Φίλη μαθήτρια, φίλε μαθητή

Το βιβλίο που κρατάς περιέχει με απλό, κατανοητό και μεθοδικό τρόπο την ύλη των Μαθηματικών, Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, της Β΄ Λυκείου. Η διάταξη της ύλης ακολουθεί τη σειρά του σχολικού βιβλίου, ώστε το βιβλίο να σου είναι χρήσιμο στη μελέτη, προετοιμασία και βαθιά κατανόηση του καθημερινού μαθήματος, αλλά και των διαγωνισμάτων κάθε φύσεως.

Σε κάθε ενότητα περιέχονται:

- **Η βασική θεωρία** με τη μορφή ερωτήσεων - απαντήσεων.
- **Λυμένες ασκήσεις**, μεθοδικά τακτοποιημένες, που συνοδεύονται από διευκρινιστικά σχόλια, παρατηρήσεις και μεθοδολογικές επισημάνσεις.
- **Ερωτήσεις κατανόησης και ασκήσεις για λύση**, ταξινομημένες με βαθμό δυσκολίας που καλύπτουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις και είναι απαραίτητες για αυτενέργεια και εξάσκηση.

Μετά την ολοκλήρωση της ύλης δίνονται **γενικά θέματα για επανάληψη** καθώς και **επαναληπτικά διαγωνίσματα**. Στο τέλος του βιβλίου δίνονται **οι απαντήσεις, οι υποδείξεις ή λύσεις σε όλες τις προτεινόμενες ασκήσεις**.

Η λειτουργική δομή του βιβλίου, η λεπτομερής παράθεση της θεωρίας και των σχολίων, το πλήθος, η ποιότητα και το εύρος των ασκήσεων καθώς και η συνολική σύνθεσή του, θέλουμε να πιστεύουμε ότι το καθιστούν ένα χρήσιμο και αποτελεσματικό βοήθημα για κάθε μαθητή, όσο υψηλούς στόχους και να έχει θέσει.

Θέλουμε να ευχαριστήσουμε από τη θέση αυτή τη συνάδελφο Φωτεινή Καλδή για τις εύστοχες παρατηρήσεις της, τον συνάδελφο Ηλία Μιχαλίτση που έκανε τη σελιδοποίηση και τον συνάδελφο Δημήτρη Τσάκο που είχε την επιμέλεια του βιβλίου.

Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

Διανύσματα

1. Η έννοια του διανύσματος, Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων 11
2. Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα 33
3. Άξονας - Καρτεσιανό επίπεδο, Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων, Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος 63
4. Εσωτερικό γινόμενο 92
Διαγωνίσματα στα διανύσματα 139
5. Η επανάληψη στα διανύσματα 146

Η ευθεία στο επίπεδο

6. Εξίσωση ευθείας 152
7. Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας 182
8. Εμβαδόν τριγώνου 211
Διαγωνίσματα στην ευθεία 240
9. Η επανάληψη στην ευθεία 244

Κωνικές τομές

10. Ο κύκλος 250
11. Η παραβολή 285
12. Η έλλειψη 310
13. Η υπερβολή 339
14. Η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$ 363
Διαγωνίσματα στις κωνικές τομές 374
15. Η επανάληψη στις κωνικές τομές 381

Θεωρία αριθμών

16. Η μαθηματική επαγωγή 386
17. Η Ευκλείδεια διαίρεση 394

18. Διαιρετότητα 410
Διαγώνισμα στη θεωρία αριθμών 424

Επανάληψη

19. Γενική επανάληψη - Θέματα σε όλη την ύλη 426
Επαναληπτικά διαγωνίσματα 434

Υποδείξεις - Απαντήσεις

Υποδείξεις και απαντήσεις των προτεινόμενων ασκήσεων 445

Ενότητα 1

☑ *Η έννοια του διανύσματος*
☑ *Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων*

Βασική θεωρία

ΘΕΜΑ 1ο ***α) Τι ονομάζουμε διάνυσμα;***
β) Τι ονομάζουμε μέτρο ενός διανύσματος;
γ) Τι ονομάζουμε μηδενικό διάνυσμα;
δ) Τι ονομάζουμε φορέα ενός διανύσματος;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Διάνυσμα ονομάζουμε κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή κάθε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα.

Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο άκρο λέγεται **πέρας** του διανύσματος. Το διάνυσμα με αρχή το σημείο Α και πέρας το σημείο Β συμβολίζεται $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$. Για τον συμβολισμό των διανυσμάτων, πολλές φορές, χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου επιγραμμισμένα με ένα βέλος, για παράδειγμα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{u}, \vec{v}$.

β) Μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, δηλαδή την απόσταση των άκρων του. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ συμβολίζεται με $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$. Επομένως είναι $|\overrightarrow{AB}| = d(A, B)$.

γ) Μηδενικό διάνυσμα ονομάζουμε κάθε διάνυσμα του οποίου τα άκρα συμπίπτουν. Συνήθως το συμβολίζουμε με $\vec{\mathbf{0}}$. Το μέτρο του μηδενικού διανύσματος είναι ίσο με μηδέν. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$|\overrightarrow{AB}| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

δ) Φορέα του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζουμε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Για το μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ θεωρούμε ως φορέα του οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το Α.

ΘΕΜΑ 2ο ***α) Τι λέμε συγγραμμικά διανύσματα;***

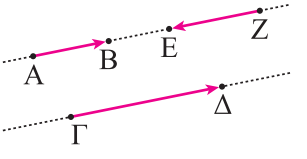
β) Πότε δύο διανύσματα λέγονται ομόρροπα;

γ) Πότε δύο διανύσματα λέγονται αντίρροπα;

δ) Πότε δύο διανύσματα λέγονται ίσα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Συγγραμμικά ή **παράλληλα** διανύσματα ονομάζουμε τα διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς. Δύο διανύσματα που είναι παράλληλα ή συγγραμμικά λέμε ότι έχουν την **ίδια διεύθυνση**.

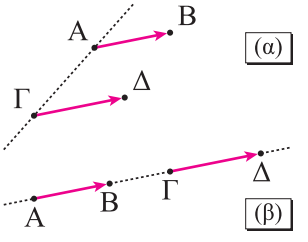


Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{ZE}$ είναι παράλληλα ή συγγραμμικά. Γράφουμε τότε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta} // \overrightarrow{ZE}$.

Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ θεωρείται παράλληλο προς κάθε άλλο διάνυσμα.

β) Ομόρροπα λέγονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ όταν:

- έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ (σχήμα α) ή
- έχουν κοινό φορέα και μια από τις ημιευθείες ΑΒ, ΓΔ περιέχει την άλλη (σχήμα β).

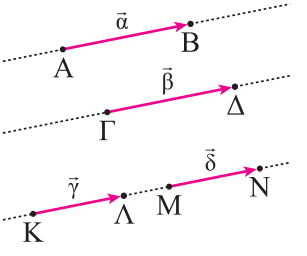


Στην περίπτωση όπου τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά, λέμε ότι έχουν την **ίδια κατεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathbf{\Gamma\Delta}}$.

γ) Αντίρροπα λέγονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\mathbf{\Gamma\Delta}}$.

Το μηδενικό διάνυσμα θεωρούμε ότι έχει την ίδια κατεύθυνση με οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα.

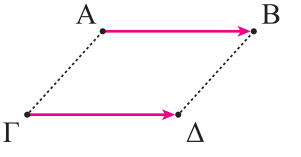
δ) Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέμε ότι είναι **ίσα** αν και μόνο αν έχουν την ίδια κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά) και ίσα μέτρα.



Είναι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}=\vec{\delta}$.

Σχόλιο

Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, που είναι ίσα. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:



- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma A}$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$
- *Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ, τότε $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ και αντίστροφα.*

Οι ισοδυναμίες αυτές αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμες στη λύση ασκήσεων.

ΘΕΜΑ 3ο ***α) Πότε δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα;***

β) Τι ονομάζουμε γωνία δύο διανυσμάτων και τι τιμές παίρνει;

γ) Τι συμπεραίνουμε για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ όταν:

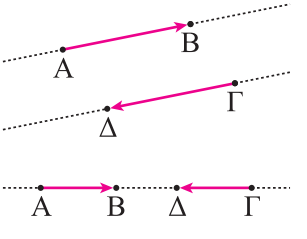
- $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=0$;
- $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=\pi$;
- $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=\frac{\pi}{2}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Δύο διανύσματα λέμε ότι είναι **αντίθετα** αν και μόνο αν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Για τα αντίθετα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ γράφουμε:

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$$



Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

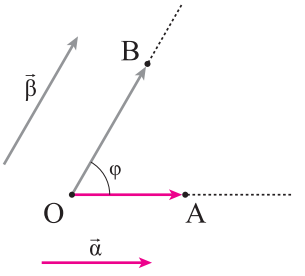
i) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

ii) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

β) Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο Ο του επιπέδου θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ (δες το επόμενο σχήμα).

Ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων** $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}})$ την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ που ορίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ.

Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου Ο και ισχύει:



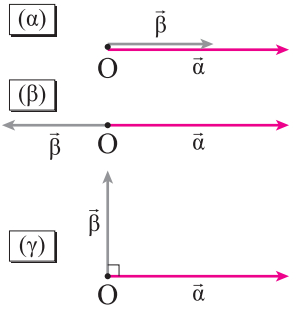
$$0 \le (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) \le \pi$$

Σχόλιο

Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ *είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των* $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ *μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία* φ, *με* $0 \le \varphi \le \pi$.

γ) Για τη γωνία δύο διανυσμάτων διακρίνουμε τις τρεις παρακάτω χαρακτηριστικές περιπτώσεις:

- Αν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 0$, τότε $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ (σχήμα α).
- Αν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \pi$, τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ (σχήμα β).
- Αν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{\pi}{2}$, τότε οι φορείς των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέμνονται κάθετα, τα διανύσματα ονομάζονται **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (σχήμα γ).



ΘΕΜΑ 4ο ***α) Πώς ορίζουμε το άθροισμα*** $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ***των διανυσμάτων*** $\vec{\alpha}$ ***και*** $\vec{\beta}$***;***

β) Πώς προσθέτουμε δύο διανύσματα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου;

γ) Ποιες ιδιότητες ισχύουν για το άθροισμα των διανυσμάτων;

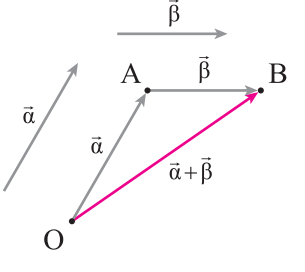
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο Ο του επιπέδου θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ το ονομάζουμε **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$



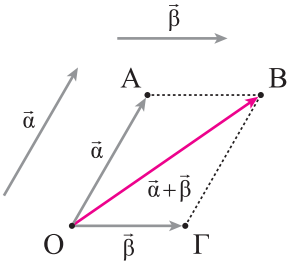
Τονίζουμε ότι:

Το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του σημείου Ο.

β) Με αρχή το σημείο Ο θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\beta}$$

και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ.



Επειδή ισχύει $\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο ΟΒ του παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ *(κανόνας του παραλληλογράμμου)*.

Έτσι, για να προσθέσουμε δύο διανύσματα, αρκεί:

- να τα κάνουμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου ή
- να τα θεωρήσουμε με κοινή αρχή, οπότε το άθροισμά τους θα ορίζεται από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται.

γ) Για το άθροισμα διανυσμάτων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$	(αντιμεταθετική ιδιότητα)
ii) $\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$	(προσεταιριστική ιδιότητα)
iii) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$	($\vec{0}$: μηδενικό διάνυσμα)
iv) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$	($-\vec{\alpha}$: αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\alpha}$)

Επειδή ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, σε ένα άθροισμα ν διανυσμάτων μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των προσθετέων ή ακόμη και να αντικαθιστούμε κάποιους από αυτούς με το άθροισμά τους.

ΘΕΜΑ 5ο ***α) Πώς ορίζουμε τη διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;***

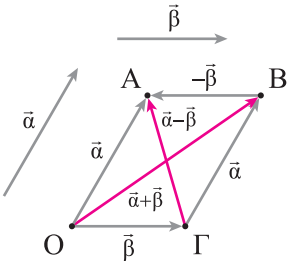
β) Να λυθεί η εξίσωση $\vec{x}+\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τυχαία διανύσματα.

Ορίζουμε ως **διαφορά** του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή:

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$$



Έτσι, αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με κοινή αρχή το τυχαίο σημείο Ο, τότε:

Η μία διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται μας δίνει το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και η άλλη τη διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

β) Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα. Τότε:

$$\vec{x}+\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{x}+\vec{\alpha})+(-\vec{\alpha})=\vec{\beta}+(-\vec{\alpha}) \Leftrightarrow \vec{x}+[\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})]=\vec{\beta}-\vec{\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \vec{x}+\vec{0}=\vec{\beta}-\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$$

Άρα $\vec{x}+\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 6ο ***Έστω Ο τυχαίο σημείο του χώρου και Α, Β δύο σημεία.***

α) Τι λέμε διάνυσμα θέσης του σημείου Α ή του σημείου Β;

β) Πώς εκφράζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με τη βοήθεια των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Έστω διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και Ο τυχαίο σημείο του χώρου. Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ λέγονται **διανύσματα θέσης των σημείων Α και Β** ή **διανυσματικές ακτίνες των Α και Β** αντίστοιχα. Το σημείο Ο, που είναι η κοινή αρχή των διανυσματικών ακτίνων, λέγεται **σημείο αναφοράς**.

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και οι διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ συνδέονται με τη θεμελιώδη σχέση:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

Επομένως, **κάθε διάνυσμα ισούται με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.**

Σχόλιο

Με διανυσματικές ακτίνες λύνονται σύντομα πολλά θέματα του κεφαλαίου αυτού. Ως σημείο αναφοράς επιλέγουμε κατάλληλο σημείο του σχήματος ή του χώρου.

Εφαρμογές - Λυμένες ασκήσεις

1. Η έννοια του διανύσματος - Βασικές ιδιότητες

Σχόλια - Μέθοδος

α) Μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγεται η απόσταση των άκρων του. Έτσι:

$$|\overrightarrow{AB}| = (AB)$$

Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, τότε το $\vec{\alpha}$ λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα**.

β) Δύο διανύσματα με τον ίδιο ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**.

γ) Δύο διανύσματα, μη μηδενικά, με την ίδια κατεύθυνση λέγονται **ομόρροπα**, ενώ όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση λέγονται **αντίρροπα**. Γράφουμε, αντίστοιχα, ότι:

$$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \text{ (ομόρροπα)} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \text{ (αντίρροπα)}$$

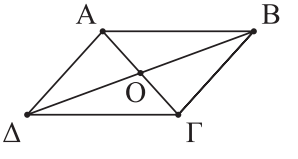
δ) Ίσα διανύσματα λέγονται αυτά που έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα, ενώ **αντίθετα** διανύσματα λέγονται αυτά που έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

1.1 **Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν:**

α) δύο ίσα διανύσματα,

β) δύο αντίθετα διανύσματα,

γ) δύο διανύσματα με ίσα μέτρα.



ΛΥΣΗ

α) Ίσα διανύσματα είναι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, όπως επίσης και τα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, διότι έχουν ίσα μέτρα (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και την ίδια κατεύθυνση (είναι ομόρροπα). Ίσα είναι επίσης τα διανύσματα $\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$, καθώς επίσης και τα $\overrightarrow{\Delta O}$, $\overrightarrow{OB}$.

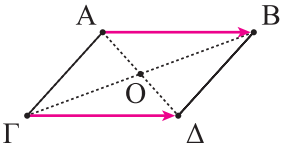
β) Δύο διανύσματα, όπως για παράδειγμα τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ή τα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$ ή τα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ ή τα $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Delta}$ είναι αντίθετα, αφού έχουν ίσα μέτρα και είναι αντίρροπα.

γ) Δύο διανύσματα με ίσα μέτρα είναι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Είναι επίσης:

$$|\overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|, \quad |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{O\Gamma}| \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{O\Delta}|$$

1.2 **Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, που έχουν διαφορετικούς φορείς. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ αν και μόνο αν τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν κοινό μέσο.**

ΛΥΣΗ



- Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα και παράλληλα. Έτσι, το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του διχοτομούνται. Άρα, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν κοινό μέσο.
- Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν κοινό μέσο, τότε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

1.3 **Δίνονται τα σημεία Α, Γ, Ε, Μ, Ν και Ζ, τα οποία είναι τέτοια, ώστε $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{\Gamma N}$. Να αποδειχθεί ότι:**

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{ZN} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{MZ} = \overrightarrow{EN}$$

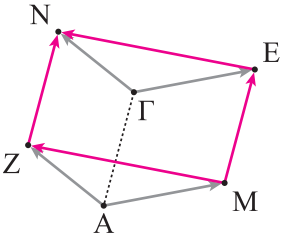
ΛΥΣΗ

Είναι:

$$\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{EM} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{ME} \qquad (1)$$

και

$$\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{\Gamma N} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{ZN} \qquad (2)$$



Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{ZN}$.

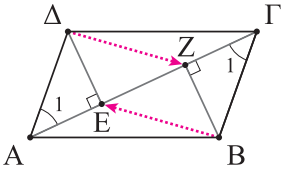
Επειδή $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{ZN}$, παίρνουμε και $\overrightarrow{MZ} = \overrightarrow{EN}$.

1.4 **Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Ε και Ζ είναι οι προβολές των Δ και Β αντίστοιχα στη διαγώνιο ΑΓ, να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta Z}$ και $\overrightarrow{BE}$ είναι αντίθετα.**

ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ίσα (διότι είναι ορθογώνια, $A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$), οπότε ισχύει $\Delta E = BZ$.

Έτσι, $\Delta E \,//\, = BZ$ και συνεπώς το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $\overrightarrow{\Delta Z} = -\overrightarrow{BE}$.



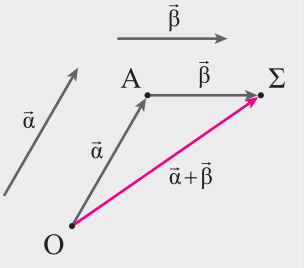
2. Πρόσθεση - αφαίρεση διανυσμάτων

Σχόλια - Μέθοδος

Α. Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουμε δύο τρόπους:

1ος τρόπος

- Επιλέγουμε τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου.
- Με αρχή το Ο παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και με αρχή το Α παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{A\Sigma}=\vec{\beta}$.
- Το διάνυσμα με αρχή το Ο και πέρας το Σ είναι το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Είναι δηλαδή:

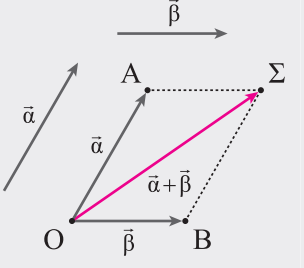


$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Sigma}=\overrightarrow{O\Sigma}$$

Τη μέθοδο αυτή χρησιμοποιούμε επίσης για να προσθέσουμε και περισσότερα των δύο διανυσμάτων και λέγεται **μέθοδος του πολυγώνου**.

2ος τρόπος

- Επιλέγουμε τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου.
- Σχηματίζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.
- Κατασκευάζουμε (συμπληρώνουμε) το παραλληλόγραμμο ΟΑΣΒ.
- Το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Sigma}$, που αντιστοιχεί στη μια διαγώνιο του παραλληλογράμμου ΟΑΣΒ, είναι το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Είναι δηλαδή:



$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{O\Sigma}$$

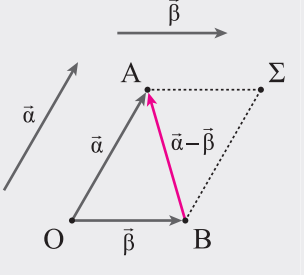
Η μέθοδος αυτή λέγεται **μέθοδος του παραλληλογράμμου**.

Β. Για να βρούμε τη διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, κατασκευάζουμε, όπως και πριν, το παραλληλόγραμμο ΟΑΣΒ, ώστε:

$$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$$

Είναι τότε:

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{BA} \quad \text{και} \quad \vec{\beta}-\vec{\alpha}=\overrightarrow{AB}$$



Γ. Για το άθροισμα διανυσμάτων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$

όπου $\vec{0}$ είναι το **μηδενικό** διάνυσμα και $-\vec{\alpha}$ είναι το **αντίθετο** του $\vec{\alpha}$.

1.5 **Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο.**

α) Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

i) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}$ **ii)** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}$ **iii)** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{\Gamma O}$ **iv)** $\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{B\Gamma}$

β) Να υπολογιστούν οι παρακάτω διαφορές:

i) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}$ **ii)** $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B\Gamma}$ **iii)** $\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}$ **iv)** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}$

ΛΥΣΗ

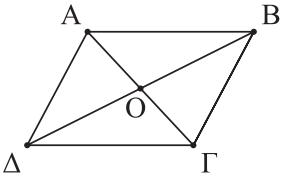
Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε:

α) i) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}$ ii) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}$

iii) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{\Gamma O}=\vec{0}$ iv) $\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{0}$

β) i) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$ ii) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A}$

iii) $\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ iv) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$



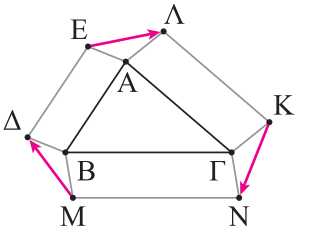
1.6 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου αυτού τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ, ΑΛΚΓ και ΒΓΝΜ. Να αποδειχθεί ότι** $\overrightarrow{E\Lambda}+\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{M\Delta}=\vec{0}$.

ΛΥΣΗ

Είναι:

$$\overrightarrow{E\Lambda}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{A\Lambda}$$
$$\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{K\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma N}$$
$$\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B\Delta}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

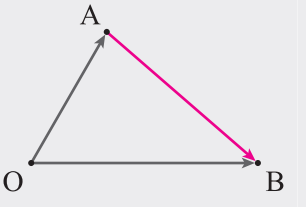


$$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{A\Lambda}+\overrightarrow{K\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma N}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B\Delta}=$$
$$=\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{B\Delta}\right)+\left(\overrightarrow{A\Lambda}+\overrightarrow{K\Gamma}\right)+\left(\overrightarrow{\Gamma N}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

3. Η χρήση της διανυσματικής ακτίνας

Σχόλια - Μέθοδος

Η διανυσματική ακτίνα είναι ένα σπουδαίο εργαλείο για τη λύση πολλών ασκήσεων στο κεφάλαιο των διανυσμάτων. Θυμίζουμε ότι αν $\overrightarrow{AB}$ είναι τυχαίο διάνυσμα και Ο ένα σημείο του χώρου, τότε:



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

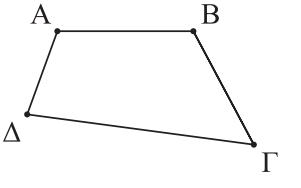
δηλαδή το $\overrightarrow{AB}$ βρίσκεται αν από τη διανυσματική ακτίνα του τέλους αφαιρέσουμε τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

1.7 **Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδειχθεί ότι:**

$$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για πολύ απλό θέμα, αρκεί να θυμηθούμε ότι κάθε διάνυσμα εκφράζεται ως διαφορά της διανυσματικής ακτίνας του τέλους μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.



Έστω Ο τυχαίο σημείο. Τότε, με χρήση διανυσματικών ακτίνων, έχουμε:

- $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ (1)
- $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=\left(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ (2)

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν τη ζητούμενη.

Άλλος τρόπος

Ας δούμε τώρα και μια άλλη απόδειξη. Είναι:

$$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

1.8 **Δίνονται τα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Α, Β, Γ και Δ, τα οποία δεν είναι συνευθειακά. Αν $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}$, όπου Ο τυχαίο σημείο του χώρου, να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.**

ΛΥΣΗ

Θα αποδείξουμε ότι $AB=\Gamma\Delta$ και $AB \,//\, \Gamma\Delta$. Αρκεί να αποδείξουμε λοιπόν ότι:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

Έχουμε:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

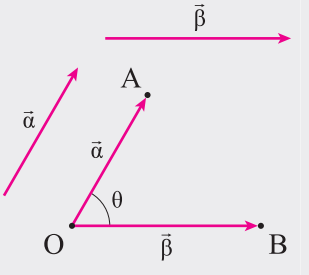
Ας σημειώσουμε ότι για τυχαίο σημείο Ο ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MN}$$

4. Γωνία δύο διανυσμάτων

Σχόλια - Μέθοδος

Η **κυρτή γωνία** $\widehat{AOB}$ (ή $\widehat{BOA}$), που σχηματίζουν οι ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, όπου $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, λέγεται γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Θυμίζουμε ότι:



- $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})$ και $0\le(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\le\pi$,
- $0\le\theta\le\pi$ ή $0^\circ\le\theta\le180^\circ$,
- $\theta=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\theta=\pi \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

Αν $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, τότε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ λέγονται **κάθετα** (ή ορθογώνια).

1.9 **Έστω Ο το έγκεντρο ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ. Να υπολογιστούν οι γωνίες:**

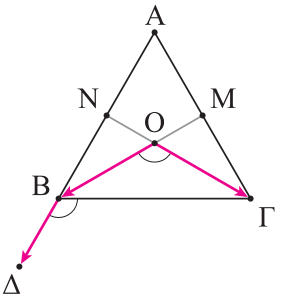
α) $\omega=(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}})$ **β)** $\omega=(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma}})$

γ) $\omega=(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}})$ **δ)** $\omega=(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{O\Gamma}})$

ΛΥΣΗ

α) Αφού το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο, ισχύει ότι:

$$\omega = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 60°$$



β) Είναι $\omega = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}) = 120°$, διότι $\widehat{BO\Gamma} = 120°$.

γ) Αν προεκτείνουμε την ΑΒ, βλέπουμε ότι:

$$\omega = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = (\overrightarrow{B\Delta}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 120°$$

δ) Επειδή $\overrightarrow{BO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OM}$, έχουμε:

$$\omega = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{O\Gamma}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O\Gamma}) = 60°$$

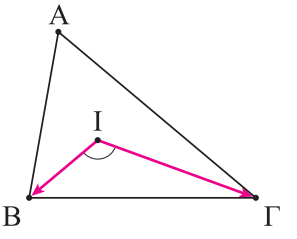
1.10 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}, \hat{\Gamma}$, οι οποίες τέμνονται στο Ι. Αν $\hat{A} = 60°$, να υπολογιστεί η γωνία $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{I\Gamma})$.**

ΛΥΣΗ

Είναι:

$$\widehat{BI\Gamma} = 180° - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} = 90° + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} =$$

$$= 90° + \frac{\hat{A}}{2} = 90° + \frac{60°}{2} = 120°$$



Άρα $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{I\Gamma}) = 120°$.

5. Σημεία που συμπίπτουν

Σχόλια - Μέθοδος

Για τη λύση των ασκήσεων είναι χρήσιμες και οι επόμενες παρατηρήσεις:

- Για να αποδείξουμε ότι δύο σημεία Μ και Ν ταυτίζονται, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$, δηλαδή ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{MN}$ είναι μηδενικό.
- Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα και παράλληλα, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

1.11 **Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του χώρου, για τα οποία ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{BE}$. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α και Β συμπίπτουν.**

ΛΥΣΗ

Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία Α και Β συμπίπτουν, θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. Έχουμε:

$$\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{BE}=\vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EB}=\vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})+(\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{EB})=\vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta B}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

Άρα τα σημεία Α και Β συμπίπτουν.

Άλλος τρόπος

Θα χρησιμοποιήσουμε την πολύ χρήσιμη μέθοδο των διανυσματικών ακτίνων. Έστω λοιπόν Ο τυχαίο σημείο. Τότε:

$$\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{O\Delta})=(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{O\Delta})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

Άρα τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

6. Προσδιορισμός σημείου

Σχόλια - Μέθοδος

Σε ορισμένα θέματα ζητείται ο προσδιορισμός ενός σημείου Μ, ώστε να ισχύει κάποια διανυσματική σχέση. Στις περιπτώσεις αυτές προσπαθούμε να εντοπίσουμε ένα σταθερό σημείο Ο τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ να εκφράζεται με τη βοήθεια κάποιων διανυσμάτων, τα οποία όμως δεν έχουν ως άκρο το ζητούμενο σημείο Μ ή άλλο άγνωστο σημείο. Η χρήση διανυσματικών ακτίνων οδηγεί συχνά σε σύντομες λύσεις. Ας επισημάνουμε ακόμη ότι:

- αν βρούμε $\overrightarrow{AM}=\vec{0}$, τότε το Μ ταυτίζεται με το Α,
- αν βρούμε $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, τότε το Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

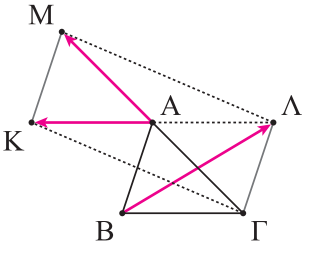
1.12 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.**

α) Να προσδιοριστούν, στο επίπεδο του τριγώνου, σημεία Κ, Λ και Μ τέτοια, ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{B\Lambda} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΚΜΛΓ είναι παραλληλόγραμμο.

ΛΥΣΗ

α) Με τον κανόνα του παραλληλογράμμου προσθέτουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. Έτσι, το Λ είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται με πλευρές τις ΒΑ και ΒΓ. Επομένως είναι:



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\Gamma A}$$

β) Το τετράπλευρο ΚΜΛΓ είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $KM /\!/ = \Gamma\Lambda$ ή ισοδύναμα $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{\Gamma\Lambda}$.

Πράγματι είναι $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A\Lambda} + \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{\Gamma\Lambda}$, δηλαδή $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{\Gamma\Lambda}$.

1.13 **Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ρ του χώρου.**

α) Να αποδειχθεί ότι:

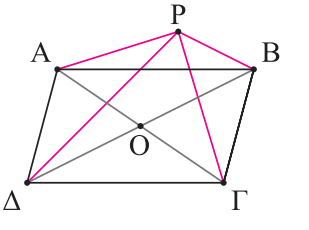
$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta}$$

β) Να προσδιοριστεί η θέση του σημείου Ρ, ώστε να ισχύει:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{P\Delta} = \vec{0}$$

ΛΥΣΗ

α) Έστω Ο το κέντρο του παραλληλογράμμου. Τότε:



- $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{P\Gamma} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{O\Gamma}) =$
  $= 2\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma}) = 2\overrightarrow{PO} + \vec{0} = 2\overrightarrow{PO}$ (1)
- $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{O\Delta}) =$
  $= 2\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta}) = 2\overrightarrow{PO} + \vec{0} = 2\overrightarrow{PO}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta}$$

β) Είναι:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{P\Delta} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{P\Gamma}) + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta}) = \vec{0}$$

Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα, έχουμε ισοδύναμα:

$$2\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PO}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{PO}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PO}=\vec{0}$$

Άρα το Ρ ταυτίζεται με το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου.

7. Μέτρο αθροίσματος - διαφοράς διανυσμάτων

Σχόλια - Μέθοδος

Για το μέτρο $|\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}|$ του αθροίσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ή της διαφοράς $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η ιδιότητα:

$$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι γνωστή και ως **τριγωνική ανισότητα**.

Αξίζει να επισημάνουμε ότι:

- Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά και μάλιστα αντίρροπα.
- Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά και μάλιστα ομόρροπα.

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το αντίστροφο.

Οι παραπάνω προτάσεις αποτελούν κριτήρια παραλληλίας για δύο διανύσματα και βρίσκουν εφαρμογή σε αρκετά θέματα με διανύσματα.

1.14 **Αν $|\vec{\beta}|=1$, να αποδειχθεί ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\ge 2$.**

Μπορεί να ισχύει η ισότητα;

ΛΥΣΗ

Με βάση την τριγωνική ανισότητα:

$$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

προκύπτει ότι:

$$|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \ge |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$$

Επομένως θέτοντας σε αυτή όπου $\vec{\alpha}$ το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και όπου $\vec{\beta}$ το $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ παίρνουμε:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \ge |(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-(\vec{\alpha}-\vec{\beta})| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \ge |2\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \ge 2|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \ge 2$$

Παρατηρούμε ότι αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\beta}| + |-\vec{\beta}| = |\vec{\beta}| + |\vec{\beta}| = 2|\vec{\beta}| = 2 \cdot 1 = 2$$

Επομένως, η ισότητα μπορεί να ισχύει.

Σχόλιο

Εφόσον για $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ισχύει η ισότητα μπορούμε να πούμε ότι η ελάχιστη τιμή της δοσμένης παράστασης $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$, με $|\vec{\beta}| = 1$, είναι ίση με 2.

Ασκήσεις για λύση

1. Η έννοια του διανύσματος

1.15 Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ. Αν Δ και Ε είναι σημεία που ορίζονται από τις ισότητες $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΒΕ}} = \overrightarrow{\text{ΑΓ}}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma\text{Ε}}$,

β) το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

1.16 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΜΔ}} = \overrightarrow{\Gamma\text{Β}}$ και $\overrightarrow{\text{ΜΕ}} = \overrightarrow{\text{ΑΒ}}$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία Β, Δ και Ε είναι συνευθειακά,

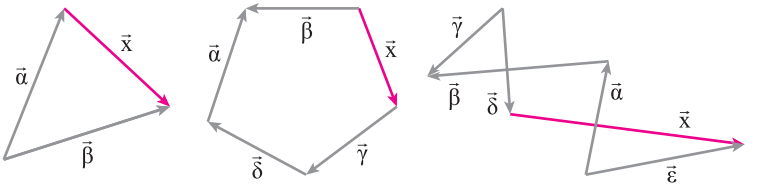
β) το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΕΔ.

1.17 Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε. Αν ισχύουν οι ισότητες $\overrightarrow{\text{ΒΔ}} = \overrightarrow{\Gamma\text{Ε}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = \overrightarrow{\text{ΕΒ}}$, να αποδείξετε ότι το σημείο Ε είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΔΑ.

2. Πρόσθεση - αφαίρεση διανυσμάτων

1.18 Στις επόμενες περιπτώσεις να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων που σημειώνονται στα σχήματα.

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.



1.19 Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ χρησιμοποιώντας ως σημείο αναφοράς:

α) το σημείο Ο, **β)** το σημείο Κ.

1.20 Να βρείτε το διάνυσμα το οποίο εκφράζουν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ **β)** $\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{O\Lambda}$

γ) $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{K\Lambda}$ **δ)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

ε) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}$ **στ)** $\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{\Lambda K}+\overrightarrow{\Lambda B}$

1.21 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}$$

1.22 Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Αν είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ZE}=\vec{\beta}$, να εκφράσετε:

α) το $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$,

β) τα διανύσματα $\overrightarrow{Z\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{EB}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

1.23 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ. Ορίζουμε το σημείο Μ από τη σχέση:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΓ είναι παραλληλόγραμμο.

1.24 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.

α) Να βρείτε το σημείο Δ, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Αν Μ τυχαίο σημείο, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{MA}$.

1.25 Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, τα οποία δεν είναι ανά τρία συνευθειακά.

α) Να βρείτε τα σημεία Ε και Ζ για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}$$

β) Να αποδείξετε ότι τα Ε και Ζ συμπίπτουν.

3. Μέτρο διανύσματος, μέτρο αθροίσματος - διαφοράς

1.26 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Σ του επιπέδου του. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Sigma\Delta} - \overrightarrow{\Sigma A}$,

β) αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε $\left|\overrightarrow{\Sigma A} - \overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{\Sigma B} - \overrightarrow{\Sigma\Delta}\right|$.

1.27 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| \le 2$ και $|\vec{\beta}| \le 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le 3$ **β)** $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \le 4$

γ) $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| \le 7$ **δ)** $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \le 8$

1.28 Να αποδείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$ **β)** $|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

1.29 Αν $\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}|$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| \le 2|\vec{\alpha}|$.

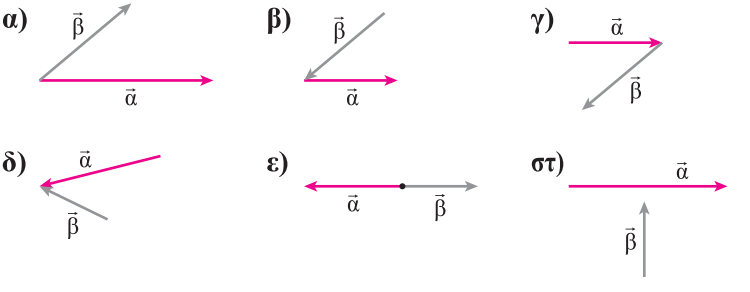
1.30 Να αποδείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \ge 2|\vec{\alpha}|$ **β)** $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \ge 2|\vec{\beta}|$

1.31 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 5$. Να αποδείξετε ότι $3 \le |\vec{\beta}| \le 7$.

4. Γωνία δύο διανυσμάτων

1.32 Να σημειώσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ στα παρακάτω σχήματα:



1.33 Έστω τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$ και $|\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = \sqrt{2}|\vec{\beta}|$. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

1.34 Έστω τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = |\vec{\beta} + \vec{\gamma}|$$

Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων:

α) $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ **β)** $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$

1.35 Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \neq \vec{0}$ και ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

5. Συμπληρωματικές ασκήσεις - Ασκήσεις με απαιτήσεις

1.36 Αν $\big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|^2 + \big||\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|\big|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$.

1.37 Αν $|\vec{\alpha}|\big(|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|\big) + |\vec{\beta}|\big(|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|\big) = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

1.38 Αν η εξίσωση $x^2 - |\vec{\beta}|x + |\vec{\gamma}|^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| < 3|\vec{\gamma}|$$

1.39 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^2 - 4\big(|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|\big)x + |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

1.40 Να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \geq 3|\vec{\beta}| \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \geq |\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|$$

1.41 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν:

$$3|\vec{\alpha}| + 2|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 9, \quad 3|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - 7|\vec{\alpha}| = 2 \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = 2$$

Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$.

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

1.42 Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:

α) i) Τι ονομάζεται διάνυσμα και πώς συμβολίζεται;

ii) Ποιο διάνυσμα ονομάζεται μηδενικό;

β) i) Τι ονομάζεται μέτρο ενός διανύσματος και πώς συμβολίζεται;
ii) Ποιο διάνυσμα ονομάζεται μοναδιαίο;

γ) i) Τι ονομάζεται φορέας ενός διανύσματος;
ii) Ποιος είναι ο φορέας του μηδενικού διανύσματος;

δ) i) Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται παράλληλα ή συγγραμμικά;
ii) Πότε δύο διανύσματα έχουν την ίδια και πότε αντίθετη κατεύθυνση;

ε) i) Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται ίσα;
ii) Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται αντίθετα;

στ) i) Πώς ορίζεται η γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων;
ii) Ποια διανύσματα ονομάζονται ορθογώνια ή κάθετα;

ζ) i) Πώς ορίζεται το άθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$;
ii) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του σημείου στο οποίο γίνεται η πρόσθεση.
iii) Πώς βρίσκουμε το άθροισμα δύο διανυσμάτων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου;

η) Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων:
i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$
ii) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$
iii) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$
iv) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$

θ) Πώς ορίζεται η αφαίρεση του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$;

ι) Να αποδείξετε ότι κάθε διάνυσμα του χώρου είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους του μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του.

ια) Ποια ανισοτική σχέση ισχύει για το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων;

Ερωτήσεις τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1.43 Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λανθασμένοι (Λ).

α) Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

β) Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$, τότε $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

γ) Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.

δ) Αν $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$, τότε $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + (\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}) = 2\pi$.

ε) Ισχύει η ισοδυναμία $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$ M μέσο του AB.

στ) Αν $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, όπου A, B σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι η μεσοκάθετη ευθεία του AB.

ζ) Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$, τότε τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

η) Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta E} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{AE} = \vec{0}$.

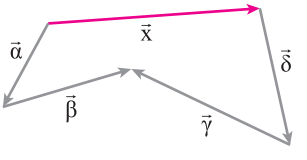
θ) Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι πάντα συγγραμμικά.

ι) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

ια) Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$.

1.44 Από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή.

Για το διάνυσμα $\vec{x}$, του διπλανού σχήματος, ισχύει:



α) $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

β) $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

γ) $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

δ) $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

ε) $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta}$

1.45 Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Με πλευρές οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, ορίζεται τρίγωνο.

β) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, με $A\Gamma = AB$. Τότε:

i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}$ ii) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}|$