα θα βρείτε στα βιβλία [CLRS01, dBvKOS97, O'R98, PS85].

4.1 Ακραία σημεία

Ξεκινάμε με ένα παράδειγμα ενός συνόλου δεδομένων με δύο παραμέτρους, δηλαδή ενός συνόλου σημείων στο επίπεδο. Το παράδειγμα υπογραμμίζει ορισμένα χαρακτηριστικά του προβλήματος του κυρτού περιβλήματος και οδηγεί σε έναν αυστηρό ορισμό της έννοιας των ακραίων σημείων. Για λόγους πληρότητας, μελετώνται γραμμικοί, Ευκλείδειοι και αφινικοί μετασχηματισμοί στο επίπεδο, οι οποίοι όμως δεν είναι απαραίτητοι για τη συνέχεια.

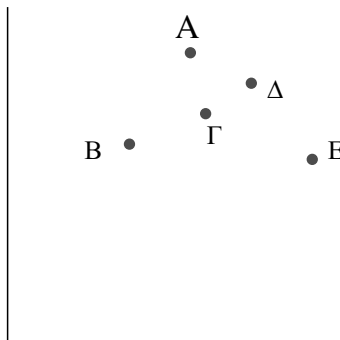
Παράδειγμα 4.1 Θεωρούμε 5 παίκτες μιας ομάδας μπάσκετ και για καθέναν το βάρος του και το ύψος του. Το παράδειγμα οφείλεται στον Raimund Seidel.

Ορισμένοι παίκτες προφανώς αποτελούν ακραίες περιπτώσεις, π.χ. ο Β, που έχει ελάχιστο βάρος, ή ο Ε, που έχει ελάχιστο ύψος και μέγιστο βάρος. Ο Γ σίγουρα δεν αποτελεί ακραία περίπτωση, αλλά πώς θα το εκφράζαμε αυτό αλγοριθμικά, δηλαδή με τι τρόπο θα κωδικοποιούσαμε την πληροφορία αυτή στον υπολογιστή;

Πιο δύσκολο είναι να αποφασίσουμε στην περίπτωση του Δ: αποτελεί ακραία περίπτωση ή όχι; Το άθροισμα των συντεταγμένων του ισούται με 102,18, το οποίο είναι

Όνομα	Βάρος [kg]	Ύψος [m]
A	75	2,30
B	50	1,65
Γ	80	1,82
Δ	100	2,18
E	125	1,59

Πίνακας 4.1: Στοιχεία ομάδας μπάσκετ στο παράδειγμα 4.1.



Σχήμα 4.2: Τα σημεία που προκύπτουν από το παράδειγμα 4.1: ο οριζόντιος και ο κατακόρυφος άξονας εκφράζει βάρος και ύψος αντίστοιχα.

μικρότερο από το 126,59, δηλαδή το αντίστοιχο άθροισμα του E. Το παράδοξο όμως είναι πως αν εκφραστεί το ύψος όλων των παικτών σε cm, τότε τα αντίστοιχα αθροίσματα γίνονται 318 και 284 για τους Δ και E και η ανισότητα αντιστρέφεται.

Για το λόγο αυτό, εισάγεται η έννοια της ευθείας στήριξης που επιτρέπει τον ορισμό του *ακραίου* σημείου ανεξάρτητα από τη μονάδα μέτρησης. Θα δούμε παρακάτω πως το Δ είναι ακραίο ανεξάρτητα του συστήματος συντεταγμένων. ■

Η συζήτηση της ενότητας αυτής θα επιτρέψει ορισμούς ανεξάρτητους από οποιαδήποτε γραμμική αλλαγή των συντεταγμένων. Θα δούμε παρακάτω πιο αυστηρά πώς αυτές οι αλλαγές συντεταγμένων αντιστοιχούν σε μία αλλαγή του συστήματος αξόνων.

Ξεκινάμε με την επισήμανση πως κάθε ευθεία ορίζει δύο ημιεπίπεδα. Θυμηθείτε πως κάθε ευθεία, όπως και γενικότερα κάθε αλγεβρική καμπύλη, εκφράζεται είτε αλγεβρικά είτε παραμετρικά. Ο πρώτος τρόπος ορίζει την ευθεία ως το σύνολο των λύσεων μιας γραμμικής αλγεβρικής εξίσωσης

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1x + a_2y + a_0 = 0\},$$

όπου $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Ο δεύτερος τρόπος εκφράζει τα σημεία της ευθείας ως ζεύγη τιμών γραμμικών πολυωνύμων ως προς μία παράμετρο $t \in \mathbb{R}$ η οποία παίρνει τιμές σε ένα διάστημα, για παράδειγμα

$$x = a_0 + a_1t, \quad y = b_0 + b_1t, \quad t \in [0, 1],$$

όπου $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$. Ένα ημιεπίπεδο λέγεται ανοικτό αν δεν περιέχει την ευθεία που το ορίζει και κλειστό αν την περιέχει.

Ορισμός 4.1 Στο επίπεδο, ένα σημείο ονομάζεται ακραίο (*extreme point*) ως προς ένα δεδομένο σύνολο σημείων αν υπάρχει ευθεία η οποία περνά από το σημείο και αφήνει όλα τα άλλα σημεία στο ένα από τα δύο ανοικτά ημιεπίπεδα που αυτή ορίζει. Η ευθεία αυτή ονομάζεται ευθεία στήριξης (*supporting line*).

Παράδειγμα 4.2 [Συνέχεια του παραδείγματος 4.1] Στο παράδειγμα 4.1, μία ευθεία στήριξης είναι η $x = 125$, η οποία περνά από το E και αφήνει όλα τα σημεία στο αριστερό της κλειστό ημιεπίπεδο. Επομένως το E είναι ακραίο σημείο, κάτι που συμφωνεί με το διαισθητικό μας ορισμό περί ακραίου σημείου. Το E είναι ακραίο, με ευθεία στήριξης την $y = 1,59$.

Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση του σημείου Δ το οποίο είναι ακραίο, αλλά εδώ είναι πιο δύσκολο να υπολογίσουμε την ευθεία στήριξης. Το παρακάτω λήμμα θα διευκολύνει αυτόν τον υπολογισμό. ■

Για τη συνέχεια, όπως και για μετέπειτα ενότητες, είναι πολύ χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε κάθε σημείο του επιπέδου σε ένα διάνυσμα διάστασης 2 με στοιχεία τις συντεταγμένες του σημείου. Τυπικά, πρόκειται για ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το δεδομένο σημείο. Ο χώρος των σημείων στο Ευκλείδειο επίπεδο διαφέρει από το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$, όπου ορίζεται το μήκος, η διεύθυνση και η φορά κάθε διανύσματος, καθώς και πράξεις μεταξύ τους. Για την απλούστευση όμως της συζήτησης δεν θα επιμείνουμε στη διαφοροποίηση μεταξύ των δύο εννοιών και θα σημειώνουμε με $\mathbb{R}^2$ το επίπεδο των σημείων καθώς και τον αντίστοιχο διανυσματικό χώρο. Την ίδια απλούστευση θα χρησιμοποιήσουμε και σε μεγαλύτερες διαστάσεις.

Λήμμα 4.2 Ένα σημείο (a, b) είναι ακραίο ως προς δεδομένο σημειοσύνολο και έχει ευθεία στήριξης με εξίσωση $px + qy = r$, όπου $p, q, r \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν (ανν) το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος (p, q) με τα σημεία του συνόλου είναι αυστηρά μεγαλύτερο ή αυστηρά μικρότερο από το γινόμενο με το (a, b) .

Παρατηρήστε πως η συνθήκη $pa + qb = r$ δηλώνει ότι η ευθεία στήριξης περνά από το ακραίο σημείο (a, b) . Επίσης, το διάνυσμα (p, q) είναι κάθετο στην ευθεία. Στην ενότητα 4.2.3, η οποία μελετά κυρτά περιβλήματα σημείων, το αντίστοιχο διάνυσμα καλείται εξωτερική ή εσωτερική κάθετος, ανάλογα με το αν (outer / inner normal) το εσωτερικό γινόμενο μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται στο σημείο (a, b) .

Παράδειγμα 4.3 [Συνέχεια του παραδείγματος 4.1] Ξαναγυρνάμε τώρα στην περίπτωση του σημείου Δ . Σύμφωνα με το λήμμα, για να δείξουμε πως το σημείο είναι ακραίο, το πρώτο βήμα είναι να βρούμε ένα διάνυσμα (p, q) με το οποίο το εσωτερικό γινόμενο μεγιστοποιείται στο Δ . Έστω $(p, q) = (1, 1)$. Θεωρώντας ότι οι συντεταγμένες των σημείων εκφράζονται σε kg και cm, τα A, Δ και E έχουν εσωτερικό γινόμενο 305, 318 και 284. Επομένως το $(1, 1)$ είναι εξωτερική κάθετος, δεδομένου ότι τα υπόλοιπα σημεία έχουν μικρότερο εσωτερικό γινόμενο.

Για να δείξουμε πως το Δ είναι ακραίο, αρκεί τώρα να βρούμε το r , τέτοιο ώστε η ευθεία στήριξης $x + y = r$ να περνά από το Δ . Συνεπώς με $r = 318$ ορίζεται η ευθεία που καθιστά το Δ ακραίο σημείο.

Τι γίνεται όμως αν οι συντεταγμένες των σημείων εκφραστούν σε kg και m; Το εσωτερικό γινόμενο του Δ με το διάνυσμα $(1, 1)$ ισούται με 102,18, το οποίο είναι μικρότερο

από το 126,59, δηλαδή το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο του Ε. Αλλά αν διαλέξουμε ως διάνυσμα το $(1, 100)$, τότε το γινόμενο μεγιστοποιείται στο Δ, αποδεικνύοντας και πάλι πως το Δ είναι ακραίο. ■

Στην επόμενη ενότητα θα δείξουμε πως τα ακραία σημεία σημειοσυνόλου είναι καλώς ορισμένα. Για μια αυστηρή μελέτη των σχετικών εννοιών, καθώς και της έννοιας της κυρτότητας, χρειαζόμαστε ορισμένους ορισμούς.

4.1.1 Συνδυασμοί σημείων και Μετασχηματισμοί

Στην ενότητα αυτή μελετάμε αντικείμενα τα οποία αντιστοιχούν σε μη πεπερασμένα σημειοσύνολα και ορίζονται από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων. Στη συνέχεια εξετάζουμε μετασχηματισμούς στο επίπεδο.

Παράδειγμα 4.4 Ας δούμε ορισμένα αντικείμενα που ορίζονται από τα σημεία $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών $\{\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ είναι ολόκληρο το επίπεδο, ενώ αν απαιτήσουμε να ισχύει $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, τότε το σύνολο αντιστοιχεί στην ευθεία που περνά από τα $(1, 0), (0, 1)$. ■

Έστω σημεία $a_1, \dots, a_n$ στο επίπεδο. Καλείται *γραμμικός συνδυασμός* (linear combination) n δεδομένων σημείων κάθε άθροισμα $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Ονομάζεται *αφινικός συνδυασμός* (affine combination) κάθε γραμμικός συνδυασμός των n δεδομένων σημείων, όπου $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Αφινικό περίβλημα (ή θήκη) συνόλου σημείων είναι το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών τους. Σημειώνουμε, παρενθετικά, πως κάθε γραμμικός συνδυασμός όπου $\lambda_i \geq 0$ καλείται κωνικός συνδυασμός.

Παράδειγμα 4.5 Ας θεωρήσουμε τα σημεία $(0, 0), (0, 1)$. Τότε το σύνολο των γραμμικών, αλλά και των αφινικών τους συνδυασμών, είναι ο άξονας των y με εξίσωση $x = 0$. Αν τα δύο σημεία ήταν γραμμικώς ανεξάρτητα, το σύνολο των γραμμικών τους συνδυασμών θα ήταν ολόκληρο το επίπεδο, ενώ το αφινικό τους περίβλημα θα ήταν πάλι η ευθεία που αυτά ορίζουν, όπως στο παράδειγμα 4.4.

Για τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο, το αφινικό τους περίβλημα είναι ολόκληρο το επίπεδο. Αν k σημεία είναι συνευθειακά, το αφινικό τους περίβλημα είναι η ευθεία που τα περιέχει. ■

Στο κύριο θεώρημα της ενότητας θα αποδειχθεί ότι τα ακραία σημεία ενός σημειοσυνόλου παραμένουν ακραία ακόμα και αν το σημειοσύνολο υποστεί ορισμένους μετασχηματισμούς, με άλλα λόγια, αν αλλάξουμε το σύστημα αξόνων με συγκεκριμένο τρόπο. Ας μελετήσουμε τους μετασχηματισμούς αυτούς.

Ξεκινάμε με τους Ευκλείδειους ή άκαμπτους (rigid) μετασχηματισμούς, οι οποίοι περιλαμβάνουν

- την περιστροφή (rotation) κατά μία γωνία γύρω από έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο και

- τη μετατόπιση (μεταφορά, translation) κατά ένα διάνυσμα και
- τον αντικατοπτρισμό (reflection) ως προς έναν άξονα.

Οι Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί χαρακτηρίζονται από την ιδιότητά τους να διατηρούν αναλλοίωτες τις αποστάσεις και τις γωνίες.

Ας δούμε πώς εκφράζονται μαθηματικά οι μετασχηματισμοί. Αν κάθε σημείο αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα διάστασης 2, η μετατόπιση εκφράζεται με την πρόσθεση διανυσμάτων:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t,$$

όπου το διάνυσμα $[x, y]$ αντιστοιχεί στο αρχικό σημείο (x, y) , το $[x', y']$ αντιστοιχεί στο σημείο που προκύπτει από τη μετατόπιση και t είναι το διάνυσμα-στήλη στο $\mathbb{R}^2$ που ορίζει τη μετατόπιση. Το σύνολο όλων των μετατοπίσεων ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^2$.

Η περιστροφή εκφράζεται με τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος επί ένα πίνακα R , μεγέθους 2×2 :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Αν θ είναι η γωνία περιστροφής, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, τότε

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ συνεπώς } R^{-1} = R^T \text{ και } \det R = 1.$$

Ο πίνακας R^{-1} εκφράζει την αντίστροφη περιστροφή, ενώ κάθε R είναι ορθογώνιος.

Οι αντικατοπτρισμοί εκφράζονται από πίνακες με ορίζουσα ίση με -1 . Συγκεκριμένα ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

αντιστοιχεί στον αντικατοπτρισμό ως προς τον άξονα των x . Αφού οι περιστροφές και οι αντικατοπτρισμοί εκφράζονται με τον πολλαπλασιασμό πίνακα, ανήκουν στους γραμμικούς μετασχηματισμούς (linear transformations). Παρακάτω θα δούμε και άλλους γραμμικούς μετασχηματισμούς. Αντίθετα οι μετατοπίσεις δεν αποτελούν γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Η επόμενη και γενικότερη κατηγορία μετασχηματισμών που μας ενδιαφέρει καλούνται *αφινικοί μετασχηματισμοί* (affine transformations) και ορίζονται ως οι μετασχηματισμοί εκείνοι που αφήνουν αναλλοίωτους τους αφινικούς συνδυασμούς σημείων. Οι *βασικοί αφινικοί μετασχηματισμοί* είναι:

- η μετατόπιση κατά διάνυσμα $t \in \mathbb{R}^2$,
- η περιστροφή κατά γωνία θ ,
- η αλλαγή κλίμακας (scaling) κατά s_x και s_y ως προς τον άξονα των x και των y αντίστοιχα, καθώς και

- η στρέβλωση (shearing) κατά μήκος του x -άξονα (ή του y -άξονα).

Η άσκηση 4.2 αποδεικνύει πως οι 4 αυτοί μετασχηματισμοί, καθώς και οι συνδυασμοί τους, είναι αφινικοί, δηλαδή αφήνουν αναλλοίωτους τους αφινικούς συνδυασμούς σημείων. Αποδεικνύεται επίσης και το αντίστροφο: κάθε αφινικός μετασχηματισμός αποτελεί συνδυασμό των 4 βασικών αφινικών μετασχηματισμών.

Οι αφινικοί μετασχηματισμοί διακρίνονται στους Ευκλείδειους μετασχηματισμούς, από τη μια μεριά, και στη στρέβλωση και την αλλαγή κλίμακας, από την άλλη. Από τους βασικούς αφινικούς μετασχηματισμούς, οι τρεις τελευταίοι είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί.

Αυτό σημαίνει, πως εκφράζονται με πολλαπλασιασμό πινάκων επί το διδιάστατο διάνυσμα που περιγράφει ένα σημείο. Τα τρία είδη βασικών γραμμικών μετασχηματισμών αντιστοιχούν στους εξής πίνακες:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζουμε πως ο πίνακας R μιας περιστροφής, όπως επίσης και αυτός της στρέβλωσης κατά έναν άξονα, χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα $\det R = 1$. Γενικότερα, και οι τρεις παραπάνω μετασχηματισμοί είναι αντιστρέψιμοι. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ισοδύναμα, οι πίνακες των παραπάνω γραμμικών μετασχηματισμών έχουν μη μηδενική ορίζουσα, δηλαδή βαθμό (rank) δύο. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει πως διδιάστατα αντικείμενα μετασχηματίζονται πάλι σε διδιάστατα αντικείμενα.

Ας εξετάσουμε πάλι τους αφινικούς μετασχηματισμούς, ώστε να τους εκφράσουμε μέσω της γραμμικής άλγεβρας: οι μετασχηματισμοί αυτοί δεν αντιστοιχούν σε ένα διδιάστατο πίνακα. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τριδιάστατους πίνακες, είναι δυνατό να εκφράσουμε και τους αφινικούς μετασχηματισμούς ως πολλαπλασιασμό πίνακα επί διάνυσμα. Σε αυτή την περίπτωση, το σημείο (x_1, x_2) αντιστοιχίζεται στο διάνυσμα $[x_1, x_2, 1]$ και ο μετασχηματισμός γράφεται

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t,$$

όπου ο M είναι μεγέθους 2×2 , το διάνυσμα t είναι διάστασης 2 και το 0 αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα-γραμμή διάστασης 2. Προφανώς η μετατόπιση κατά t προκύπτει θέτοντας $M = I$, ενώ ένας γραμμικός μετασχηματισμός M αντιστοιχεί στο $t = 0$.

Εφόσον $\det M \neq 0$, έπεται πως οι τριδιάστατοι πίνακες A που εκφράζουν αφινικούς μετασχηματισμούς είναι αντιστρέψιμοι. Ειδικότερα, ο πίνακας A είναι ορθοκανονικός, δηλ. $A^T A = I$, ανν ο αφινικός μετασχηματισμός είναι Ευκλείδειος.

Ένα τελευταίο, αλλά χρήσιμο παράδειγμα γραμμικού μετασχηματισμού είναι η προβολή παράλληλα με κάποιον άξονα. Π.χ. όταν προβάλλουμε διδιάστατα αντικείμενα στον άξονα των x , μιλάμε για προβολή παράλληλα με τον άξονα των y . Ο αντίστοιχος πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος, δεδομένου ότι διδιάστατα αντικείμενα απεικονίζονται σε μονοδιάστατες εικόνες. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

εκφράζει προβολή στον άξονα των x , δηλαδή παράλληλα με τον άξονα των y . Ο βαθμός του πίνακα είναι 1 και η εικόνα του μετασχηματισμού είναι το $\mathbb{R}$.

Επιστρέφουμε τώρα στο χαρακτηρισμό των ακραίων σημείων, όταν το δεδομένο σημειοσύνολο υπόκειται στους παραπάνω μετασχηματισμούς, και αποδεικνύουμε πως τα ακραία σημεία παραμένουν ακραία.

Θεώρημα 4.3 Ένα ακραίο σημείο παραμένει ακραίο μετά την αλλαγή συντεταγμένων σύμφωνα με οποιονδήποτε αφινικό μετασχηματισμό ή αντικατοπτρισμό.

Απόδειξη. Έστω γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα M , σημεία $v_i \in \mathbb{R}^2$ και ένας γραμμικός συνδυασμός τους $\sum_i \lambda_i v_i$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Τότε

$$M\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i \lambda_i (Mv_i), \quad (4.1)$$

δηλαδή η εικόνα του γραμμικού συνδυασμού είναι ο αντίστοιχος συνδυασμός των εικόνων. Έστω ευθεία $px + qy + r = 0$ στο επίπεδο. Η ευθεία ορίζεται από δύο σημεία της μορφής $a = (a_1, a_2)$, για τα οποία ισχύει

$$[p, q, r] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow [p, q, r] M^{-1} M \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

όπου $M[a_1, a_2, 1]^T$ εκφράζει το νέο σημείο και $[p, q, r]M^{-1}$ τις νέες συντεταγμένες της ευθείας. Η ισοδυναμία δηλώνει πως το αρχικό σημείο ανήκει στην ευθεία αν το μετασχηματισμένο σημείο ανήκει στη μετασχηματισμένη ευθεία. Για κάθε σημείο a εκτός της ευθείας, η παραπάνω ισότητα μετατρέπεται σε ανισότητα. Έστω ότι το a ανήκει στο ημιεπίπεδο εκείνο στο οποίο

$$[p, q, r] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow [p, q, r] M^{-1} M \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix} < 0.$$

Άρα ο γραμμικός μετασχηματισμός διατηρεί το ημιεπίπεδο στο οποίο βρίσκεται το σημείο ως προς την ευθεία. Αυτό φυσικά ισχύει και για τις ευθείες στήριξης.

Είναι εύκολο να δούμε πως οι μετατοπίσεις δεν επηρεάζουν τα ακραία σημεία, επομένως το θεώρημα αποδείχτηκε για όλους τους αφινικούς μετασχηματισμούς. Τέλος, διαπιστώνουμε πως και οι αντικατοπτρισμοί δεν επηρεάζουν τα ακραία σημεία. $\square$

Η παραπάνω απόδειξη οδηγεί σε επιπλέον συμπεράσματα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ακραίο σημείο και δύο ευθείες στήριξης τέτοιες ώστε αυτό να βρίσκεται στην τομή τους, από τη σχέση (4.1) συνάγεται πως ο μετασχηματισμός απεικονίζει τις ευθείες σε νέες ευθείες στήριξης, και το σημείο στη νέα τους τομή.

Οι μετασχηματισμοί που μελετήθηκαν γενικεύονται σε τρεις και περισσότερες διαστάσεις, όπου ισχύει και πάλι το παραπάνω θεώρημα περί διατήρησης των ακραίων σημείων.

4.2 Κατασκευή πολυγωνικού περιβλήματος

Η ενότητα μελετά ένα από τα χαρακτηριστικότερα προβλήματα της Υπολογιστικής Γεωμετρίας, τον υπολογισμό του κυρτού περιβλήματος ενός συνόλου σημείων στο επίπεδο. Ξεκινάμε με ορισμένες έννοιες οι οποίες θα μας οδηγήσουν στον ορισμό του προβλήματος, πριν περάσουμε σε διάφορες αλγοριθμικές προσεγγίσεις για την επίλυσή του.

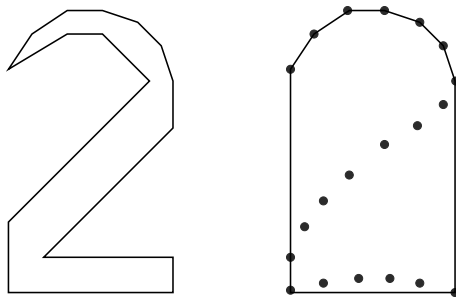
Θυμηθείτε από την ενότητα 2.1 ότι μια πολυγωνική γραμμή ονομάζεται κλειστή όταν το τέλος του τελευταίου τμήματος ταυτίζεται με την αρχή του πρώτου. Κάθε κλειστή πολυγωνική γραμμή χωρίζει το επίπεδο στο εσωτερικό και το εξωτερικό της πολυγωνικής γραμμής, σύμφωνα με το θεώρημα 2.3 του Jordan. Από τον ορισμό 2.1, κλειστό πολύγωνο ή, απλούστερα, πολύγωνο ονομάζεται η ένωση μιας κλειστής πολυγωνικής γραμμής και του εσωτερικού της, ενώ ανοικτό πολύγωνο ονομάζεται μόνο το εσωτερικό της πολυγωνικής γραμμής. Μερικές φορές, καταχρηστικά, θα αναφερόμαστε στην πολυγωνική γραμμή ως πολύγωνο.

Μελετάμε τώρα την έννοια της κυρτότητας. Το πολύγωνο του σχήματος 4.3 (αριστερά) δεν είναι κυρτό· μη κυρτά είναι και τα πολύγωνα–μουσεία που εξετάσαμε ως παραδείγματα στην προηγούμενη ενότητα.

Αντίθετα, κάθε κανονικό πολύγωνο είναι κυρτό, όπως επίσης και κάθε παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, αλλά και το πολύγωνο του σχήματος 4.3 (δεξιά). Κυρτό είναι κάθε πολύγωνο όπου ένα ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου τα ακραία σημεία ανήκουν στο πολύγωνο, βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο πολύγωνο. Γενικά, ισχύει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 4.4 Κυρτό (convex) είναι κάθε αντικείμενο, ή σύνολο σημείων, στο οποίο κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα που ανήκουν στο αντικείμενο βρίσκεται μέσα στο αντικείμενο.

Για παράδειγμα, ο δίσκος και η έλλειψη είναι κυρτά σύνολα διότι κάθε δύο σημεία τους ορίζουν τμήμα που βρίσκεται στο εσωτερικό του αντικειμένου.



Σχήμα 4.3: Αριστερά: Μη κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο. Δεξιά: Κυρτό περίβλημα σημείων.

Ορισμός 4.5 Το κυρτό περίβλημα συνόλου σημείων τα οποία ανήκουν στο επίπεδο είναι το κυρτό πολύγωνο με ελάχιστο εμβαδό που περιλαμβάνει όλα τα δεδομένα σημεία. Το αντίστοιχο πρόβλημα κατασκευής (ΚΠ2) έχει ως έξοδο το κυρτό περίβλημα των δεδομένων σημείων.

Το πολύγωνο του σχήματος 4.3 (δεξιά) είναι κυρτό και ορίζεται ως το κυρτό περίβλημα των δεδομένων σημείων. Ποια σημεία θα μπορούσαμε να παραλείψουμε από το σημειοσύνολο χωρίς να αλλάξει το κυρτό τους περίβλημα;

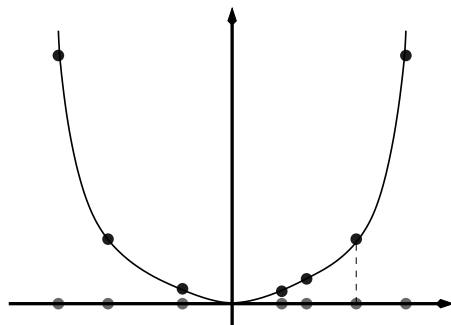
Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε το κυρτό περίβλημα ως το κυρτό πολύγωνο που περιέχει τα δεδομένα σημεία και είναι ελάχιστο ως προς τη σχέση υποσυνόλου σημείων, δηλαδή δεν υπάρχει κυρτό πολύγωνο το οποίο να περιέχει όλα τα δεδομένα σημεία και να αποτελεί γνήσιο υποσύνολο σημείων του κυρτού περιβλήματος. Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι (δείτε την άσκηση 4.3). Ισοδύναμα, η ελαχιστοποίηση μπορεί να αναφέρεται στην περίμετρο του πολυγώνου. Με άλλα λόγια, το κυρτό περίβλημα έχει την ελάχιστη περίμετρο ανάμεσα σε όλα τα κυρτά πολύγωνα που περιέχουν τα δεδομένα σημεία.

Θα αποδείξουμε ένα κάτω φράγμα για το πρόβλημα ΚΠ2, με αναγωγή στο πρόβλημα Ταξινόμησης (Sorting) n πραγματικών αριθμών, το οποίο έχει πολυπλοκότητα $\Theta(n \log n)$ στην πραγματική Μηχανή Τυχαίας Προσπέλασης (ΜΤΠ).

Θεώρημα 4.6 Ο υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος συνόλου n σημείων στο επίπεδο απαιτεί χρόνο $\Omega(n \log n)$.

Απόδειξη. Δίνουμε έναν κανόνα που μετατρέπει τα δεδομένα του προβλήματος Ταξινόμησης σε είσοδο στο πρόβλημα ΚΠ2, ορίζοντας ένα σημείο (x, x^2) για κάθε πραγματικό x . Η αναγωγή αυτή κοστίζει χρόνο $O(n)$ και τα σημεία που προκύπτουν φαίνονται στο σχήμα 4.4, όπου επίσης φαίνεται πως όλα τα σημεία ανήκουν σε μια παραβολή και είναι συνεπώς ακραία, δηλαδή κορυφές του κυρτού περιβλήματος.

Στο κυρτό περίβλημα, εντοπίζουμε την αριστερότερη κορυφή σε χρόνο $O(n)$. Ξεκινώντας από αυτήν την κορυφή, απαριθμούμε όλες τις κορυφές, επίσης σε χρόνο $O(n)$.



Σχήμα 4.4: Παραβολή για το κάτω φράγμα στην πολυπλοκότητα του ΚΠ2.

Η απαρίθμηση δίνει την ακολουθία των x κατ' αύξουσα σειρά, επομένως λύνει και το πρόβλημα της Ταξινόμησης. Άρα το ΚΠ2 έχει πολυπλοκότητα ίση ή μεγαλύτερη από αυτήν της Ταξινόμησης, δηλαδή είναι στο $\Omega(n \log n)$ · δείτε και το θεώρημα 1.3. $\square$

Συνοπτικά παρατίθενται ορισμένοι αλγόριθμοι για την κατασκευή του κυρτού περιβλήματος, ενώ οι επόμενες ενότητες θα αναλύσουν τους κυριότερους. Θεωρούμε ότι δίνονται n σημεία τα οποία ανήκουν στο επίπεδο, ενώ η έξοδος είναι η ακολουθία ακμών που ορίζει το κυρτό πολύγωνο.

- Ο αυξητικός αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα $O(n \log n)$ και περιγράφεται στην ενότητα 4.2.3, όπου υποθέτουμε πως όλα τα σημεία είναι γνωστά εκ των προτέρων. Αυτό το φράγμα ισχύει στη χειρότερη, αλλά και στη μέση περίπτωση. Η ενότητα 5.2.1 γενικεύει τον αλγόριθμο σε τρεις και περισσότερες διαστάσεις.
- Η προσέγγιση περιτύλιξης (gift wrapping) προτάθηκε αρχικά από τον Jarvis, με έναν αλγόριθμο κόστους $O(nH)$, όπου H το πλήθος κορυφών στο κυρτό περίβλημα· δείτε την ενότητα 4.2.1. Ο αλγόριθμος γενικεύεται στην ενότητα 5.2.2 σε τρεις και περισσότερες διαστάσεις. Ο Chan [Cha96] επεκτείνει την ιδέα της περιτύλιξης και πετυχαίνει πολυπλοκότητα $O(n \log H)$.
- Η προσέγγιση Διαίρει και βασίλευε (Divide and conquer) οδηγεί σε αλγόριθμο χρονικής πολυπλοκότητας $O(n \log n)$ και αναλύεται στην ενότητα 4.2.2.
- Μια παρόμοια προσέγγιση μιμείται τον αλγόριθμο ταξινόμησης QuickSort και ονομάστηκε QuickHull [Byk78, Edd77]. Έχει πολυπλοκότητα $O(n \log n)$, εφόσον τα σημεία είναι κατανεμημένα αρκετά τυχαία, αλλιώς η πολυπλοκότητα γίνεται $O(n^2)$.
- Μια προσέγγιση «Βασίλευε και Διαίρει» (Marriage before conquest) χρησιμοποιήθηκε στον αλγόριθμο των Kirkpatrick–Seidel [KS86], με πολυπλοκότητα $O(n \log H)$. Η ιδέα είναι πως ορισμένοι υπολογισμοί που σχετίζονται με το συνδυασμό των δύο υποπροβλημάτων προηγούνται, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθούν

για να επιταχυνθεί η φάση της διαίρεσης του αρχικού προβλήματος (δηλαδή, η πορεία που ακολουθούμε είναι αντίθετη από την προσέγγιση Διαιρεί και βασίλευε).

- Ο πρώτος ιστορικά αλγόριθμος, και ίσως ο αρχαιότερος στην Υπολογιστική Γεωμετρία, σχεδιάστηκε από τον Graham [Gra72], εκτελείται σε χρόνο $O(n \log n)$ και βασίζεται σε μια γωνιακή ταξινόμηση των σημείων.

Οι περισσότεροι από αυτούς τους αλγορίθμους έχουν υλοποιηθεί με απόλυτη ακρίβεια στις βιβλιοθήκες CGAL και LEDA.

Οι στοιχειώδεις πράξεις που εκτελούν οι γεωμετρικοί αλγόριθμοι σε κάθε διακλάδωση, ώστε να αποφασίζουν την πορεία τους, καλούνται «κατηγορήματα» (predicates). Το βασικό κατηγορήμα για τον υπολογισμό του κυρτού περιβλήματος είναι το CCW, το οποίο ανάγεται στον υπολογισμό του προσήμου μιας ορίζουσας (δείτε την ενότητα 2.3.1). Το κατηγορήμα γενικεύεται σε d διαστάσεις με μια αντίστοιχη ορίζουσα.

Στους αλγορίθμους που αναλύουμε στο βιβλίο αυτό, θα κάνουμε την παραδοχή, για λόγους απλούστευσης, ότι τα δεδομένα σημεία βρίσκονται σε γενική θέση:

Ορισμός 4.7 Στο επίπεδο, ένα σύνολο σημείων βρίσκεται σε γενική θέση (*generic position*) για τα προβλήματα κυρτού περιβλήματος ανν οποιαδήποτε τρία σημεία δεν είναι συνευθειακά.

Παρατηρήστε ότι, για να μην υπάρχει τριάδα συνευθειακών σημείων, είναι αναγκαίο να μην υπάρχουν δύο σημεία που ταυτίζονται. Τα n σημεία $p_i \in \mathbb{R}^2$ ορίζουν $n - 1$ διανύσματα $v_i = p_i - p_1$. Ισοδύναμα, θα λέμε ότι τα σημεία βρίσκονται σε γενική θέση ανν κάθε δύο διανύσματα v_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Όταν τα σημεία βρίσκονται σε γενική θέση, όλες οι ορίζουσες CCW στη διάρκεια του αλγορίθμου δίνουν μη μηδενικό πρόσημο. Όμως, στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές τα δεδομένα σημεία δεν βρίσκονται σε γενική θέση. Αυτό μπορεί να οφείλεται στον τρόπο που ορίστηκαν τα δεδομένα σημεία, π.χ., όταν επιλέγονται στην οθόνη του υπολογιστή, όπου υπάρχει πεπερασμένο πλήθος pixel, και οι συντεταγμένες είναι ακέραιοι και όχι πραγματικοί αριθμοί. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές για να φέρουμε τα αυθαίρετα δεδομένα σε γενική θέση και να ισχύει η παραπάνω παραδοχή. Μία από αυτές είναι η μέθοδος της συμβολικής απειροελάχιστης διαταραχής, η οποία περιγράφεται στην ενότητα 6.3.

4.2.1 Αλγόριθμος περιτύλιξης

Παρουσιάζουμε σε αυτή την ενότητα μια προσέγγιση, γνωστή ως περιτύλιξη δώρου (gift wrapping) ή αλγόριθμο περιτύλιξης, η οποία προτάθηκε από τον Jarvis [Jar73]. Η ιδέα είναι, αφού βρεθεί ένα σημείο που είναι κορυφή του κυρτού περιβλήματος, να υπολογίζεται, από την τελευταία κορυφή, η επόμενη στην ακολουθία κορυφών του κυρτού περιβλήματος.

Θεωρούμε πως η είσοδος αποτελείται από n σημεία στο επίπεδο, ενώ η έξοδος θα αποτελείται από την αλυσίδα των ακμών και κορυφών.

Το αρχικό στάδιο υπολογίζει το αριστερότερο σημείο. Αν δύο ή περισσότερα σημεία έχουν την ίδια ελάχιστη τετμημένη τότε επιλέγουμε αυτό που έχει τη μικρότερη τεταγμένη, δηλαδή λεξικογραφικά έχει το μικρότερο διάνυσμα συντεταγμένων. Παρατηρήστε πως αυτό το σημείο είναι μοναδικά ορισμένο. Η διαδικασία αυτή εντοπίζει την πρώτη κορυφή του περιβλήματος και αποτελεί την αρχικοποίηση του αλγορίθμου περιτύλιξης (αλγόριθμος 4.9). Στη συνέχεια εντοπίζεται η δεύτερη κορυφή, δηλαδή ορίζεται η πρώτη ακμή του κυρτού περιβλήματος (σε γραμμικό χρόνο).

Ο αλγόριθμος 4.9 επισκέπτεται όλες τις κορυφές του κυρτού περιβλήματος, με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Το βασικό βήμα είναι η εύρεση της κορυφής που ακολουθεί την τελευταία (δηλ. πιο πρόσφατη) κορυφή r στην αλυσίδα κορυφών. Το σημείο u παίζει τον ρόλο του υποψηφίου, ο οποίος ελέγχεται ως προς όλα τα σημεία t τα οποία δεν είναι κορυφές στην υπάρχουσα πολυγωνική γραμμή, εκτελώντας το κατηγορήμα $CCW(r, u, t)$, στη διάρκεια του τρίτου βήματος. Το u μπορεί να ανανεωθεί από κάποιο t . Όταν ολοκληρωθεί το βήμα, τότε το σημείο που αποθηκεύεται ως u είναι σίγουρα η επόμενη κορυφή.

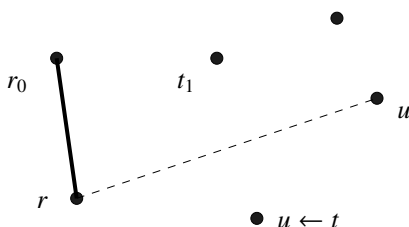
Λήμμα 4.8 Στη διάρκεια του αλγορίθμου περιτύλιξης, ο οποίος κατασκευάζει το κυρτό περίβλημα με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, αν ισχύει $CCW(r, u, t_1)$ και $CW(r, u, t)$, τότε ισχύει $CCW(r, t, t_1)$, όπου r η τελευταία κορυφή.

Το λήμμα αποδεικνύεται στην άσκηση 4.5 και δηλώνει ότι, αν ανανεωθεί το u σε t , δεν χρειάζεται να επανελέγξουμε σημεία (όπως το t_1 στο λήμμα), τα οποία είχαν ελεγχθεί με τον προκάτοχό του, δηλαδή ικανοποιούσαν το $CCW(r, u, t_1)$.

Ως πόρισμα έπεται πως ο βρόχος του βήματος 3 ως προς τα t συνεχίζεται παρόλο που κάποιο t μπορεί να πάρει την θέση του u .

Στο σχήμα 4.5 φαίνεται ένα τυπικό στιγμιότυπο του αλγορίθμου. Η πιο πρόσφατη κορυφή η οποία προστέθηκε στο κυρτό περίβλημα είναι η r , ενώ η r_0 είναι η αριστερότερη και αυτή που υπολογίστηκε πρώτη. Το σημείο t χρησιμοποιείται για να ανανεωθεί το u , ενώ το σημείο t_1 έπαιξε το ρόλο του t προηγουμένως.

Τώρα φράσσουμε την ασυμπτωτική πολυπλοκότητα. Η αρχικοποίηση του αλγορίθμου απαιτεί γραμμικό χρόνο $O(n)$. Παρατηρήστε πως και η δεύτερη κορυφή υπολογίζει-



Σχήμα 4.5: Το σημείο t χρησιμοποιείται για να ανανεωθεί το u , ενώ το t_1 έπαιξε τον ρόλο του t προηγουμένως.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μια σύγχρονη αλγοριθμική προσέγγιση

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν μεταμορφώσει τις μαθηματικές επιστήμες και έχουν προσδώσει ένα νέο, κατασκευαστικό χαρακτήρα ακόμα και σε αρχαία επιστημονικά πεδία, όπως η Γεωμετρία. Εδώ και τρεις δεκαετίες, η αλγοριθμική αντιμετώπιση γεωμετρικών προβλημάτων αποτελεί το αντικείμενο της Υπολογιστικής Γεωμετρίας. Πέρα από την επιστημονική γοητεία της, η συγκεκριμένη γνωστική περιοχή ανθίζει χάρη στην πληθώρα εφαρμογών από τη Ρομποτική, τα Γραφικά και τη Γεωμετρική Σχεδίαση, μέχρι τις Βάσεις Γεωγραφικών Δεδομένων, το Σχεδιασμό Κυκλωμάτων VLSI, και τη Δομική Βιοπληροφορική.

Αυτό είναι το πρώτο βιβλίο Υπολογιστικής Γεωμετρίας στα Ελληνικά, και καλύπτει όλες τις βασικές περιοχές του αντικείμενου: ορατότητα, κυρτότητα και γραμμική βελτιστοποίηση, γειτονία, περιλαμβανομένων των διαγραμμάτων Voronoi και των τριγωνοποιήσεων Delaunay, διατάξεις ευθύγραμμων τμημάτων και ευθειών, καθώς και δομές γεωμετρικών δεδομένων. Δίνει έμφαση στους αλγορίθμους, αλλά και τις αντίστοιχες εφαρμογές τους, ενώ περιλαμβάνει μία πλήρη σειρά ασκήσεων σε κάθε κεφάλαιο καθώς και περισσότερα από 100 σχήματα. Το βιβλίο απευθύνεται σε ευρύ κοινό καθώς δεν προϋποθέτει ειδικές γνώσεις, ενώ η δομή του επιτρέπει τη χρήση του και ως κειμένου αναφοράς.

Ορισμένα κεφάλαια καλύπτουν την ύλη ενός προπτυχιακού μαθήματος. Άλλα κεφάλαια παρουσιάζουν προηγμένα θέματα που δεν αναλύονται στα υπάρχοντα (ξενόγλωσσα) συγγράμματα Υπολογιστικής Γεωμετρίας, όπως ειδικά θέματα ορατότητας (το αντίστοιχο κεφάλαιο οφείλεται στον Χριστόδουλο Φραγκουδάκη), κυρτά περιβλήματα σημείων σε γενική διάσταση, προβλήματα υλοποίησης γεωμετρικών αλγορίθμων και α-σχήματα σημειοσυνόλων. Όπως σημειώνει στο χαιρετισμό του ο Λεωνίδας Γκίμπας, το σύγγραμμα «θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε φοιτητές με ενδιαφέρον για τις πλευρές εκείνες της Πληροφορικής που ασχολούνται με τη μοντελοποίηση του φυσικού κόσμου, ή για τη Θεωρητική Πληροφορική και τους αλγορίθμους».

Ο συγγραφέας

Ο Γιάννης Ζ. Εμίρης είναι καθηγητής Γεωμετρικών και Αλγεβρικών Αλγορίθμων στο Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών, ενώ υπήρξε μόνιμος ερευνητής στο Ερευνητικό Ινστιτούτο INRIA της Γαλλίας. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα επικεντρώνονται στην αλληλεπίδραση μεταξύ Υπολογιστικής Γεωμετρίας και Υπολογιστικής Άλγεβρας με εφαρμογές στη Γεωμετρική Σχεδίαση, τη Ρομποτική και τη Δομική Βιοπληροφορική.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ

Διοικητικό-Ε. Σταθμός Λαρίσης, 10440 ΑΘΗΝΑ, Τηλ. 210-5237635

Επισκεφθείτε μας στο Internet:
www.klidarithmos.gr

ISBN 978-960-461-141-6



9 789604 611416