Πρόλογος

Το βιβλίο με τίτλο «Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου» είναι γραμμένο με βάση το νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Παιδαγωγικού Ινσιτούτου για τα Μαθηματικά Γυμνασίου και απόλυτα εναρμονισμένο με το σχολικό βιβλίο.

Είναι ένα σημαντικό βοήθημα για τους μαθητές αυτής της τάξης, αλλά και οι συνάδελφοι καθηγητές θα βρουν πλούσιο υλικό για το έργο τους.

Η ύλη παρουσιάζεται σε δύο μέρη, Άλγεβρα και Γεωμετρία - Τριγωνομετρία, συνολικά σε επτά κεφάλαια.

Σε κάθε παράγραφο περιέχονται:

- Σύντομη παρουσίαση της θεωρίας με απλά κατανοητά παραδείγματα, με τίτλο «Τι πρέπει να γνωρίζεις».
- Αντιπροσωπευτικά λυμένα παραδείγματα για κάθε περίπτωση με τίτλο «Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα».
- Ερωτήσεις σύντομης απάντησης, κυρίως για προφορική άσκηση, με τίτλο «Σκέψου και απάντησε».
- Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα με τίτλο «Λύσε μόνος σου ασκήσεις και προβλήματα».

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου περιέχονται **επαναληπτικές ασκήσεις**, καθώς και ένα **κριτήριο αξιολόγησης** με τέσσερα θέματα. Επίσης, με την ολοκλήρωση της ύλης, γίνεται μια **επανάληψη** με τη θεωρία σε ερωτήσεις και κατάλληλα επιλεγμένες **γενικές ασκήσεις** σ' όλη την ύλη.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει παράρτημα με **απαντήσεις** ή **υποδείξεις** για όλες τις ερωτήσεις, τις ασκήσεις και τα θέματα των κριτηρίων αξιολόγησης.

Με ευχαρίστηση θα δεχθώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Ιούνιος 2007

Θανάσης Ξένος

Περιεχόμενα

Α΄ Μέρος Άλγεβρα

Κεφάλαιο 1ο
Αλγεβρικές παραστάσεις

1.1. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς 9
1.2. Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα 18
1.3. Πολυώνυμα
Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων 23
1.4. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων 27
1.5. Αξιοσημείωτες ταυτότητες 30
1.6. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών
παραστάσεων 41
1.7. Διαίρεση πολυωνύμων 51
1.8. Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ.
ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων 56
1.9. Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις 58
1.10. Πράξεις ρητών παραστάσεων 61
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 1ο κεφάλαιο 70
1ο Κριτήριο αξιολόγησης 72

Κεφάλαιο 2ο
Εξισώσεις – Ανισώσεις

2.1. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ 73
2.2. Εξισώσεις δεύτερου βαθμού 78
2.3. Προβλήματα εξισώσεων δεύτερου βαθμού .. 85
2.4. Κλασματικές εξισώσεις 89
2.5. Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο 93
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 2ο κεφάλαιο 101
2ο Κριτήριο αξιολόγησης 103

Κεφάλαιο 3ο
Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

3.1. Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης 105
3.2. Η έννοια του γραμμικού συστήματος
και η γραφική επίλυσή του 110
3.3. Αλγεβρική επίλυση γραμμικού
συστήματος 114
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 3ο κεφάλαιο 123
3ο Κριτήριο αξιολόγησης 124

Κεφάλαιο 4ο
Συναρτήσεις

4.1. Η συνάρτηση $y=\alpha x^2$ με $\alpha\neq 0$ 127
4.2. Η συνάρτηση $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$ 132
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 4ο κεφάλαιο 139
4ο Κριτήριο αξιολόγησης 140

Κεφάλαιο 5ο
Πιθανότητες

5.1. Σύνολα 141
5.2. Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα 147
5.3. Η έννοια της πιθανότητας 147
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 5ο κεφάλαιο 158
5ο Κριτήριο αξιολόγησης 159

Β΄ Μέρος Γεωμετρία-Τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 1ο
Γεωμετρία

1.1. Ισότητα τριγώνων 163
1.2. Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων 172
1.3. Θεώρημα του Θαλή 180
1.4. Ομοιοθεσία 171
1.5. Ομοιότητα 190

1.6. Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων 199
Επαναληπτικές ασκήσεις Γεωμετρίας 204
6ο Κριτήριο αξιολόγησης 206

Κεφάλαιο 2ο

Τριγωνομετρία

2.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^o \leq ω \leq 180^o$ 209
2.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών 215
2.3. Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας 219
2.4. Νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων 224
Επαναληπτικές ασκήσεις Τριγωνομετρίας 233
7ο Κριτήριο αξιολόγησης 235

Παραρτήματα

Παράρτημα I

Επανάληψη

Ερωτήσεις θεωρίας 239
Ασκήσεις επανάληψης 242

Παράρτημα II

Απαντήσεις και Λύσεις των ερωτήσεων και των ασκήσεων 245

ΜΕΡΟΣ Α: Άλγεβρα
Κεφάλαιο 1ο: Αλγεβρικές παραστάσεις 246
Κεφάλαιο 2ο: Εξισώσεις – Ανισώσεις 252
Κεφάλαιο 3ο: Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων 255
Κεφάλαιο 4ο: Συναρτήσεις 257
Κεφάλαιο 5ο: Πιθανότητες 258

ΜΕΡΟΣ Β: Γεωμετρία – Τριγωνομετρία
Κεφάλαιο 1ο: Γεωμετρία 261
Κεφάλαιο 2ο: Τριγωνομετρία 265

Ασκήσεις επανάληψης 268

Παράρτημα II

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών 269

ΜΕΡΟΣ Α΄

Άλγεβρα

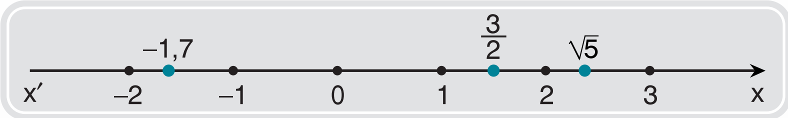
Κεφάλαιο 1ο ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ
Κεφάλαιο 2ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
Κεφάλαιο 3ο ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
Κεφάλαιο 4ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
Κεφάλαιο 5ο ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Α1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Τι πρέπει να γνωρίζεις

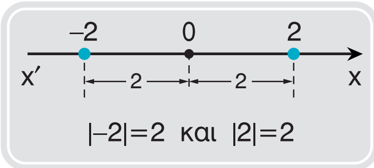
1 Οι **ρητοί** αριθμοί είναι κλάσματα ακεραίων, ενώ οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί ονομάζονται **άρρητοι.** Όλοι οι αριθμοί, ρητοί και άρρητοι, ονομάζονται **πραγματικοί.**

Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται με σημεία ενός άξονα.



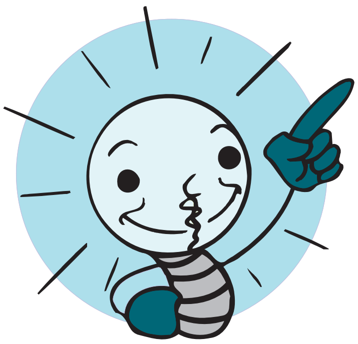
Οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το μηδέν ονομάζονται **θετικοί,** ενώ οι αριθμοί που είναι μικρότεροι από το μηδέν ονομάζονται **αρνητικοί.**

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α ονομάζεται ο αριθμός $|\alpha|$ που ισούται με την απόσταση του α από το μηδέν.



2 Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:

1. **αντιμεταθετική** $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ και $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
2. **προσεταιριστική** $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ και $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
3. **επιμεριστική** $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
4. Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha+0=\alpha$, $\alpha\cdot 1=\alpha$ και $\alpha\cdot 0=0$



Δύο αριθμοί με άθροισμα μηδέν λέγονται **αντίθετοι** $\alpha+(-\alpha)=0$

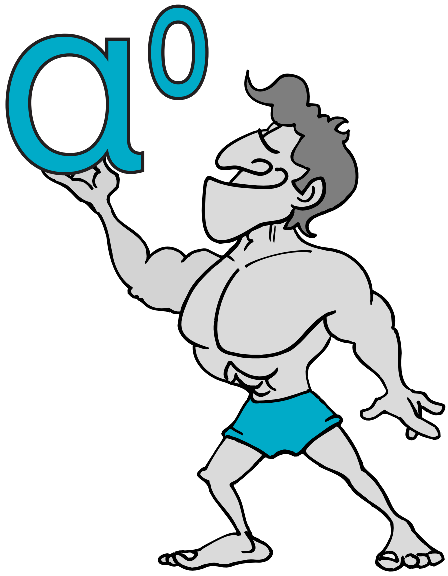
ενώ δύο αριθμοί με γινόμενο τη μονάδα λέγονται **αντίστροφοι** $\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}=1$

3 Για την αφαίρεση και τη διαίρεση πραγματικών αριθμών ισχύουν τα εξής:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta) \quad \text{και} \quad \alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$$

4 Η **δύναμη** ενός πραγματικού αριθμού α με εκθέτη φυσικό $\nu\geq 2$ ορίζεται ως εξής:

$$\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$$



Επίσης, ισχύει

$$\alpha^1 = \alpha\,, \quad \alpha^0 = 1 \ (\alpha \neq 0) \quad \text{και} \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \ (\alpha \neq 0)$$

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς ισχύουν οι ιδιότητες

i) $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	iv) $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$
ii) $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	v) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$
iii) $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$	vi) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

5 **Τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός $\sqrt{\alpha}$ που αν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α.

$$\boxed{\sqrt{\alpha} = \beta \quad \text{όταν} \quad \beta^2 = \alpha} \qquad (\alpha,\, \beta \geq 0)$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

α) Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \sqrt{\alpha^2} = \alpha$	
β) $\sqrt{\alpha^2} = \lvert\alpha\rvert$ για οποιονδήποτε αριθμό α	
γ) $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$	με $\alpha, \beta \geq 0$
δ) $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$	με $\alpha, \beta \geq 0$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

1 Χαρακτήρισε καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς ως φυσικό ή ακέραιο ή ρητό ή άρρητο.

-1, $\frac{4}{5}$, 0, $\sqrt{2}$, $-\frac{7}{5}$,

$\sqrt{25}$, π, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $3{,}15$,

$6{,}\overline{2}$, $1-\sqrt{2}$, $\frac{21}{3}$

Λύση

Υπενθυμίζουμε τα εξής:

α) Φυσικοί αριθμοί είναι οι $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

β) Ακέραιοι αριθμοί είναι οι $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

γ) Οι φυσικοί αριθμοί είναι ακέραιοι και οι ακέραιοι είναι ρητοί.

δ) Οι ρητοί αριθμοί είναι απλοί δεκαδικοί (π.χ. 3,82) ή περιοδικοί δεκαδικοί (π.χ. $\frac{7}{3} = 2{,}333\ldots = 2{,}\overline{3}$)

ε) Οι άρρητοι αριθμοί γράφονται ως δεκαδικοί με άπειρα μη περιοδικά ψηφία, όπως π.χ. οι τετραγωνικές ρίζες που δεν είναι ρητοί αριθμοί.

Με βάση τα παραπάνω καταρτίζουμε τον πίνακα που ακολουθεί.

Αριθμός	-1	$\frac{4}{5}$	0	$\sqrt{2}$	$-\frac{7}{5}$	$\sqrt{25}$	π	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3{,}15$	$6{,}\overline{2}$	$1-\sqrt{2}$	$\frac{21}{3}$
Φυσικός			✓			✓						✓
Ακέραιος	✓		✓			✓						✓
Ρητός	✓	✓	✓		✓	✓			✓	✓		✓
Άρρητος				✓			✓	✓			✓	

2 Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων

α) $(-2)\cdot(-3)+\left(-\frac{7}{5}\right):\left(+\frac{1}{5}\right)$ **β)** $\dfrac{-3\cdot 2+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}-\dfrac{-2-\frac{1}{2}}{1-(-0{,}5)^2}-(-1)^{-3}$

Λύση

α) $(-2)\cdot(-3)+\left(-\frac{7}{5}\right):\left(+\frac{1}{5}\right)=$

$=(+6)+\left(-\frac{7}{5}\right)\cdot(+5)=$

$=(+6)+(-7)=6-7=-1.$

> **Προτεραιότητα πράξεων**
>
> **α) Υπολογισμός δυνάμεων**
> **β) Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις**
> **γ) Προσθέσεις και αφαιρέσεις**
>
> **Αν υπάρχουν παρενθέσεις ή αγκύλες, τότε πρώτα γίνονται με την παραπάνω σειρά οι πράξεις σ' αυτές.**

β) $\dfrac{-3\cdot 2+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}-\dfrac{-2-\frac{1}{2}}{1-(-0{,}5)^2}-(-1)^{-3}=$

$=\dfrac{-6+1}{2^2}-\dfrac{-\frac{4}{2}-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}-\dfrac{1}{(-1)^3}=-\dfrac{5}{4}-\dfrac{-\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{-1}=$

$=-\dfrac{5}{4}+\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}}+1=-\dfrac{5}{4}+\dfrac{20}{6}+1=-\dfrac{5}{4}+\dfrac{10}{3}+1=$

$=\dfrac{-15+40+12}{12}=\dfrac{37}{12}.$

3 Απλοποίησε το κλάσμα

$K=\dfrac{12^{15}\cdot 18^{17}}{36^{24}}$

Λύση

Αναλύουμε κάθε βάση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και βρίσκουμε

$12=2^2\cdot 3,\quad 18=2\cdot 3^2\quad$ και $\quad 36=2^2\cdot 3^2$

Επομένως,

$$K=\frac{(2^2\cdot 3)^{15}\cdot(2\cdot 3^2)^{17}}{(2^2\cdot 3^2)^{24}}=\frac{2^{30}\cdot 3^{15}\cdot 2^{17}\cdot 3^{34}}{2^{48}\cdot 3^{48}}=\frac{2^{47}\cdot 3^{49}}{2^{48}\cdot 3^{48}}=$$

$$=2^{47-48}\cdot 3^{49-48}=2^{-1}\cdot 3^{1}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$$

4 Γράψε ως δύναμη του α την παράσταση

$$\left[\alpha^3 \cdot \frac{(\alpha^2)^{-3}}{\alpha^{-1}}\right]^2 : \left[\alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4\right]^{-5}$$

Λύση

Εφαρμόζοντας ιδιότητες των δυνάμεων, έχουμε:

$$\left[\alpha^3 \cdot \frac{(\alpha^2)^{-3}}{\alpha^{-1}}\right]^2 : \left[\alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4\right]^{-5} = \left(\alpha^3 \cdot \frac{\alpha^{-6}}{\alpha^{-1}}\right)^2 : (\alpha \cdot \alpha^{-4})^{-5} =$$

$$= (\alpha^3 \cdot \alpha^{-5})^2 : (\alpha^{-3})^{-5} = (\alpha^{-2})^2 : \alpha^{15} = \alpha^{-4} : \alpha^{15} = \alpha^{-4-15} = \alpha^{-19}.$$

5 Αν $x^2 \cdot y^3 = -\sqrt{2}$, υπολόγισε την τιμή της παράστασης
$A = x^{-1} \cdot (x^3y^{-2})^{-2} \cdot [(x^4y^2)^5 : (x^{-5}y^{-2})^{-1}]$

Λύση

Απλοποιούμε πρώτα την παράσταση Α, εφαρμόζοντας ιδιότητες των δυνάμεων.

$$A = x^{-1} \cdot x^{-6} \cdot y^4 \cdot [(x^{20} \cdot y^{10}) : (x^5 \cdot y^2)] = x^{-7} \cdot y^4 \cdot \frac{x^{20} \cdot y^{10}}{x^5 \cdot y^2} =$$

$$= x^{-7} \cdot y^4 \cdot x^{15} \cdot y^8 = x^{-7+15} \cdot y^{4+8} = x^8 \cdot y^{12} = (x^2 \cdot y^3)^4 =$$

$$= (-\sqrt{2})^4 = (\sqrt{2})^4 = 2^2 = 4.$$

6 Αν $\frac{1}{2}\alpha + 2{,}5\beta + 1{,}5\alpha - \frac{1}{2}\beta = -2$, βρες την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{15 - 2(\alpha - 2\beta) - 3(\alpha - \beta) + 3[5\alpha - (-\beta + 1)] - 5}{-2(2\alpha - \beta) - 2(-2\alpha - 5\beta) - 4(3\beta - 1) - \left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)^{-1}}$$

Λύση

Η ισότητα $\frac{1}{2}\alpha + 2{,}5\beta + 1{,}5\alpha - \frac{1}{2}\beta = -2$ γράφεται

$0{,}5\alpha + 1{,}5\alpha + 2{,}5\beta - 0{,}5\beta = -2$ ή $2\alpha + 2\beta = -2$ ή

$2(\alpha + \beta) = -2$ ή $\alpha + \beta = -1$

Κάνουμε πράξεις στην παράσταση Α με σκοπό να δημιουργήσουμε σ' αυτήν την παράσταση $\alpha + \beta$.

Έχουμε:

$$A = \frac{15 - 2\alpha + 4\beta - 3\alpha + 3\beta + 3\,(5\alpha + \beta - 1) - 5}{-4\alpha + 2\beta + 4\alpha + 10\beta - 12\beta + 4 - (\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{15 - 2\alpha + 4\beta - 3\alpha + 3\beta + 15\alpha + 3\beta - 3 - 5}{-4\alpha + 2\beta + 4\alpha + 10\beta - 12\beta + 4 - \alpha - \beta} =$$

$$= \frac{15 - 3 - 5 - 2\alpha - 3\alpha + 15\alpha + 4\beta + 3\beta + 3\beta}{-4\alpha + 4\alpha - \alpha + 2\beta + 10\beta - 12\beta - \beta + 4} =$$

$$= \frac{7 + 10\alpha + 10\beta}{-\alpha - \beta + 4} = \frac{7 + 10 \cdot (\alpha + \beta)}{-(\alpha + \beta) + 4}$$

Επειδή $\alpha + \beta = -1$, είναι $A = \frac{7 + 10 \cdot (-1)}{-(-1) + 4} = \frac{7 - 10}{1 + 4} = \frac{-3}{5}$.

7 Να απλοποιηθεί η παράσταση

$A = 3\sqrt{8} - 5\sqrt{18} - 2\sqrt{72} + 5\sqrt{50}$

Λύση

- $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,
- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,
- $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ και
- $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Σε περίπτωση που ο α δεν είναι τετράγωνο ακεραίου, για να απλοποιηθεί ο αριθμός $\sqrt{\alpha}$ γράφουμε τον α ως γινόμενο δύο αριθμών έτσι, ώστε ο ένας απ' αυτούς να είναι τετράγωνο ακεραίου.
Γενικά, ισχύει $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt{\beta}$, όπου $\alpha, \beta \geq 0$

Επομένως,

$A = 3 \cdot 2\sqrt{2} - 5 \cdot 3\sqrt{2} - 2 \cdot 6\sqrt{2} + 5 \cdot 5\sqrt{2} =$

$= 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 25\sqrt{2} = (6 - 15 - 12 + 25)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

8 Να μετατραπούν τα κλάσματα

$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}$ και $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

Λύση

α) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

β) $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Για να μετατρέψω ένα κάσμα της μορφής $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή, πολλαπλασιάζω τους όρους του με το $\sqrt{\beta}$
Θυμήσου ότι $\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\beta} = \beta$

γ) $\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

δ) $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2} =$

$= \frac{3 \cdot 2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{6 + \sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \cdot (3 + \sqrt{3})}{2} =$

$= 3 + \sqrt{3}$

β' τρόπος:

$\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{\frac{6}{2}} = 3 + \sqrt{3}$.

9 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $-\sqrt{2} + 2x = 2\sqrt{2} - x$

β) $x : \sqrt{3} = \sqrt{27}$

γ) $\sqrt{2x - 1} = 3$

δ) $\sqrt{5x - 2} = 2\sqrt{1 - x}$

Λύση

α) $-\sqrt{2} + 2x = 2\sqrt{2} - x$ ή $2x + x = 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$ ή

$3x = 3\sqrt{2}$ ή $x = \sqrt{2}$

β) $x : \sqrt{3} = \sqrt{27}$ ή $x = \sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$ ή $x = \sqrt{27 \cdot 3}$ ή

$x = \sqrt{81}$ ή $x = 9$

γ) Ισχύει $\sqrt{2x - 1} = 3$, όταν $2x - 1 = 9$ ή $2x = 10$ ή $x = 5$.

δ) Δύο μη αρνητικοί αριθμοί είναι ίσοι, όταν τα τετράγωνά τους είναι ίσα, δηλαδή η εξίσωση γράφεται

$$\left(\sqrt{5x-2}\right)^2 = \left(2\sqrt{1-x}\right)^2 \quad ή \quad 5x-2 = 4\cdot(1-x) \quad ή \quad 5x-2 = 4-4x$$

$$ή \quad 5x+4x = 2+4 \quad ή \quad 9x = 6 \quad ή \quad x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

10 Βρες τους πραγματικούς αριθμούς x και y, για τους οποίους ισχύει

$$2x-1 = \sqrt{2}\,(1-x)$$

και $\quad |y| = x^4.$

Λύση

Η πρώτη εξίσωση έχει άγνωστο μόνο το x και θα τη λύσουμε.

$$2x-1 = \sqrt{2}\,(1-x) \quad ή \quad 2x-1 = \sqrt{2}-\sqrt{2}\,x \quad ή$$

$$2x+\sqrt{2}\,x = \sqrt{2}+1 \quad ή \quad (2+\sqrt{2})\,x = \sqrt{2}+1 \quad ή$$

$$x = \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Επομένως $\quad |y| = x^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1^4}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$

δηλαδή $\quad y = \frac{1}{4} \quad ή \quad y = -\frac{1}{4}.$

Άρα, $\quad \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ και } y = \frac{1}{4}\right) \quad ή \quad \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ και } y = -\frac{1}{4}\right)$

Σκέψου και απάντησε

1) Γιατί δύο αντίστροφοι αριθμοί είναι πάντοτε ομόσημοι;

2) Δύο αντίθετοι αριθμοί είναι πάντοτε ετερόσημοι;

3) Ποιος αριθμός έχει αντίθετο τον εαυτό του;

4) Ποιοι αριθμοί έχουν αντίστροφο τον εαυτό τους;

5) Τι πρόσημο έχει το γινόμενο 2007 αρνητικών αριθμών;

6) Ένας ρητός αριθμός είναι ακέραιος ή πραγματικός;

7) Ποιος είναι ο αντίθετος του αντίστροφου του αριθμού $-\frac{1}{α}$;

8) Ποιοι αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή 2;

9) Τι σχέση έχουν δύο αριθμοί με την ίδια απόλυτη τιμή;

10) Βρες το λόγο $α^3 : α^3$ με δύο τρόπους και εξήγησε γιατί $α^0 = 1$.

11) Σύγκρινε τους αριθμούς $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ και $\sqrt{9+16}$. Γενικά, τι έχεις να πεις για τους αριθμούς $\sqrt{α}+\sqrt{β}$ και $\sqrt{α+β}$; Βρες ένα παράδειγμα, στο οποίο να ισχύει $\sqrt{α}+\sqrt{β} = \sqrt{α+β}$

12) Αληθεύει η ισότητα $\sqrt{α}-\sqrt{β} = \sqrt{α-β}$; Ανέφερε ένα παράδειγμα για να τεκμηριώσεις την απάντησή σου.

13) Βρες τους αριθμούς $\sqrt{(-4)^2}$ και $-\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}}$.

14) Συμπλήρωσε τις ισότητες

α) $3 \cdot (x + \ldots) = \ldots + 12$,

β) $5x - \ldots y = \ldots (x - 2y)$ και

γ) $\sqrt{\ldots} = 3\sqrt{3}$.

15) Βρες το λάθος στον παρακάτω συλλογισμό.

«Επειδή $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2$,

ισχύει $\left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2$ κι επομένως

$\sqrt{\left(5 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{7}{2}\right)^2}$ ή

$5 - \frac{7}{2} = 2 - \frac{7}{2}$ ή $5 = 2$!!»

16) Αν οι x, y είναι αρνητικοί αριθμοί, ορίζονται τα σύμβολα $\sqrt{xy}$ και $\sqrt{\frac{x}{y}}$; Αν ναι, πώς γράφονται με τη χρήση δύο τετραγωνικών ριζών;

17) Για ποιες ακέραιες τιμές του x ορίζεται το σύμβολο $\sqrt{2x - 7}$;

18) Γράψε ως μια δύναμη τους αριθμούς

$A = 32 \cdot 2^5$, $B = 81^3 \cdot 27^2$ και

$\Gamma = 100^2 \cdot 1.000^3$

19) Ποιες από τις παρακάτω ισότητες αληθεύουν;

α) $(\alpha + \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) + (\beta : \gamma)$,

β) $\alpha : (\beta + \gamma) = (\alpha : \beta) + (\alpha : \gamma)$,

γ) $\alpha\beta - \alpha\gamma = \alpha(\beta - \gamma)$ και

δ) $\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = (\alpha - \beta) \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{-1}$.

20) Ποιος είναι ο αριθμός x που επαληθεύει την ισότητα $2^{x-1} = \frac{1}{16}$;

21) Πόσα μηδενικά έχει ο αριθμός 10^{100^5};

22) Οι αριθμοί $3 - 2\sqrt{2}$ και $3 + 2\sqrt{2}$ είναι αντίστροφοι;

23) Ποιος αριθμός δεν έχει αντίστροφο;

Λύσε μόνος σου ασκήσεις και προβλήματα

1 Να γίνουν οι πράξεις

α) $\left(\frac{2}{3} - 3 + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{1}{2} + 5\right)$ **β)** $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{7}{6}}{3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} \cdot \left[\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{2}{1 + 0{,}5}}{4 - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{1 - 0{,}5}\right)} \cdot (5^2 + 2^2)\right]$

2 Αν $x + 2y = -\frac{7}{2}$, βρες την τιμή της παράστασης

$A = -(x - 3y) - [(2x + 4y) - (-x + 2y - 1)] - 6(2 - x) + 3y$

3 Βρες την τιμή των παραστάσεων

α) $(-2)^3 - \left[-4^0 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} + 3 \cdot (-4)^1\right] : 19 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left[(0{,}5^{-1})^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]$

β) $(-1)^{\nu} + (-1)^{\nu+1} + (-1)^{\nu+2} + (-1)^{\nu+3}$, ν φυσικός αριθμός

γ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2006} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2007} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4000} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^{-6}$

δ) $\left[(-2)^3 + \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} - \left(\dfrac{2}{3 - \frac{1}{2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} + (0{,}5)^{-5}\right]^{(0{,}01)^{-2} - 2007}$

ε) $\sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{9}}}} - |1 - \sqrt{2}| \cdot (\sqrt{2} + 1) - \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$

4 Απλοποίησε τις παραστάσεις

α) $\left(-\frac{2}{3}\alpha^2\beta\gamma\right)^2 \cdot \alpha\beta^2\gamma \cdot \left(\frac{3}{2}\alpha\beta\gamma^2\right)^3$ **β)** $[(2x^3y)^{-2} : (4^{-1}x^{-2}y^{-1})^3] \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-2}y^{-3}\right)^{-1}$

γ) $\left(\frac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2y^2}{5x^3}\right)^{-1} \cdot (-2x^{-1}y^4)^{-1}$ **δ)** $[(\alpha^{-1}\beta^2)^2 \cdot \beta^{-1} \cdot (\alpha^3)^2]^{-2} : \left(\frac{\alpha^{-2}}{\beta^3}\right)^{-1}$

5 Απλοποίησε τις παραστάσεις

α) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50}$ **β)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{18}$ **γ)** $\frac{\sqrt{45} + 3\sqrt{18} - 2\sqrt{27}}{\sqrt{20} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{8}}$

δ) $\sqrt{7} + \sqrt{28} + 2\sqrt{63}$ **ε)** $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{27}) : \sqrt{12}$

στ) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 4\sqrt{75} - \sqrt{48} + 2\sqrt{80} + 3\sqrt{20}$ **ζ)** $\sqrt{\sqrt{0{,}0016}} - \sqrt{3 \cdot 27^{-1}}$

η) $\left(-3\sqrt{2}\right)^3 + 4\sqrt{18} - \sqrt{0{,}5^{-1}}$

6 Να βρεθούν τα γινόμενα

α) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{128} \cdot \sqrt{405} \cdot \sqrt{0{,}2}$ **β)** $(\sqrt{20} + \sqrt{12}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$

γ) $(5 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{8})$ **δ)** $(2\sqrt{72} - 3\sqrt{18}) \cdot (3\sqrt{18} + 5\sqrt{50})$

ε) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}}$ **στ)** $(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}) \cdot (2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) \cdot (2+\sqrt{2})$.

7 Να μετατραπούν σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή τα κλάσματα

α) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ **β)** $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ **γ)** $\sqrt{\frac{9}{5}}$ **δ)** $\frac{1}{\sqrt{72}}$ και **ε)** $\frac{2-\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$.

8 Αν $x = \sqrt{4+\sqrt{16}} + \sqrt{7-\sqrt{4}} + \sqrt{36-\sqrt{16}} - \sqrt{81-\sqrt{81}}$ και $y = 8\sqrt{2} : \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$,

βρες την τιμή της παράστασης $A = x^2 - 3\sqrt{y} + \frac{1}{5}x^4$.

9 Απλοποίησε τα κλάσματα

α) $\frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, **β)** $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{32}}{\sqrt{3}+\sqrt{8}}$ και **γ)** $\frac{5\sqrt{7}+2\sqrt{63}-4\sqrt{28}-\frac{1}{2}\sqrt{700}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}-2\sqrt{112}}$.

10 Εξήγησε γιατί ο αριθμός $A = 64 \cdot \left(5\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\sqrt{12} + 8\sqrt{27} - 10\sqrt{\frac{3}{16}}\right)^{-2}$ είναι ρητός.

11 Λύσε τις εξισώσεις

α) $5 + 3\sqrt{x} = 11$, **β)** $\sqrt{4x+1} = 3$, **γ)** $2 + \sqrt{5x+6} = 6$ και **δ)** $3\sqrt{1-x} + 7 = 5$

12 Γράψε ως μια δύναμη τα γινόμενα

α) $100 \cdot 75 \cdot 27 \cdot 4$ **β)** $0{,}01 \cdot 0{,}25 \cdot 20^{-7}$ **γ)** $-2^6 \cdot (-25)^3 \cdot 2^{-3} \cdot \frac{1}{125}$

13 Υπολόγισε τους αριθμούς

α) $(0{,}25)^{35} \cdot 8^{22}$ **β)** $\dfrac{12^{200} \cdot (1{,}5)^{100}}{6^{298}}$

14 Να βρεθεί το πλήθος των μηδενικών του αριθμού $4^{120} \cdot (-1{,}25)^{80}$.

15 Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{1}{(-1)^{\nu}} + \dfrac{1}{(-1)^{\nu+1}} + \dfrac{1}{(-1)^{\nu+2}} + \dfrac{1}{(-1)^{\nu+3}} = 0$ για οποιονδηποτε ακέραιο αριθμό ν.

16 Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \left(\frac{\alpha^2}{2\beta}\right)^3 \cdot \left(\frac{4\beta}{3\alpha}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\alpha^{-2}\beta^{-1}\gamma^{-3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\alpha^{-3}}{\beta^{-2}} : \frac{\alpha^{-2}}{3\beta^{-2}}\right)$$

για $\alpha = -0{,}01$, $\beta = 2 \cdot (-3)^{-1}$ και $\gamma = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-2}$.

17 Να μετατραπεί το κλάσμα $K = \dfrac{(-1)^{500} \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right)^4 \cdot 9^2 + (0{,}04)^{-1} + 2007^0}{5\sqrt{\sqrt{64}} + 2\sqrt{\sqrt{4}} + 3\sqrt{3\sqrt{36}}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή.

18 Τι τιμές παίρνουν οι αριθμοί α και β ώστε να ορίζεται η παράσταση

$A = \dfrac{\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\beta}} : \left(\dfrac{\sqrt{\beta^2}}{\sqrt{-\alpha}}\right)^{-1}$; Να αποδειχθεί ότι $A = \sqrt{-\alpha\beta}$.

19 Βρες τον άγνωστο x σε καθεμιά από τις ισότητες

α) $|2x-1| = 7$, **β)** $\big|1-|x-1|\big| = 2$ και **γ)** $\big|2-|x-5|\big| + 1 = 0$.