Π ρ ό τ α σ η   μ ε λ έ τ η ς

Φίλη μαθήτρια, φίλε μαθητή

Ένα βοηθητικό βιβλίο πρέπει να καλύπτει, εκτός από τα θέματα του σχολικού βιβλίου, και πολλά άλλα, πιο εύκολα ή πιο δύσκολα.

Εδώ σου προτείνουμε τα πιο απαραίτητα θέματα που, κατά την άποψή μας, πρέπει να μελετήσεις κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας σου.

Οι ερωτήσεις που αφορούν το εισαγωγικό μέρος της κάθε ενότητας (βασικές ασκήσεις-βασική θεωρία) καθώς και οι ερωτήσεις «Σωστού-Λάθους» πρέπει να απαντηθούν όλες, ώστε να κατανοήσεις τα «λεπτά» σημεία της θεωρίας. Τελειώνοντας κάθε ενότητα, προσπάθησε να κάνεις το κριτήριο αξιολόγησης, ώστε να ελέγξεις πόσο σωστά έχεις προετοιμαστεί.

1. **Συναρτήσεις (Ι): Πεδίο ορισμού συνάρτησης**
   1.11, 1.12, 1.13, 1.15, **1.16**, **1.17**, **1.22**, 1.23, **1.28**, 1.29, **1.30**, 1.32, **1.33**, 1.35, **1.36**, **1.37**, **1.40**, 1.43, 1.45, 1.46, **1.47**, **1.50**, **1.53**

2. **Συναρτήσεις (ΙΙ): Γραφική παράσταση συνάρτησης**
   2.7, 2.9, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.16, 2.17, 2.19, **2.21**, **2.22**, 2.23, **2.25**, 2.27, **2.28**, **2.31**, **2.33**

3. **Συναρτήσεις (ΙΙΙ): Πράξεις με συναρτήσεις**
   3.2, 3.3, **3.4**, 3.6, 3.7, **3.8**, **3.9**

4. **Συναρτήσεις (ΙV): Προβλήματα**
   4.3, 4.4, **4.6**, **4.7**, **4.8**, 4.9, 4.11, 4.14, **4.15**, **4.16**, **4.17**, **4.18**

5. **Συναρτήσεις (V): Συναρτησιακές σχέσεις**
   5.4, 5.5, 5.7, **5.8**, **5.9**, 5.10, 5.11, **5.13**

6. **Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$**
   6.8, 6.9, 6.10, **6.11**, 6.12, 6.13, 6.14, 6.18, **6.19**, **6.20**, **6.21**, 6.22, 6.23, 6.26, 6.27, 6.30, **6.33**, **6.34**, **6.35**, **6.36**, 6.38, 6.39, **6.41**, **6.42**, 6.46, 6.47, 6.48, **6.50**, **6.52**, **6.56**, **6.59**

7. **Συνέχεια συνάρτησης**
   7.5, **7.6**, **7.8**, 7.10, **7.11**, **7.12**, **7.14**, 7.16, **7.18**, **7.20**, **7.23**

8. **Ορισμός παραγώγου στο x_0**
   8.3, **8.4**, **8.6**, **8.7**, 8.9, **8.10**, **8.12**

9. **Παράγωγος συνάρτηση**

9.10, 9.11, 9.12, 9.13, 9.14, **9.16**, **9.17**, **9.18**, 9.20, **9.22**, **9.25**, 9.26, **9.27**, 9.28, **9.29**, **9.30**, **9.31**, **9.32**, 9.33, **9.34**, **9.35**, **9.38**, **9.40**, **9.42**, 9.43, 9.44, 9.45, 9.48, **9.49**, 9.50, 9.55, **9.56**, **9.60**, **9.62**, 9.64, 9.67, **9.70**, **9.72**

10. **Εφαπτόμενη ευθεία**

10.6, **10.7**, 10.9, **10.10**, 10.11, 10.13, 10.14, **10.17**, **10.18**, 10.20, 10.21, 10.23, 10.24, **10.25**, **10.27**, **10.28**, 10.29, 10.32, 10.33, 10.34, **10.35**, **10.37**, **10.41**, **10.42**, 10.43, **10.44**, 10.46, **10.49**, 10.50, **10.51**, **10.53**, 10.55, **10.56**, 10.58, 10.59, 10.61, 10.62

11. **Ρυθμός μεταβολής**

11.5, 11.6, **11.9**, **11.10**, **11.11**, 11.12, 11.16, 11.18, **11.19**, 11.21, **11.22**, 11.23, **11.26**, **11.27**

12. **Μονοτονία συνάρτησης**

12.7, **12.8**, **12.9**, **12.10**, **12.11**, 12.14, 12.15, **12.16**, **12.18**, **12.19**, 12.20, **12.22**, 12.24, 12.27, 12.29, 12.30, **12.31**, **12.32**, **12.37**, 12.40, 12.42, 12.44, 12.47, **12.52**, **12.53**, **12.54**, **12.58**, 12.59, 12.60

13. **Τοπικά ακρότατα (Ι): Εύρεση τοπικών ακροτάτων**

13.8, **13.9**, **13.10**, **13.11**, **13.12**, **13.13**, **13.14**, 13.15, 13.16, 13.17, 13.18, 13.19, 13.21, **13.24**, **13.25**, 13.28, 13.29, **13.32**, 13.33, 13.36, **13.38**, **13.39**, **13.40**, 13.42, **13.44**, **13.47**, **13.48**

14. **Τοπικά ακρότατα (ΙΙ): Προβλήματα**

14.4, 14.5, 14.6, **14.7**, **14.8**, 14.10, **14.11**, 14.12, 14.14, 14.15, 14.16, **14.17**, **14.18**, 14.19, 14.21, **14.23**, **14.26**, **14.27**

15. **Επαναληπτικά θέματα στα όρια και την παράγωγο**

15.3, **15.4**, **15.5**, **15.6**, 15.7, 15.8, **15.11**, **15.13**, 15.15, **15.16**, **15.17**, 15.18, **15.19**, **15.20**, 15.22, **15.24**, 15.26, 15.29, 15.30, 15.31, **15.33**, **15.34**, 15.35, **15.37**, **15.38**, **15.40**

16. **Βασικές έννοιες Στατιστικής**

16.7, 16.8, **16.10**, **16.11**, 16.13

17. **Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων (Ι): Στατιστικοί πίνακες**

17.9, **17.10**, **17.11**, **17.12**, **17.13**, 17.16, 17.17, **17.18**, 17.19, **17.20**, **17.22**, 17.25, **17.27**

18. Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων (ΙΙ): Γραφική παρουσίαση

18.7, **18.8**, **18.9**, **18.11**, 18.12, **18.14**, **18.15**, 18.18, **18.19**, 18.21, **18.23**, 18.24, **18.26**

19. Ομαδοποίηση στατιστικών δεδομένων (Ι): Διαδικασία ομαδοποίησης

19.2, **19.4**, **19.6**, 19.7

20. Ομαδοποίηση στατιστικών δεδομένων (ΙΙ): Γραφική παρουσίαση

20.5, **20.6**, 20.7, **20.9**, **20.10**, **20.11**, **20.13**, **20.14**, **20.15**, 20.16, 20.17, **20.18**, **20.20**, 20.22, **20.24**, 20.26, 20.28

21. Ο συμβολισμός $\sum$

21.3, 21.4, 21.5, **21.6**, **21.7**, **21.8**

22. Μέτρα θέσης (Ι): Μη ομαδοποιημένα δεδομένα

22.11, **22.12**, 22.14, 22.15, **22.17**, 22.18, 22.19, 22.22, **22.24**, **22.25**, **22.26**, 22.29, **22.31**, **22.32**, 22.36, **22.38**, 22.39, **22.42**, **22.46**, **22.51**, **22.57**, 22.59, **22.61**, 22.66, 22.67

23. Μέτρα θέσης (ΙΙ): Ομαδοποιημένα δεδομένα

23.3, **23.4**, **23.6**, **23.8**, **23.9**, **23.10**, 23.12, 23.13, **23.14**, 23.16, 23.18, **23.20**, **23.21**, 23.22, **23.23**

24. Μέτρα διασποράς (Ι)

24.8, 24.10, **24.11**, **24.12**, **24.13**, **24.14**, 24.15, **24.17**, 24.19, **24.20**, 24.22, 24.23, **24.24**, **24.27**, **24.30**, 24.32, **24.33**, **24.37**, **24.41**, 24.44, **24.45**, 24.49, **24.55**, **24.60**, 24.61, **24.64**, 24.67, 24.69, **24.70**, 24.71

25. Μέτρα διασποράς (ΙΙ): Η μεταβλητή $Y = \alpha X + \beta$

25.3, 25.4, 25.6, **25.7**, 25.8, **25.11**, 25.12, 25.13, **25.14**, **25.15**, 25.16, **25.17**, **25.19**, 25.21, **25.22**

26. Κανονική κατανομή

26.2, **26.3**, **26.5**, **26.7**, **26.8**, 26.9, **26.10**, **26.13**, **26.15**, **26.16**, 26.20, **26.22**, **26.25**

27. Επαναληπτικές ασκήσεις στη Στατιστική

27.3, 27.4, **27.5**, 27.7, **27.11**, **27.13**, 27.15, 27.18, **27.19**, **27.23**, **27.24**, **27.26**, 27.27, **27.29**, 27.30, **27.31**, **27.32**, **27.34**, **27.35**

28. Σύνολα

28.4, 28.6, **28.8**, **28.9**, **28.11**, **28.12**, 28.13, **28.14**, 28.15

29. Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

29.7, **29.8**, **29.10**, 29.11, **29.12**, **29.13**, **29.14**, 29.15, **29.17**, 29.18, **29.20**, **29.22**, 29.23, **29.25**, 29.27, **29.29**

30. Κλασικός και αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

30.5, **30.7**. **30.9**, 30.10, 30.11, **30.12**, 30.14, 30.15, **30.16**, **30.17**, 30.19, **30.20**, **30.21**, **30.22**, 30.24, **30.26**, **30.27**, 30.29, 30.30, **30.32**, 30.34, 30.35, **30.38**, 30.39, **30.40**, 30.42, **30.43**, **30.44**, 30.45, **30.46**

31. Λογισμός πιθανοτήτων (I)

31.7, **31.10**, 31.11, 31.12, 31.15, **31.16**, **31.17**, **31.19**, **31.23**, **31.24**, 31.25, **31.26**, **31.28**, 31.29, **31.30**, **31.31**, 31.32, **31.33**, 31.35, **31.36**, 31.38, **31.40**, **31.41**, 31.43, 31.46

32. Λογισμός πιθανοτήτων (II)

32.3, 32.4, 32.5, 32.7, 32.9, **32.12**, 32.14, **32.15**, **32.16**, 32.17, **32.18**, **32.20**, **32.21**, **32.24**, **32.26**, **32.27**

33. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

33.3, 33.4, **33.5**, **33.6**, 33.8, 33.9, **33.10**, **33.11**, **33.13**, **33.15**, **33.17**, 33.21, 33.24, **33.25**, **33.27**, **33.29**, 33.31, **33.32**, 33.33, **33.34**, **33.37**, **33.38**, **33.42**

34. Επαναληπτικές ασκήσεις στις Πιθανότητες

34.1, **34.2**, **34.3**, **34.5**, **34.6**, **34.7**, 34.8, **34.9**, **34.10**, 34.11, 34.13, 34.14, **34.17**, **34.18**, **34.20**, **34.22**, **34.23**, **34.24**

Περιεχόμενα

1 Συναρτήσεις (I)
Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Βασικές ασκήσεις - Βασική θεωρία

Η έννοια της συνάρτησης

1.1 **α) Θεωρούμε ένα υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών. Τι ονομάζουμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A;**
β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να υπολογιστούν οι τιμές $f(-1)$ και $f(2)$.

Απάντηση

α) Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται η διαδικασία που αντιστοιχίζει κάθε αριθμό x του συνόλου A, σε έναν μόνο αριθμό, ο οποίος συμβολίζεται με $f(x)$. Μια συνάρτηση συμβολίζεται $y = f(x)$, $x \in A$, όπου το x ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή και το y εξαρτημένη μεταβλητή.

β) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 2x$ αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό x στον πραγματικό αριθμό $x^3 - 2x$. Για να βρούμε τις τιμές $f(-1)$ και $f(2)$ αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης το x με το -1 και το 2 αντίστοιχα. Επομένως είναι $f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) = 1$ και $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 = 4$.

> Η συνάρτηση f αντιστοιχίζει τον αριθμό x στον αριθμό $f(x)$.

Εύρεση πεδίου ορισμού

1.2 **α) Τι λέγεται πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης;**
β) Πώς βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης;

Απάντηση

α) Πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f, το οποίο το συμβολίζουμε με A_f, λέγεται το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ο τύπος της f έχει νόημα πραγματικού αριθμού, δηλαδή $f(x) \in \mathbb{R}$.

β) Για την εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f πρέπει να λάβουμε υπόψη μας κατάλληλους περιορισμούς, οι οποίοι φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Αν ο τύπος της f παρουσιάζει	θέτουμε τον περιορισμό
Παρονομαστή $\rightarrow$ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
Ρίζα $\rightarrow$ $\sqrt[\kappa]{P(x)}, \ \kappa \in \mathbb{N}$ με $\kappa > 1$	$P(x) \geq 0$
Λογάριθμο $\rightarrow$ $\ln P(x)$	$P(x) > 0$
Εφαπτομένη $\rightarrow$ $\varepsilon\varphi P(x)$	$P(x) \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
Συνεφαπτομένη $\rightarrow$ $\sigma\varphi P(x)$	$P(x) \neq \kappa\pi, \ \kappa \in \mathbb{Z}$

Πεδίο ορισμού ρητής συνάρτησης

1.3 Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f:

α) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ **β)** $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$

γ) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}$ **δ)** $f(x) = \dfrac{x+5}{x^3+x^2-5x+3}$

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι:

$$x - 2 \neq 0 \iff x \neq 2$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

$$A_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

> Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$, με $\alpha \neq 0$, έχει μια λύση: $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

β) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι:

$$x^2 - 4 \neq 0 \iff x^2 \neq 4 \iff$$
$$\iff x \neq -2 \text{ και } x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

$$A_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

> • Η εξίσωση $x^2 = \alpha$, με $\alpha \geq 0$, έχει λύσεις: $x = \pm\sqrt{\alpha}$
> • Η εξίσωση $x^2 = \alpha$, με $\alpha < 0$, είναι αδύνατη.

γ) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι:

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

Όμως η εξίσωση:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

> Η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

άρα έχει ρίζες τους αριθμούς:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Άρα πρέπει να είναι:

$$x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq 1$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο:

$$A_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

- Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες:
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$
- Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες:
$$x_{1,2} = \frac{-\beta}{2\alpha}$$
- Αν $\Delta < 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 \neq 0$$

Όμως η εξίσωση $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τους διαιρέτες ± 1, ± 3 του σταθερού όρου. Κάνουμε σχήμα Horner:

1	1	−5	3	ρ = 1
	1	2	−3	
1	**2**	**−3**	**0**	

Αν ρ είναι μια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x) = 0$, τότε οι άλλες ρίζες της εξίσωσης αυτής προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης:

$$\Pi(x) = 0$$

όπου $\Pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x - \rho)$$

Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι το 1 είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$. Επίσης προκύπτει ότι:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(x^2 + 2x - 3)$$

άρα οι υπόλοιπες ρίζες (εφόσον υπάρχουν) θα βρεθούν από την επίλυση της εξίσωσης $x^2 + 2x - 3 = 0$. Λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και −3. Άρα πρέπει να είναι $x \neq -3$ και $x \neq 1$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

$$A_f = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$$

1.4 *(Πεδίο ορισμού ρητής συνάρτησης με απόλυτη τιμή)*

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 2}$ **β)** $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{|2x + 1| - |x + 2|}$

Λύση

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό α. Για την απόλυτη τιμή του α ισχύει ότι:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Οι βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι οι εξής:

- Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$.
- $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$.
- Αν $\theta > 0$, τότε $|x| \le \theta \Leftrightarrow -\theta \le x \le \theta$.
- Αν $\theta > 0$, τότε $|x| \ge \theta \Leftrightarrow x \ge \theta$ ή $x \le -\theta$.
- $|x|^2 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Για να ορίζεται ο τύπος της f, πρέπει να είναι $|x| - 2 \neq 0$. Από την επίλυση της εξίσωσης $|x| - 2 = 0$ παίρνουμε $|x| = 2 \Leftrightarrow (x = 2$ ή $x = -2)$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

β) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι $|2x+1| - |x+2| \neq 0$. Όμως είναι:

$$|2x+1| - |x+2| = 0 \Leftrightarrow |2x+1| = |x+2| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(2x + 1 = x + 2 \text{ ή } 2x + 1 = -(x+2)\big) \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Πεδίο ορισμού άρρητης συνάρτησης

1.5 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x+2}$ **β)** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Λύση

Θεωρούμε τον μη αρνητικό αριθμό α. Τότε ως τετραγωνική ρίζα του α ορίζουμε τον μη αρνητικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει $x^2 = \alpha$. Είναι δηλαδή:

$$\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^2 = \alpha$$

Οι βασικές ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας είναι:

- $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$ για κάθε $\alpha \ge 0$
- $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \ge 0$
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ για κάθε $\alpha \ge 0$ και $\beta > 0$

α) Για να ορίζεται η f πρέπει να είναι:

$$x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα:

$$A_f = [-2, +\infty)$$

- Αν $\alpha > 0$, τότε είναι: $\alpha x \geq \beta \iff x \geq \frac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha < 0$, τότε είναι: $\alpha x \geq \beta \iff x \leq \frac{\beta}{\alpha}$

β) Για να ορίζεται η f πρέπει να είναι:

$$9 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 9 \iff |x| \leq \sqrt{9} \iff$$

$$\iff |x| \leq 3 \iff -3 \leq x \leq 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα:

$$A_f = [-3, 3]$$

Αν $\alpha > 0$, τότε είναι:
- $x^2 \leq \alpha \iff |x| \leq \sqrt{\alpha} \iff$
  $\iff -\sqrt{\alpha} \leq x \leq \sqrt{\alpha}$
- $x^2 \geq \alpha \iff |x| \geq \sqrt{\alpha} \iff$
  $\iff x \geq \sqrt{\alpha}$ ή $x \leq -\sqrt{\alpha}$

1.6 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$ **β)** $f(x) = \sqrt{4x - x^3}$

Λύση

Πρόσημα τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

- Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α στα διαστήματα $(-\infty, \rho_1)$ και $(\rho_2, +\infty)$ και ετερόσημο του α στο διάστημα (ρ_1, ρ_2), όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του.
- Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, \rho)$, $(\rho, +\infty)$, όπου ρ η ρίζα του.
- Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

α) Για να ορίζεται η f, πρέπει να είναι $x^2 + x - 6 \geq 0$. Όμως το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 25$ και ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = -3$ και $\rho_2 = 2$.

Από τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου $x^2 + x - 6$ προκύπτει ότι $x^2 + x - 6 \geq 0 \iff x \leq -3$ ή $x \geq 2$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x^2 + x - 6$		+	0	−	0	+	

$$A_f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$$

β) Για να ορίζεται η f πρέπει να είναι $4x - x^3 \geq 0$ ή ισοδύναμα $x(4 - x^2) \geq 0$.

Από τον πίνακα προσήμων του γινομένου $x(4 - x^2)$ προκύπτει ότι $x(4 - x^2) \geq 0 \iff x \leq -2$ ή $0 \leq x \leq 2$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		−		−	0	+		+	
$4 - x^2$		−	0	+		+	0	−	
$x(4-x^2)$		+	0	−	0	+	0	−	

$$A_f = (-\infty, -2] \cup [0, 2]$$

Πεδίο ορισμού τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Βασικές τριγωνομετρικές ιδιότητες

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

Μοίρες	0	30	45	60	90	120	180
Ακτίνια (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
ημ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}$	0
σφ	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	Δεν ορίζεται

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $ημ^2θ + συν^2θ = 1$
- $εφθ = \dfrac{ημθ}{συνθ}$
- $σφθ = \dfrac{συνθ}{ημθ}$
- $ημ2θ = 2ημθσυνθ$
- $συν2θ = \begin{cases} συν^2θ - ημ^2θ \\ 2συν^2θ - 1 \\ 1 - 2ημ^2θ \end{cases}$
- $εφ2θ = \dfrac{2εφθ}{1 - εφ^2θ}$
- $ημ^2θ = \dfrac{1 - συν2θ}{2}$
- $συν^2θ = \dfrac{1 + συν2θ}{2}$
- $εφ^2θ = \dfrac{1 - συν2θ}{1 + συν2θ}$

Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

α) Αντίθετα τόξα έχουν ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

$$συν(-x) = συνx, \quad \text{ενώ} \quad ημ(-x) = -ημx, \quad εφ(-x) = -εφx, \quad σφ(-x) = -σφx$$

β) Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

$$ημ(180° - ω) = ημω, \quad \text{ενώ} \quad συν(180° - ω) = -συνω,$$

$$εφ(180° - ω) = -εφω, \quad σφ(180° - ω) = -σφω$$

γ) Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη. Δηλαδή:

$$ημ(180° + ω) = -ημω, \quad συν(180° + ω) = -συνω,$$
$$εφ(180° + ω) = εφω, \quad σφ(180° + ω) = σφω$$

δ) Στις συμπληρωματικές γωνίες το ημίτονο καθεμιάς ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη καθεμιάς ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης. Δηλαδή:

$$ημ(90° - ω) = συνω, \quad συν(90° - ω) = ημω,$$
$$εφ(90° - ω) = σφω, \quad σφ(90° - ω) = εφω$$

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

- $ημx = ημθ \Leftrightarrow x = 2κπ + θ$ ή $x = 2κπ + π - θ, \; κ \in \mathbb{Z}$
- $συνx = συνθ \Leftrightarrow x = 2κπ \pm θ, \; κ \in \mathbb{Z}$
- $εφx = εφθ \Leftrightarrow x = κπ + θ, \; κ \in \mathbb{Z}$
- $σφx = σφθ \Leftrightarrow x = κπ + θ, \; κ \in \mathbb{Z}$

1.7 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{x}{1 - ημx}$ **β)** $f(x) = εφ\dfrac{x}{2}$

Λύση

α) Για να ορίζεται η f, πρέπει να είναι:

$$1 - ημx \neq 0 \Leftrightarrow ημx \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2κπ + \frac{π}{2}, \quad κ \in \mathbb{Z}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f = \mathbb{R} - \left\{2κπ + \frac{π}{2}, \; κ \in \mathbb{Z}\right\}$.

β) Η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή $f(x) = εφ\dfrac{x}{2} = \dfrac{ημ\frac{x}{2}}{συν\frac{x}{2}}$.

Για να ορίζεται η f, πρέπει να είναι $συν\dfrac{x}{2} \neq 0$. Όμως:

$$συν\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow συν\frac{x}{2} = συν\frac{π}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2κπ \pm \frac{π}{2} \Leftrightarrow x = 4κπ \pm π \Leftrightarrow x = 2κπ + π$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f = \mathbb{R} - \{2κπ + π, κ \in \mathbb{Z}\}$.

Πεδίο ορισμού εκθετικής συνάρτησης

1.8 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{2}{e^{2x} - 1}$ **β)** $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$

Λύση

- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha \neq 1$, λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α.
- Η συνάρτηση $f(x) = e^x$, όπου $e \simeq 2{,}71828$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y, \quad e^x > e^y \Leftrightarrow x > y, \quad e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι:

$$e^{2x} - 1 \neq 0$$

Από την επίλυση της εξίσωσης $e^{2x} - 1 = 0$ παίρνουμε:

$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f = \mathbb{R}^*$.

β) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι:

$$1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow e^x \leq e^0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A_f = (-\infty, 0]$.

Πεδίο ορισμού λογαριθμικής συνάρτησης

1.9 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln(4 - 2x)$ **β)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

γ) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$ **δ)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x - 2}$

Λύση

♦ Θεωρούμε τον θετικό αριθμό x. Λογάριθμο (με βάση e) του x λέμε τον αριθμό θ για τον οποίο ισχύει $e^\theta = x$. Είναι δηλαδή:

$$\ln x = \theta \Leftrightarrow e^\theta = x$$

♦ Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\ln 1 = 0$ και $\ln e = 1$

- $\ln(\alpha\beta) = \ln\alpha + \ln\beta$, με $\alpha, \beta > 0$
- $\ln\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \ln\alpha - \ln\beta$, με $\alpha, \beta > 0$
- $\ln(\alpha^{\kappa}) = \kappa\ln\alpha$, με $\alpha > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$

♦ Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y, \quad \ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y, \quad \ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$$

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι:

$$4 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A_f = (-\infty, 2)$.

β) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι $x > 0$ και $\ln x \neq 0$. Όμως είναι:

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

γ) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι $x > 0$ και $1 - \ln x \geq 0$. Όμως είναι:

$$1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e \Leftrightarrow 0 < x \leq e$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A_f = (0, e]$.

δ) Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει να είναι $x > 0$ και $\ln x - 2 \neq 0$. Όμως είναι:

$$\ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f = (0, +\infty) - \{e^2\}$.

Να θυμάμαι

1. Έστω A και B δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$. **Συνάρτηση f** από το A στο B λέγεται η διαδικασία που αντιστοιχίζει κάθε αριθμό x του συνόλου A σε ένα μόνο αριθμό του συνόλου B, που συμβολίζεται με f(x).

2. **Πεδίο ορισμού** μιας συνάρτησης f λέγεται το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ο τύπος της f έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Συμβολίζουμε με $\mathbf{A_f}$ το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f.

3. Για την εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f θέτουμε κατάλληλους περιορισμούς, σύμφωνα με τον επόμενο πίνακα:

Μορφή συνάρτησης f	Περιορισμός
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt[\kappa]{P(x)},\quad \kappa\in\mathbb{N},\ \kappa>1$	$P(x)\geq 0$
$f(x)=\ln P(x)$	$P(x)>0$
$f(x)=\varepsilon\varphi P(x)$	$P(x)\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$
$f(x)=\sigma\varphi P(x)$	$P(x)\neq \kappa\pi,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$

Προτεινόμενες ασκήσεις

Πεδίο ορισμού ρητών συναρτήσεων

1.10 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2-3x+2$$

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού A της f,

β) τις τιμές του $x\in A$ για τις οποίες έχουμε $f(x)=0$,

γ) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$g(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}$$

1.11 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

β) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}+x^2$

γ) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+3}$

δ) $f(x)=\dfrac{x^2}{3x-2(x+1)}$

ε) $f(x)=(x+2)^{-2}$

στ) $f(x)=(2x+3)x^{-1}$

1.12 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2}$ **β)** $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+1}$

γ) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x}$

ε) $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+x^2}$ **στ)** $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-5}$

1.13 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+2x-3}$

β) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$

γ) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2-3x+2}$

δ) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+2x+3}$

1.14 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$ ***(Εξετάσεις 2002)***

β) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ ***(Εξετάσεις 2005)***

γ) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$ ***(Εξετάσεις 2007)***

1.15 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3}$ **β)** $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3-1}$

γ) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-4x}$

ε) $f(x)=\dfrac{x-2}{8x-2x^3}$ **στ)** $f(x)=\dfrac{x+3}{3x^3+x}$

1.16 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-8}+\dfrac{x-2}{x^2-1}$

β) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3-x^2}+\dfrac{1}{x^4+1}$

γ) $f(x)=\dfrac{x^6+x}{x-x^5}+x$

δ) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3+x^4}+\dfrac{1}{x-2}$

1.17 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+2x-3}$

β) $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

γ) $f(x)=\dfrac{x^3-2x+5}{x^3+3x^2-4}$

δ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^4-2x^3-4x^2+2x+3}$

1.18 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2+2x+\lambda}$$

έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

Πεδίο ορισμού συνάρτησης με απόλυτη τιμή

1.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|-2$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq 0$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=\left(f(2)\right)^2-3f(-6)+\frac{1}{20}f(102)$$

1.20 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=|5x-1|,\quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=|4x-1|$$

1.21 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=|x-1|+2x$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\begin{cases}3x-1, & \text{αν } x\geq 1\\ x+1, & \text{αν } x<1\end{cases}$$

1.22 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x+2}{|x|}$

β) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{|x|-3}$

γ) $f(x)=\dfrac{2x-1}{|x-1|-4}$

δ) $f(x)=\dfrac{|x|}{|x-1|-|2-3x|}$

1.23 Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq 0$.

α) $f(x)=|x|-1$ **β)** $f(x)=3-|x|$

γ) $f(x)=|x-2|-3$ **δ)** $f(x)=4-|x+3|$

1.24 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{|2x-3|-x}{|x^2-1|}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $xf(x)=0$.

Πεδίο ορισμού άρρητων συναρτήσεων

1.25 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{-x}$ **β)** $f(x)=\sqrt{2x+6}$

γ) $f(x)=\sqrt{4-2x}$ **δ)** $f(x)=x+\sqrt{x-2}$

1.26 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq 0$.

1.27 Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{3-\sqrt{x}}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$.

1.28 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

β) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

γ) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

δ) $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$

ε) $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$

στ) $f(x)=\sqrt{x^2+5x-6}$

1.29 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ ***(Εξετάσεις 2003)***

β) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ ***(Εξετάσεις 2004)***

1.30 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ **β)** $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-1}$

γ) $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ε) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}$

στ) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

1.31 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$

β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

γ) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

1.32 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{x^3-x}$

β) $f(x)=\sqrt{9x-x^3}$

γ) $f(x)=\sqrt{x^3-2x^2-x+2}$

δ) $f(x)=\sqrt{-x^3+6x^2-11x+6}$

1.33 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x-5}}$

β) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

γ) $f(x)=\sqrt{1-3\sqrt{x}}$

δ) $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-x}$

1.34 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1-x}{x^2-5x+6}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$g(x)=\sqrt{xf(x)}$$

1.35 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt[4]{4-x}+\sqrt[3]{\sqrt{x+2}-2}$$

1.36 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **β)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$

γ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{10-3x-x^2}}$

δ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x+1}{x+2}}$

Πεδίο ορισμού τριγωνομετρικών συναρτήσεων

1.37 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\eta\mu 2x$ **β)** $f(x)=\dfrac{x}{\eta\mu x}$

γ) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x-1}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{x^2}{2\eta\mu x+1}$

1.38 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές:

$$f(0),\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)\quad \text{και}\quad f(\pi)$$

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(0,\pi)$ για τις οποίες είναι $f(x)=0$.

1.39 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=|\eta\mu x|,\quad \mu\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

1.40 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x\sigma\upsilon\nu 2x$

β) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

γ) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

δ) $f(x)=\dfrac{2\eta\mu x}{2x\sigma\upsilon\nu x-x}$

1.41 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x,\quad \mu\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x)=0$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x+\eta\mu x}{f(x)}$.

1.42 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu x,\quad \mu\varepsilon\ x\in[0,\pi]$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$.

1.43 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = εφ2x$ **β)** $f(x) = \frac{εφx}{x^2}$

γ) $f(x) = \frac{x + ημx}{εφx}$ **δ)** $f(x) = \frac{x}{|1 - εφx|}$

1.44 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = εφ\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = \sqrt{3}$$

Πεδίο ορισμού εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

1.45 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln(2x)$ **β)** $f(x) = \ln(1 - x)$

γ) $f(x) = \ln(2x - 3)$ **δ)** $f(x) = \ln(x + e)$

1.46 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^{-x}$ **β)** $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$

γ) $f(x) = \frac{x}{e - e^x}$ **δ)** $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 2}$

1.47 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln(3 - x^2)$

β) $f(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

γ) $f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$

δ) $f(x) = \ln(1 - e^x)$

1.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}$.

α) Να βρείτε:

i) την τιμή $f(1)$,

ii) το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$.

1.49 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2)$$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

1.50 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$

β) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 1} - 1}$

1.51 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - 1, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$g(x) = \ln\big(f(x) - 1\big)$$

β) Να λύσετε την ανίσωση $g(x) > 0$.

1.52 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$g(x)=\sqrt{f(x)+\ln^2 x}$$

1.53 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x-2}$

β) $f(x)=\dfrac{x}{1-\ln(x-1)}$

γ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-e}{e^x-1}}$

δ) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x+\ln x}$

Ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»

1.54 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ ορίζεται η τιμή $f(1)$. ☐ Σ ☐ Λ

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^2+x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. ☐ Σ ☐ Λ

γ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x-1}$ είναι το $(-\infty,\,1)$. ☐ Σ ☐ Λ

δ) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$ δεν έχει πεδίο ορισμού. ☐ Σ ☐ Λ

ε) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln(x^2)$ είναι το $\mathbb{R}$. ☐ Σ ☐ Λ

στ) Δεν υπάρχει συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln x+\sqrt{-1-x}$. ☐ Σ ☐ Λ

ζ) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$. ☐ Σ ☐ Λ

η) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & \text{αν } x\geq 1\\ 1-x^2, & \text{αν } x<1\end{cases}$ είναι το $\mathbb{R}$. ☐ Σ ☐ Λ

θ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln(x^3-1)$ είναι το $[1,\,+\infty)$. ☐ Σ ☐ Λ

ι) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-e^{-x}}$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,\,+\infty)$. ☐ Σ ☐ Λ

2 Συναρτήσεις (ΙΙ)

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Βασικές ασκήσεις - Βασική θεωρία

Βασικές γραφικές παραστάσεις

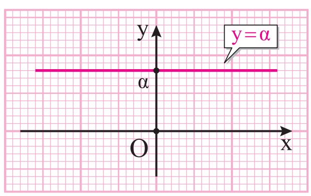
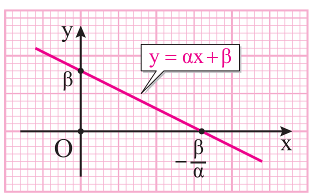
2.1 α) Τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

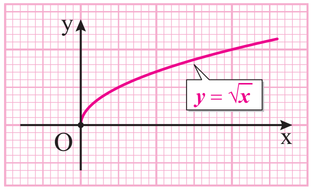
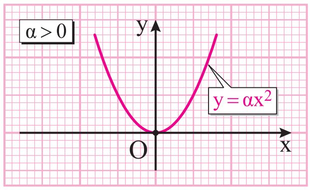
β) Ποιες είναι οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων;

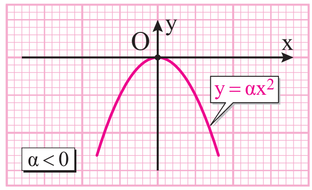
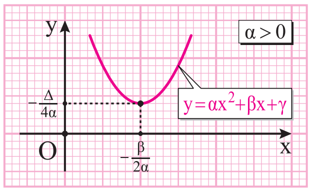
Απάντηση

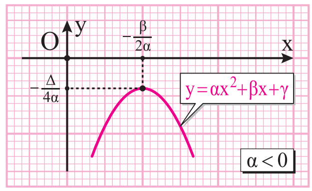
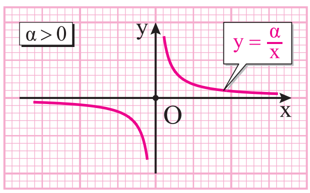
α) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο Α του $\mathbb{R}$ και ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy. **Γραφική παράσταση** της f λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για κάθε $x \in A$.

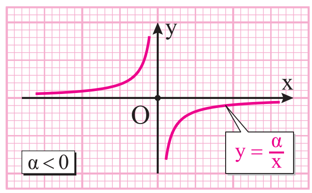
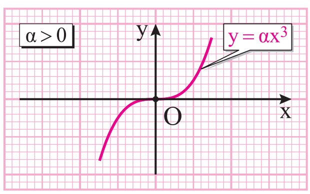
β) Οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

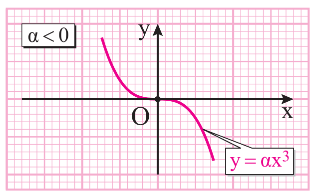
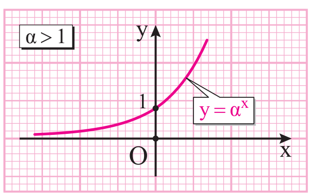
Τύπος συνάρτησης	Γραφική παράσταση
Ευθεία $f(x) = \alpha$	
$f(x) = \alpha x + \beta, \quad \alpha \neq 0$	

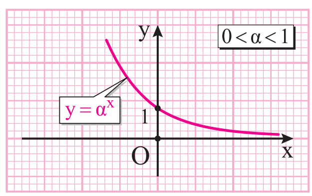
<table>
<tr><th>Τύπος συνάρτησης</th><th>Γραφική παράσταση</th></tr>
<tr><td>Παραβολή
$f(x)=\sqrt{x}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$f(x)=\alpha x^2,\quad \alpha\neq 0$</td><td>

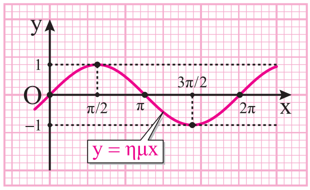

</td></tr>
<tr><td>$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\quad \alpha\neq 0$</td><td>

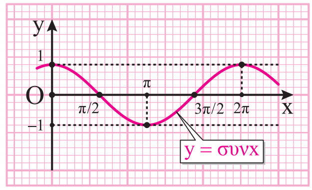
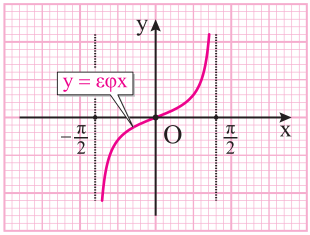

</td></tr>
<tr><td>Υπερβολή
$f(x)=\dfrac{\alpha}{x},\quad \alpha\neq 0$</td><td>

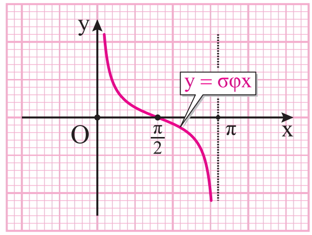
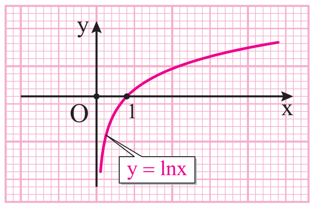

</td></tr>
<tr><td>Κυβική παραβολή
$f(x)=\alpha x^3,\quad \alpha\neq 0$</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Εκθετική
$f(x)=\alpha^x,\quad 0<\alpha\neq 1$</td><td>


</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Τύπος συνάρτησης</th><th>Γραφική παράσταση</th></tr>
<tr><td>Τριγωνομετρικές
$f(x)=\eta\mu x,\quad f(x)=\sigma\upsilon\nu x$</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$f(x)=\varepsilon\varphi x,\quad f(x)=\sigma\varphi x$</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Λογαριθμική με βάση e
$f(x)=\ln x$</td><td>
</td></tr>
</table>

2.2 Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2x+4$ **β)** $f(x)=x^2+2x-3$ **γ)** $f(x)=\dfrac{2}{x}$

Λύση

- Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$ έχει ως γραφική παράσταση την ευθεία με εξίσωση:

$$y=\alpha x+\beta$$

Για να τη σχεδιάσουμε αρκεί να βρούμε δύο σημεία της, τα οποία βρίσκουμε με πίνακα τιμών.

- Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$, έχει ως γραφική παράσταση την παραβολή με εξίσωση $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Η παραβολή αυτή έχει κορυφή το σημείο:

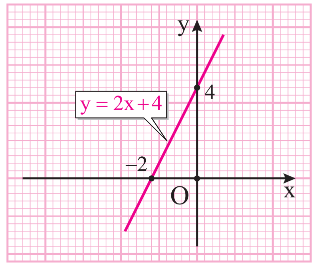
$$M\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

και στρέφεται προς τα πάνω, αν $\alpha>0$ ή προς τα κάτω, αν $\alpha<0$.

• Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$, έχει ως γραφική παράσταση την υπερβολή $y=\frac{\alpha}{x}$.
Οι κλάδοι της υπερβολής αυτής βρίσκονται στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο, αν $\alpha > 0$ ή στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο, αν $\alpha < 0$.

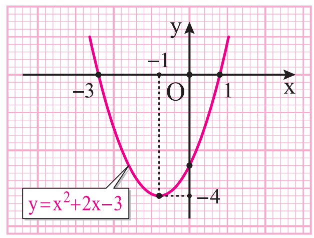
α) Φτιάχνουμε πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 2x + 4$.

x	0	–2
y	4	0

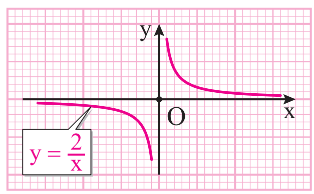


Προκύπτει ότι τα σημεία $(0, 4)$ και $(-2, 0)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $f(x) = 2x + 4$. Ενώνουμε τα σημεία και δημιουργούμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

β) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 3$ έχει ως γραφική παράσταση την παραβολή που έχει κορυφή το σημείο $M(-1, -4)$ και στρέφεται προς τα πάνω. Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ ή $x^2 + 2x - 3 = 0$. Βρίσκουμε $x = -3$ και $x = 1$.



γ) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{2}{x}$ έχει ως γραφική παράσταση την υπερβολή $y=\frac{2}{x}$ της οποίας οι κλάδοι βρίσκονται στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.



Οριζόντια μετατόπιση γραφικής παράστασης

2.3 Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $\mathbf{f(x) = x^2 + 4x + 4}$**, με** $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$ **β)** $\mathbf{f(x) = \sqrt{x-2}}$**, με** $\mathbf{x \geq 2}$

Λύση

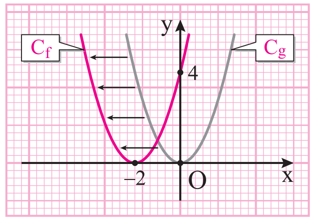
α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = g(x+2)$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f θα προκύψει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.

Αν $f(x) = g(x+c)$, τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $|c|$ μονάδες προς τα αριστερά, αν $c>0$.

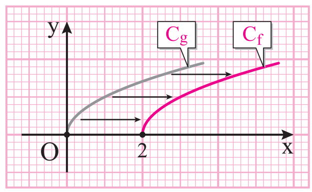
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



β) Θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$ παρατηρούμε ότι $f(x) = g(x-2)$. Άρα η γραφική παράσταση της f, η οποία έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[2, +\infty)$, προκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

Αν $f(x) = g(x+c)$, τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $|c|$ μονάδες προς τα δεξιά, αν $c<0$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Κατακόρυφη μετατόπιση γραφικής παράστασης

2.4 Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

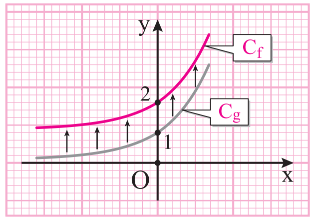
α) $\mathbf{f(x) = 1 + e^x}$**, με** $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$ **β)** $\mathbf{f(x) = \ln x - 1}$**, με** $\mathbf{x > 0}$

Λύση

α) Θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x) = e^x$ παρατηρούμε ότι $f(x) = 1 + g(x)$. Επομένως η γραφική παράσταση της f θα προκύψει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

Αν $f(x) = g(x)+c$, τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $|c|$ μονάδες προς τα πάνω, αν $c>0$.

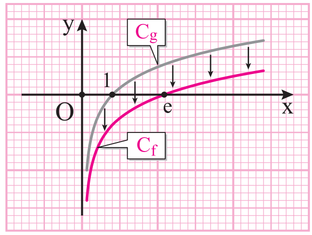
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



β) Θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$, με $x > 0$, παρατηρούμε ότι $f(x) = g(x) - 1$. Επομένως η γραφική παράσταση της f θα προκύψει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

Αν $f(x) = g(x)+c$, τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $|c|$ μονάδες προς τα κάτω, αν $c<0$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Σημεία τομής μιας γραφικής παράστασης με τους άξονες

2.5 α) Πώς βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y;

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 4$, με $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν:

i) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x,

ii) το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y.

Απάντηση

α) • Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα x΄x, εφόσον υπάρχουν, προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

• Αν το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο το οποίο έχει τεταγμένη $f(0)$, δηλαδή στο σημείο $(0, f(0))$.

β) i) Επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ ή ισοδύναμα:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

έχει λύσεις τους αριθμούς $x_1 = 1$ και $x_2 = -4$, προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(1, 0)$ και $B(-4, 0)$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $f(x)=0$.