

Περιεχόμενα

Α΄ Μέρος: Άλγεβρα

Ενότητα 1:	Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους.....	11
Ενότητα 2:	Δυνάμεις πραγματικών αριθμών	25
Ενότητα 3:	Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού	35
Ενότητα 4:	Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα	49
Ενότητα 5:	Πράξεις με μονώνυμα.....	61
Ενότητα 6:	Πρόσθεση - Αφαίρεση πολωνύμων	71
Ενότητα 7:	Πολλαπλασιασμός πολωνύμων	81
Ενότητα 8:	Αξιοσημείωτες ταυτότητες	91
Ενότητα 9:	Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων.....	117
Ενότητα 10:	Διαίρεση πολωνύμων	141
Ενότητα 11:	Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. αλγεβρικών παραστάσεων	149
Ενότητα 12:	Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις	153
Ενότητα 13:	Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων	163
Ενότητα 14:	Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων	171
Ενότητα 15:	Η εξίσωση $ax + b = 0$	187
Ενότητα 16:	Εξισώσεις δευτέρου βαθμού	195
Ενότητα 17:	Επίλυση εξισώσεων β΄ βαθμού με τον τύπο.....	205
Ενότητα 18:	Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού	219
Ενότητα 19:	Κλασματικές εξισώσεις	225
Ενότητα 20:	Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο	239
Ενότητα 21:	Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης.....	253
Ενότητα 22:	Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος.....	263
Ενότητα 23:	Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος	273

Α΄ Μέρος: Άλγεβρα

Ενότητα 24: Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$	291
Ενότητα 25: Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$	299
Ενότητα 26: Σύνολα.....	317
Ενότητα 27: Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα	323
Ενότητα 28: Η έννοια της πιθανότητας	329

Β΄ Μέρος: Γεωμετρία

Ενότητα 29: Ισότητα τριγώνων.....	339
Ενότητα 30: Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων.....	359
Ενότητα 31: Θεώρημα του Θαλή	373
Ενότητα 32: Ομοιοθεσία.....	383
Ενότητα 33: Όμοια πολύγωνα	395
Ενότητα 34: Όμοια τρίγωνα	403
Ενότητα 35: Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων.....	415
Ενότητα 36: Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$	425
Ενότητα 37: Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών.....	435
Ενότητα 38: Σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας.....	441
Ενότητα 39: Νόμος των ημιτόνων, Νόμος των συνημιτόνων.....	451

Γ΄ Μέρος: Απαντήσεις

Απαντήσεις-Λύσεις των Προτεινόμενων Ασκήσεων	469
Απαντήσεις-Λύσεις των Ασκήσεων του Σχολικού Βιβλίου	573

Α' Μέρος

Άλγεβρα

Ενότητα 1

✓ Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

Βασική θεωρία - Παραδείγματα

- ΘΕΜΑ 1^ο**
- α) Ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί και ποιοι άρρητοι;
 - β) Από ποιους αριθμούς αποτελούνται οι πραγματικοί αριθμοί;
 - γ) Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί και $\nu \neq 0$. Επομένως, οι αριθμοί $\frac{5}{7}, -\frac{2}{3}$ είναι ρητοί.

Επειδή $3 = \frac{3}{1}, -7 = \frac{-7}{1}$, συμπεραίνουμε ότι και οι φυσικοί και οι ακέραιοι είναι επίσης ρητοί αριθμοί.

Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός. Με άλλα λόγια, άρρητοι είναι οι αριθμοί που όταν τους γράψουμε σε δεκαδική μορφή αποτελούνται από άπειρα δεκαδικά ψηφία και δεν είναι περιοδικοί.

Για παράδειγμα, ο αριθμός 2,7118235972... είναι άρρητος, ενώ ο αριθμός 2,6757575... είναι ρητός, διότι είναι περιοδικός (με περίοδο το 75).

β) Οι **πραγματικοί** αριθμοί αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους **άρρητους** αριθμούς. Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν ένα σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$.

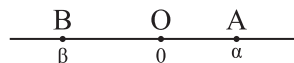
Για παράδειγμα οι αριθμοί:

$$7, -3, +4, \frac{2}{3}, -\frac{5}{9}, \sqrt{2}, 3+\sqrt{5}$$

είναι όλοι πραγματικοί. Από αυτούς, οι $7, -3, 4, \frac{2}{3}, -\frac{5}{9}$ είναι ρητοί, ενώ οι $\sqrt{2}, 3+\sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

γ) Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α (τη συμβολίζουμε με $|\alpha|$) ονομάζουμε την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό α , από την αρχή Ο του άξονα. Σύμφωνα λοιπόν με το σχήμα είναι:

$$|\alpha| = OA \quad \text{και} \quad |\beta| = OB$$



Επειδή ο α είναι θετικός και ο β είναι αρνητικός, θα ισχύει $|\alpha| = \alpha$ και $|\beta| = -\beta$. Επομένως:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

- ΘΕΜΑ 2°**
- α) Να γραφούν οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.
 - β) Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι;
 - γ) Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος – αντίστροφος	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \quad \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$	

β) Δύο αριθμοί λέγονται **αντίθετοι**, όταν έχουν άθροισμα μηδέν:

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

Για παράδειγμα, οι αριθμοί $5, -5$ όπως επίσης και οι αριθμοί $-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ είναι αντίθετοι, διότι:

$$5 + (-5) = 0, \quad -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

γ) Δύο αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι**, όταν έχουν γινόμενο τη μονάδα:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \quad \alpha \neq 0$$

Για παράδειγμα, οι αριθμοί $5, \frac{1}{5}$ όπως επίσης και οι αριθμοί $-\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$ είναι αντίστροφοι, διότι:

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1, \quad \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = 1$$

Σχόλιο

Ο μόνος αριθμός που δεν έχει αντίστροφο είναι το μηδέν. Επομένως:

Κάθε αριθμός διαφορετικός από το μηδέν έχει αντίστροφο.

ΘΕΜΑ 3°

α) Πώς προσθέτουμε δύο πραγματικούς αριθμούς;

β) Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο πραγματικούς αριθμούς;

γ) Πώς ορίζεται η αφαίρεση $\alpha - \beta$ και το πηλίκο (διαίρεση) $\frac{\alpha}{\beta}$ (ή $\alpha : \beta$)

δύο πραγματικών αριθμών α, β (με $\beta \neq 0$);

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για την πρόσθεση αριθμών στηρίζομαστε στους εξής κανόνες:

- ♦ Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε ως πρόσημο, το κοινό τους πρόσημο.
- ♦ Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά τους βάζουμε ως πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Επομένως θα είναι:

$$+8 + 7 = +15, \quad -6 - 7 = -13, \quad 8 - 5 = +3, \quad -10 + 6 = -4$$

β) Ο πολλαπλασιασμός δύο αριθμών στηρίζεται στους εξής κανόνες:

- ♦ Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο τους βάζουμε πρόσημο συν (+).
- ♦ Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε πρόσημο πλην (-).

$$\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= (+) \\ (-) \cdot (-) &= (+) \\ (+) \cdot (-) &= (-) \\ (-) \cdot (+) &= (-) \end{aligned}$$

γ) Η αφαίρεση $\alpha - \beta$ δύο αριθμών ορίζεται ως εξής:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Επομένως:

Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

Το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο αριθμών, με $\beta \neq 0$, ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad \text{ή} \quad \alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

Επομένως:

Για να βρούμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο αριθμών α, β , με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Σχόλια

i) Για τη διαίρεση $\alpha : \beta$ ή για το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ ισχύει ο ίδιος κανόνας προσήμων που περιγράψαμε και στον πολλαπλασιασμό.

$$\begin{aligned} (+): (+) &= (+) \\ (-): (-) &= (+) \\ (+): (-) &= (-) \\ (-): (+) &= (-) \end{aligned}$$

ii) Τονίζουμε ότι η διαίρεση με το μηδέν δεν επιτρέπεται!

Λυμένες ασκήσεις

1. Υπολογισμός παραστάσεων

Σχόλια - Μέθοδος

Για τον υπολογισμό ή την απλοποίηση αριθμητικών παραστάσεων έχουμε στο νου μας τα εξής:

A. Η προτεραιότητα των πράξεων είναι η εξής:

- ♦ Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (εκτός και αν επιθυμούμε να κά-
νουμε απαλοιφή παρενθέσεων).
- ♦ Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- ♦ Τέλος, εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

B. Η απαλοιφή παρενθέσεων γίνεται ως εξής:

- ♦ Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει (+), τότε παραλείπουμε τις παρενθέσεις,
χωρίς να αλλάζουμε το πρόσημο των όρων που περιέχονται στις παρενθέσεις.
- ♦ Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει (-), τότε παραλείπουμε τις παρενθέ-
σεις, αλλάζουμε όμως το πρόσημο όλων των όρων που περιέχονται στις παρεν-
θέσεις.

Για παράδειγμα είναι:

- $\alpha + \gamma + (\beta - \gamma - \alpha) = \alpha + \gamma + \beta - \gamma - \alpha = \beta$
- $\alpha - \beta - (\alpha - \beta - \gamma) = \alpha - \beta - \alpha + \beta + \gamma = \gamma$

1.1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right)$$

$$\beta) -\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6}\right)$$

$$\gamma) -7 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 7\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

$$\delta) \left(1 - \frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right)$$

ΛΥΣΗ

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις που ακολουθούν θα απλοποιήσουμε αφού πρώτα βγάλουμε τις παρενθέσεις με εφαρμογή του γνωστού κανόνα.

$$\alpha) \quad \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{\frac{4}{2}}{3} + \frac{\frac{3}{4}}{4} - \frac{\frac{6}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{12}}{12} =$$

$$= \frac{8+3-6-1}{12} = \frac{11-7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3}$$

$$\beta) \quad -\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6}\right) = +\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6} =$$

[αλλάζουμε τη σειρά των όρων]

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{6} - \frac{11}{6} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{3} + \frac{-6}{6} - \frac{4}{2} = 2 - 1 - 2 = -1$$

$$\gamma) \quad -7 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 7\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{2} - \frac{2}{3} - 7\left(\frac{\frac{3}{2}}{2} - \frac{\frac{2}{3}}{3}\right) = -\frac{7}{2} - \frac{2}{3} - 7 \cdot \frac{3-4}{6} =$$

$$= -\frac{7}{2} - \frac{2}{3} - 7 \cdot \frac{-1}{6} = -\frac{7}{2} - \frac{2}{3} + \frac{7}{6} = \frac{-21-4+7}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$\delta) \quad \left(\frac{1}{1} - \frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2-7}{2} \cdot \frac{5-8}{10} - \frac{3}{5} : \frac{-6+10}{15} =$$

$$= \frac{-5}{2} \cdot \frac{-3}{10} - \frac{3}{5} : \frac{4}{15} = \frac{15}{20} - \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{3}{4} - \frac{45}{20} = \frac{3}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

2. Σύνθετα κλάσματα

Σχόλια - Μέθοδος

Για να μετατρέψουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό, στηριζόμαστε στις παρακάτω ιδιότητες:

$$\blacklozenge \quad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

$$\blacklozenge \quad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$$

$$\blacklozenge \quad \frac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}} = \alpha : \frac{\beta}{\gamma} = \alpha \cdot \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

Άλλος τρόπος

Μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας τον τύπο:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\text{γινόμενο άκρων}}{\text{γινόμενο μέσων}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Επομένως:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{1}} = \frac{\alpha \cdot 1}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}, \quad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\beta}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta \cdot 1} = \frac{\alpha\delta}{\beta}$$

1.2 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1}{3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}}$$

$$\beta) \frac{-2 \cdot 3 - \frac{1}{4}}{-2\left(3 - \frac{1}{4}\right)}$$

$$\gamma) -7 + \frac{-3 - \frac{1}{3}}{-2 + \frac{1}{3}}$$

ΛΥΣΗ

Αν και μπορούμε να κάνουμε τις πράξεις όλες μαζί, για λόγους ευκολίας θα εκτελέσουμε χωριστά τις πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή.

α) Ο αριθμητής γράφεται:

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1 = -\frac{\overset{3}{1}}{2} + \frac{\overset{2}{2}}{3} - \frac{\overset{6}{1}}{1} = \frac{-3 + 4 - 6}{6} = -\frac{5}{6}$$

Ο παρονομαστής γράφεται:

$$3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{\overset{6}{3}}{1} - \frac{\overset{1}{1}}{6} + \frac{\overset{3}{1}}{2} = \frac{18 - 1 + 3}{6} = \frac{20}{6}$$

Επομένως:

$$\frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1}{3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{20}{6}} = \frac{-5 \cdot 6}{6 \cdot 20} = \frac{-5}{20} = -\frac{1}{4}$$

β) Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. Ο αριθμητής γράφεται:

$$-2 \cdot 3 - \frac{1}{4} = -\frac{\overset{4}{24}}{1} - \frac{\overset{1}{1}}{4} = \frac{-24 - 1}{4} = -\frac{25}{4}$$

Ο παρονομαστής γράφεται:

$$-2\left(3 - \frac{1}{4}\right) = -2\left(\overset{4}{\underset{1}{3}} - \overset{1}{\underset{4}{1}}\right) = -2 \cdot \frac{12-1}{4} = -2 \cdot \frac{11}{4} = -\frac{22}{4}$$

Επομένως το κλάσμα γίνεται:

$$\frac{-2 \cdot 3 - \frac{1}{4}}{-2\left(3 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{25}{4}}{-\frac{22}{4}} = \frac{25 \cdot 4}{4 \cdot 22} = \frac{25}{22}$$

Είναι φανερό ότι οι πράξεις μπορούν να γίνουν συγχρόνως σε όλη την παράσταση.

γ) Ας δούμε εδώ τις πράξεις να γίνονται συγχρόνως σε όλη την παράσταση.

Είναι:

$$\begin{aligned} -7 + \frac{-3 - \frac{1}{3}}{-2 + \frac{1}{3}} &= -7 + \frac{\overset{3}{\underset{1}{-3}} - \overset{1}{\underset{3}{1}}}{\overset{3}{\underset{1}{-2}} + \overset{1}{\underset{3}{1}}} = -7 + \frac{\frac{-9-1}{3}}{\frac{-6+1}{3}} = -7 + \frac{\frac{-10}{3}}{\frac{-5}{3}} = -7 + \frac{(-10) \cdot 3}{3 \cdot (-5)} = \\ &= -7 + \frac{-30}{-15} = -7 + 2 = -5 \end{aligned}$$

3. Επιμεριστική ιδιότητα

Σχόλια - Μέθοδος

Υπενθυμίζουμε τη σπουδαία ιδιότητα των αριθμών, γνωστή σε όλους μας ως **επιμεριστική ιδιότητα**:

$$a(b + \gamma) = ab + a\gamma, \quad a(b - \gamma) = ab - a\gamma$$

Επομένως θα είναι:

- ♦ $a(b - \gamma) + \beta(\gamma - \alpha) + \gamma(\alpha - \beta) = ab - a\gamma + \beta\gamma - \beta\alpha + \gamma\alpha - \gamma\beta = 0$
- ♦ $a(b - \gamma) - \beta(\alpha - \gamma) - \gamma(\beta - \alpha) = ab - a\gamma - \beta\alpha + \beta\gamma - \gamma\beta + \gamma\alpha = 0$
- ♦ $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

1.3 Αν $x + y = -5$ και $\omega + \phi = -7$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $A = 4 - (x - \omega) - (y - \phi)$

β) $B = -(-5 - x + \phi) + (-8 + y) - (\omega - 4)$

ΛΥΣΗ

α) Θα απαλείψουμε τις παρενθέσεις. Είναι:

$$A = 4 - (x - \omega) - (y - \varphi) = 4 - x + \omega - y + \varphi = 4 - x - y + \omega + \varphi$$

Επειδή $-x - y = -(x + y)$ και $\omega + \varphi = -7$, παίρνουμε:

$$A = 4 - (x + y) + (\omega + \varphi) = 4 - (-5) + (-7) = 4 + 5 - 7 = 2$$

β) Θα εργαστούμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Έχουμε:

$$\begin{aligned} B &= -(-5 - x + \varphi) + (-8 + y) - (\omega - 4) = \\ &= 5 + x - \varphi - 8 + y - \omega + 4 = (x + y) - \varphi - \omega + 1 = \\ &= (x + y) - (\varphi + \omega) + 1 = -5 - (-7) + 1 = -5 + 7 + 1 = 3 \end{aligned}$$

1.4 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $A = 2(\alpha - 3) - 3(\alpha - 2) - (-\alpha + 3)$

β) $B = -2(\alpha - 2\beta + 3) + 3(2\alpha - \beta - 1) - 2\left(2\alpha + \frac{1}{2}\beta - 4\right)$

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι οι παραστάσεις που βρίσκονται μέσα στις παρενθέσεις δεν απλοποιούνται. Από την άλλη μεριά, δεν μπορούμε να απαλείψουμε τις παρενθέσεις, διότι έχουμε πολλαπλασιασμούς. Για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$$

Επειδή $2(\alpha - 3) = 2\alpha - 6$ και $-3(\alpha - 2) = -3\alpha + 6$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} A &= 2(\alpha - 3) - 3(\alpha - 2) - (-\alpha + 3) = 2\alpha - 6 - 3\alpha + 6 + \alpha - 3 = \\ &= 2\alpha - 3\alpha + \alpha - 6 + 6 - 3 = -3 \end{aligned}$$

β) Χρησιμοποιούμε και εδώ αναγκαστικά την επιμεριστική ιδιότητα, αφού απαλοιφή παρενθέσεων δεν μπορεί να γίνει. Είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned} B &= -2(\alpha - 2\beta + 3) + 3(2\alpha - \beta - 1) - 2\left(2\alpha + \frac{1}{2}\beta - 4\right) = \\ &= -2\alpha + 4\beta - 6 + 6\alpha - 3\beta - 3 - 4\alpha - \beta + 8 = \\ &= -2\alpha + 6\alpha - 4\alpha + 4\beta - 3\beta - \beta - 6 - 3 + 8 = 0 + 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

διότι:

$$-2\alpha + 6\alpha - 4\alpha = 0 \quad \text{και} \quad 4\beta - 3\beta - \beta = 0$$

Προτεινόμενες ασκήσεις

Βασικές ασκήσεις

1.5 Να βρείτε τα εξαγόμενα στις παρακάτω πράξεις:

α) $(-3) + (-8)$

β) $(-5) + (+13)$

γ) $-\frac{1}{5} + \frac{6}{5}$

δ) $\left(+\frac{2}{7}\right) - \left(-\frac{5}{7}\right)$

ε) $(-3) \left(-\frac{5}{3}\right)$

στ) $\left(-\frac{7}{3}\right) \left(+\frac{6}{7}\right)$

ζ) $(-8) : (-4)$

η) $\left(-\frac{10}{3}\right) : \left(+\frac{5}{6}\right)$

1.6 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = (-8) : (-2) + (-5)(+2) + \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{10}{3}\right)$

β) $B = \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) : \left(+\frac{3}{8}\right) - (-2) \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right)$

1.7 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = -(-\alpha + \beta - 2) + (\alpha - 2\beta + 3) - (2\alpha - 3\beta) + 5$

β) $B = -[-(\alpha - \beta + 1) + (-\alpha + \beta)] + [-2\alpha - (-2\beta + 3)]$

1.8 Να κάνετε τα σύνθετα κλάσματα απλά:

α) $\frac{3 - \frac{1}{3}}{2 - \frac{2}{3}}$

β) $\frac{-2 - \frac{3}{2}}{3 + \frac{1}{2}}$

γ) $\frac{2 - 3 - \frac{1}{3}}{3 - 5 - \frac{4}{3}}$

δ) $\frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{3 + \frac{2}{3} - \frac{3}{2}}$

1.9 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = -2(3\alpha - 3) + 3(3 + 2\alpha) - 10$

β) $B = 3(2\alpha + \beta - 1) - 2(\alpha - \beta + 1) - 4(\alpha + \beta - 1) - \beta$

γ) $\Gamma = -3(\alpha - \beta + 2) + 2(\alpha - \beta + 3) - (-\alpha + \beta + 5)$

1.10 Αν $\alpha - \beta = -2$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = 2(\alpha - \beta - 2) - 3(2\alpha - 2\beta + 1) - 5$

β) $B = 2(2\alpha - \beta + 1) - (\alpha + \beta - 2) - 3(\beta - \alpha)$

Η συντομογραφία των ασκήσεων

1. Υπολογισμός παραστάσεων

1.11 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(-5 + 8 - 4)(4 - 7 + 1) - (-6 + 2 - 8) : (-1 + 3 + 4 - 8)$

β) $(-4)\left(-2 + \frac{3}{4}\right) - (-6) : \left(-4 + 3 + \frac{2}{5}\right)$

1.12 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $A = -\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{6}{4}\right)$

β) $B = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\right) : \left(+\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

1.13 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = \frac{(-2)(+3) + (-15) : (-3) + (-3)(-5 - 2)}{(+20) : (-4) - (-5)(-2) - 5(-3 + 4)}$

β) $B = \frac{(-18) : (+2) - (-8)(+2) - (-2)(6 - 8)}{(-4)(-2) + (-5) : (+5) + 2(3 - 5)}$

1.14 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $(-2)\left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{10}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{7}{5}\right)$

β) $\left(-\frac{4}{5}\right) : \left(+\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) : (-2)$

1.15 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = -(\alpha - \beta - 2) + (-\alpha + \beta - 3) - (-2\alpha + 2\beta - 7)$

β) $B = -[-(\alpha - 2\beta + 1) + (-\alpha + 3\beta - 2)] - (2\alpha - 5\beta + 2)$

2. Σύνθετα κλάσματα

1.16 Να μετατρέψετε σε απλά τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα:

α) $\frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{10}}$

β) $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{30}}$

γ) $\frac{6}{-\frac{2}{5}}$

δ) $\frac{\frac{7}{8}}{3}$

1.17 Να μετατρέψετε σε απλά τα παρακάτω κλάσματα:

$$\alpha) A = \frac{2 - \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}{2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}$$

$$\beta) B = \frac{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}}$$

1.18 Αν $\alpha = 2 - \frac{3 - \frac{5}{2}}{2 + \frac{1}{2}}$ και $\beta = 4 - \frac{3 + \frac{2}{3}}{3 - \frac{4}{3}}$, να βρείτε:

$\alpha)$ τον αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$,

$\beta)$ τον αριθμό $\left(\frac{\alpha}{\beta} - 2\right)^{2004}$.

1.19 Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{7} + \frac{(-2)\left(-\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$ και $\beta = 1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{(-2)\left(+\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$.

$\alpha)$ Να υπολογίσετε τον αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$. $\beta)$ Να βρείτε τον αριθμό $\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2007}$.

1.20 Αν $\alpha = \frac{1}{7}$ και $\beta = \frac{1}{3}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\alpha + \frac{2\beta}{1 - \beta^2}\right) : \left(1 - \alpha \frac{2\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

3. Επιμεριστική ιδιότητα

1.21 Να κάνετε τις πράξεις:

$\alpha)$ $A = 2(-3 + \alpha) - 3(\alpha - 2) + \alpha + 2$

$\beta)$ $B = -[-2(\alpha - 1) + 3(2\alpha - 5)] - 2(7 - 2\alpha)$

1.22 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$\alpha)$ $A = 2[3(2 - 3x) - 2(3 - 2x)] - 5[-2(3 + x) + 3(x + 2)]$

$\beta)$ $B = 7 - 6\{5 - 4[3 - 2(1 - x)]\} - 6(8x - 4)$

1.23 Αν $\alpha - \beta = 1$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$\alpha)$ $4(\alpha - \beta - 2) - 2(\alpha - \beta - 5)$

$\beta)$ $2(3\alpha - 3\beta + 1) - 3(2 - 2\alpha + 2\beta) - \alpha + \beta$

1.24 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = -\left\{-\left[-(-\alpha + \beta) - (3\alpha - \beta - 3)\right]\right\} - \left[-(2\alpha - \beta) - (2\beta - 3)\right]$

β) $B = -\left\{-\left[-2(\alpha + \beta - \gamma) - (\gamma - \beta)\right] + \left[-3(\alpha - \gamma) + (-\beta + \gamma)\right] - 3\gamma\right\}$

4. Μαθηματικές προκλήσεις

1.25 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{3\alpha + 8\beta}{9\alpha + 4\beta}$.

1.26 Ο κωδικός της πιστωτικής κάρτας ενός μαθηματικού είναι εξαψήφιος αριθμός. Δύο από τα ψηφία φαίνονται στο σχήμα (το πρώτο είναι 2 και το πέμπτο είναι 5). Ο ιδιοκτήτης της γνωρίζει ακόμα ότι το γινόμενο οποιονδήποτε τριών διαδοχικών ψηφίων του κωδικού είναι πάντοτε ίσο με 30. Ποιον κωδικό έχει η κάρτα;

2				5	
---	--	--	--	---	--

1.27 Στο διπλανό μαγικό τετράγωνο το άθροισμα των τριών αριθμών κάθε γραμμής, κάθε στήλης και κάθε διαγωνίου είναι ίσο με 21. Δυστυχώς οι οχτώ αριθμοί σβήστηκαν κατά λάθος. Μπορείτε να βρείτε το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών που βρίσκονται στις γωνίες του μαγικού αυτού τετραγώνου;

	7	

1.28 Αν οι αριθμοί $\alpha\beta$ και $\gamma\delta$ είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha\beta + \frac{1}{\gamma\delta}}{\alpha + \frac{1}{\beta\gamma\delta}}$$

1.29 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{21}{20}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{20}\right)$$

1.30 Πόσα ψηφία έχει ο μικρότερος φυσικός αριθμός του οποίου το άθροισμα των ψηφίων είναι ίσο με 100; Ποιο είναι το πρώτο ψηφίο του αριθμού αυτού;

1.31 Αν ο p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $27p + 1$ είναι σύνθετος.

ΕΜΕ, Θαλής – 2006

Ενότητα 2

✓ Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Βασική θεωρία - Παραδείγματα

- ΘΕΜΑ 1^ο** α) Τι ονομάζουμε δύναμη με βάση a και εκθέτη έναν φυσικό $n \geq 2$;
β) Να γραφούν οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο αριθμό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Δύναμη με βάση τον αριθμό a και εκθέτη τον φυσικό αριθμό n , με $n \geq 2$, λέμε το γινόμενο n παραγόντων ίσων με τον αριθμό a . Είναι δηλαδή:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

Ορίζουμε ακόμα ότι:

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1 \text{ με } a \neq 0, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ με } a \neq 0$$

Για παράδειγμα είναι:

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25, \quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

β) Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς και εφόσον ορίζονται, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$3^7 : 3^4 = 3^{7-4} = 3^3$
$(a\beta)^n = a^n \beta^n$	$(2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$

Ιδιότητες	Παραδείγματα
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$
$(\alpha^\mu)^v = \alpha^{\mu v}$	$(2^{-2})^{-3} = 2^6 = 64$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$

Σημείωση

Όταν μια δύναμη είναι παράγοντας στον αριθμητή ή τον παρονομαστή ενός κλάσματος, τότε η δύναμη αυτή μπορεί –αν το επιθυμούμε– να αλλάξει όρο στο κλάσμα, αρκεί στη δύναμη αυτή να αλλάξουμε το πρόσημο του εκθέτη. Επομένως:

$$\frac{\alpha^\mu}{\beta^v} = \frac{\beta^{-v}}{\alpha^{-\mu}}, \quad \frac{\alpha^\mu}{\beta^v} = \frac{1}{\beta^v \alpha^{-\mu}}, \quad \frac{\alpha^\mu}{\beta^v} = \alpha^\mu \beta^{-v}$$

ΘΕΜΑ 2^ο α) Πώς υπολογίζουμε μια δύναμη, όταν η βάση είναι αρνητικός αριθμός;
β) Ποια είναι η προτεραιότητα των πράξεων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Η δύναμη α^v στην οποία ο α είναι αρνητικός αριθμός και ο v είναι φυσικός ή ακέραιος αριθμός, υπολογίζεται διακρίνοντας τις περιπτώσεις:

- ♦ Αν ο v είναι άρτιος αριθμός, τότε βάζουμε πρόσημο συν (+) και υπολογίζουμε τη δύναμη $|\alpha|^v$.

Για παράδειγμα $(-2)^4 = +2^4 = 16$, $(-3)^2 = +3^2 = 9$.

- ♦ Αν ο v είναι περιττός αριθμός, τότε βάζουμε πρόσημο πλην (−) και υπολογίζουμε τη δύναμη $|\alpha|^v$.

Για παράδειγμα $(-3)^3 = -3^3 = -27$, $(-2)^5 = -2^5 = -32$.

Γενικά, ισχύει:

$$\alpha^v = \begin{cases} |\alpha|^v, & \text{αν } v \text{ είναι άρτιος} \\ -|\alpha|^v, & \text{αν } v \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Τονίζουμε ότι $-\alpha^2 \neq (-\alpha)^2$, διότι $(-\alpha)^2 = \alpha^2$. Επομένως $(-2)^4 = +16$, ενώ $-2^4 = -16$.

β) Η **προτεραιότητα** των πράξεων είναι η παρακάτω:

- ♦ Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- ♦ Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- ♦ Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- ♦ Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} (-3)(-2)^2 - [(-3)^3 : (-9) - (-6)] : (-3) &= (-3)(+4) - [(-27) : (-9) + 6] : (-3) = \\ &= -12 - (3 + 6) : (-3) = -12 - 9 : (-3) = -12 - (-3) = -12 + 3 = -9 \end{aligned}$$

Λυμένες ασκήσεις

1. Ιδιότητες των δυνάμεων

Σχόλια - Μέθοδος

Υπενθυμίζουμε ότι για τις δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη ισχύουν οι ιδιότητες:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

2.1 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $A = (-2x^2y^3\omega)^3(-xy^4\omega^2)^4$

β) $B = (-x^{-2}y^4\omega^{-3})^{-3} : (-x^3y^{-4}\omega^3)^{-2}$

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α) $A = (-2x^2y^3\omega)^3(-xy^4\omega^2)^4 = (-2)^3(x^2)^3(y^3)^3\omega^3[+x^4(y^4)^4(\omega^2)^4] =$
 $= -8x^6y^9\omega^3x^4y^{16}\omega^8 = -8x^{6+4}y^{9+16}\omega^{3+8} = -8x^{10}y^{25}\omega^{11}$

β) $B = (-x^{-2}y^4\omega^{-3})^{-3} : (-x^3y^{-4}\omega^3)^{-2} = -(x^{-2})^{-3}(y^4)^{-3}(\omega^{-3})^{-3} : [(-x^3)^{-2}(y^{-4})^{-2}(\omega^3)^{-2}] =$

$$\begin{aligned}
 &= -x^6 y^{-12} \omega^9 : (x^{-6} y^8 \omega^{-6}) = -x^6 y^{-12} \omega^9 \cdot (x^{-6} y^8 \omega^{-6})^{-1} = -x^6 y^{-12} \omega^9 (x^6 y^{-8} \omega^6) = \\
 &= -x^{6+6} y^{-12-8} \omega^{9+6} = -x^{12} y^{-20} \omega^{15} = -\frac{x^{12} \omega^{15}}{y^{20}}
 \end{aligned}$$

2.2 Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) A = (-1)^{-5} [(-3)^2 (-9)^{-1} - (-2)^{-4} : (-4)^{-2}] \quad \beta) B = \frac{(x^{-2} y^3 \omega^{-2})^{-3}}{(x^2 y^{-3} \omega^2)^3} \cdot \frac{(x^{-3} y^2 \omega^{-3})^4}{(x^3 y^{-2} \omega^3)^{-4}}$$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 A &= (-1)^{-5} [(-3)^2 (-9)^{-1} - (-2)^{-4} : (-4)^{-2}] = \frac{1}{(-1)^5} \left[9 \cdot \frac{1}{(-9)^1} - \frac{1}{(-2)^4} : \frac{1}{(-4)^2} \right] = \\
 &= \frac{1}{(-1)} \left[9 \cdot \frac{1}{(-9)} - \frac{1}{16} : \frac{1}{16} \right] = -1 \cdot [(-1) - 1] = -1 \cdot (-1 - 1) = -1 \cdot (-2) = 2
 \end{aligned}$$

β) Επειδή $(\alpha\beta)^v = \alpha^v \beta^v$ και $(\alpha^\mu)^v = \alpha^{\mu v}$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{(x^{-2} y^3 \omega^{-2})^{-3}}{(x^2 y^{-3} \omega^2)^3} \cdot \frac{(x^{-3} y^2 \omega^{-3})^4}{(x^3 y^{-2} \omega^3)^{-4}} = \frac{(x^{-2})^{-3} (y^3)^{-3} (\omega^{-2})^{-3}}{(x^2)^3 (y^{-3})^3 (\omega^2)^3} \cdot \frac{(x^{-3})^4 (y^2)^4 (\omega^{-3})^4}{(x^3)^{-4} (y^{-2})^{-4} (\omega^3)^{-4}} = \\
 &= \frac{x^6 y^{-9} \omega^6}{x^6 y^{-9} \omega^6} \cdot \frac{x^{-12} y^8 \omega^{-12}}{x^{-12} y^8 \omega^{-12}} = 1 \cdot 1 = 1
 \end{aligned}$$

διότι οι όροι του κλάσματος είναι ίσοι.

2. Δυνάμεις με αρνητική βάση

Σχόλια - Μέθοδος

ι) Όταν μια δύναμη α^v έχει αρνητική βάση, δηλαδή $\alpha < 0$, τότε για να βρούμε το πρόσημο της δύναμης αυτής στηριζόμαστε στον παρακάτω κανόνα:

- ♦ Αν ο εκθέτης, φυσικός ή ακέραιος, είναι **άρτιος**, τότε η δύναμη είναι θετικός αριθμός.
- ♦ Αν ο εκθέτης, φυσικός ή ακέραιος, είναι **περιττός**, τότε η δύναμη είναι αρνητικός αριθμός.

ii) Γενικότερα ισχύει το εξής πολύ χρήσιμο συμπέρασμα:

$$(-a)^v = \begin{cases} +a^v, & \text{αν } v \text{ είναι άρτιος} \\ -a^v, & \text{αν } v \text{ είναι περιττός} \end{cases}, \text{ όπου } a > 0$$

Για παράδειγμα είναι:

$$(-2)^3 = -2^3 = -8, \quad (-3)^4 = +3^4 = +81, \quad (-1)^{2007} = -1, \quad (-1)^{1940} = +1$$

2.3 Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $(-2)^3(-3)^2$

β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

γ) $(-2)^{15} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-25}$

δ) $(-3)^{40} \left(-\frac{1}{3}\right)^{-10}$

ε) $(-5^{20})^7 : (-5^3)^{40}$

στ) $(-7^5)^8 : (-7^6)^5$

ΛΥΣΗ

Όταν η βάση μιας δύναμης είναι αρνητικός αριθμός, τότε το πρόσημο της δύναμης εξαρτάται από το αν ο εκθέτης είναι άρτιος ή περιττός.

α) $(-2)^3(-3)^2 = (-8)(+9) = -72$

β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = (-3)^2(-2)^3 = (+9)(-8) = -72$

γ) $(-2)^{15} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-25} = (-2^{15})(-2)^{25} = (-2^{15})(-2^{25}) = +2^{15} \cdot 2^{25} = 2^{15+25} = 2^{40}$

δ) $(-3)^{40} \left(-\frac{1}{3}\right)^{-10} = (+3^{40})(-3)^{10} = (+3^{40})(+3^{10}) = 3^{40} \cdot 3^{10} = 3^{40+10} = 3^{50}$

ε) $(-5^{20})^7 : (-5^3)^{40} = (-5^{140}) : (+5^{120}) = -(5^{140} : 5^{120}) = -5^{140-120} = -5^{20}$

στ) $(-7^5)^8 : (-7^6)^5 = (+7^{40}) : (-7^{30}) = -(7^{40} : 7^{30}) = -7^{40-30} = -7^{10}$

3. Η προτεραιότητα των πράξεων

Σχόλια - Μέθοδος

Για να απλοποιήσουμε μια παράσταση, εκτελούμε τις πράξεις με την εξής προτεραιότητα:

- ♦ Εκτελούμε τις πράξεις, αν γίνονται, μέσα στις παρενθέσεις.
- ♦ Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- ♦ Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- ♦ Εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

2.4 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) A = (-4 + 3^2) : (-5) + (-2)(-1)^7$$

$$\beta) B = (3 \cdot 2^3) : [(-2)^3 - (-3)(-1)^5 - (-1)^8]$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}\alpha) A &= (-4 + 3^2) : (-5) + (-2)(-1)^7 = (-4 + 9) : (-5) + (-2)(-1) = \\ &= 5 : (-5) + 2 = -1 + 2 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) B &= (3 \cdot 2^3) : [(-2)^3 - (-3)(-1)^5 - (-1)^8] = (3 \cdot 8) : [-8 - (-3)(-1) - (+1)] = \\ &= 24 : (-8 - 3 - 1) = 24 : (-12) = -2\end{aligned}$$

2.5 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) A = 2(-1)^8 [(-2^{-3})^{-2} - (-2)^4(-2)^2 - (-5)^0]$$

$$\beta) B = [-(-3)^2 + (-2)^3 : (-1)]^{1001} [-2^4 + (-5)(-3)]^{2004}$$

ΛΥΣΗ

Ακολουθούμε πιστά την προτεραιότητα των πράξεων, όπου φυσικά υπάρχει λόγος. Έτσι βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\alpha) A &= 2(-1)^8 [(-2^{-3})^{-2} - (-2)^4(-2)^2 - (-5)^0] = \\ &= 2(+1)[(+2^6) - (+16)(+4) - 1] = 2(64 - 64 - 1) = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) B &= [-(+9) + (-8) : (-1)]^{1001} (-16 + 15)^{2004} = (-9 + 8)^{1001} (-1)^{2004} = \\ &= (-1)^{1001} (+1) = (-1)(+1) = -1\end{aligned}$$

Προτεινόμενες ασκήσεις

Βασικές ασκήσεις

2.6 Να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη:

α) $3^{-7} \cdot 3^{10}$

β) $2^5 : 2^{-3}$

γ) $5^7 \cdot 2^7$

δ) $3^{-5}(-9)^4$

ε) $\frac{(-10)^8}{5^8}$

στ) $\frac{16 \cdot 2^7}{4^3}$

2.7 Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α) $(5^{-2})^4(-5)^{10}$

β) $(-2)^4 \cdot 4^{-3}$

γ) $(0,5)^{-4} \cdot 4^{-3}$

δ) $(-2,5)^8(-4)^8$

ε) $9^{10} : (-3)^{17}$

στ) $(0,01)^4 \cdot 10^{10}$

2.8 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(\alpha^2)^4 \cdot 5\alpha^{-4}$

β) $(\alpha\beta^2)^3 \cdot \alpha^3\beta$

γ) $(-2x)^4(-2x^4)$

δ) $(-4x)^5 : (2^{10}x^2)$

ε) $(-2x^3)^2 : (-2x^2)^3$

στ) $\left(-\frac{4}{25}\alpha^2\right) : \left(-\frac{2}{5}\alpha^{-1}\right)^2$

2.9 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(-9)^2 : (3^{-1})^{-4} - (-3)^3(-1)^{-5} + (-2)(-3^2) - (-2)^5$

β) $[(-25)^7 \cdot 8^4] : [(-5)^7(-40)^4]$

2.10 Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α) $2^3 - 3^2 - 1^{100} + 5^{4-2^2} + (-7)^0$

β) $(-1)^{10} + (-1)^9 - (-2)^4 - (-3)^3$

γ) $(-2)^2 : (-4) + (-3)^3 : (-9) + (-4)^2 : (-8)$

δ) $\frac{(-2)^4 \cdot 2}{2^4} + \frac{(-3)^5(-2)}{3^5} + \frac{(-5)^6(-3)}{5^6}$

2.11 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $x^2y^4\omega^6 = (\dots\dots\dots)^2$

β) $8x^3y^6\omega^{12} = (\dots\dots\dots)^3$

γ) $16x^4y^8\omega^{12} = (\dots\dots\dots)^4$

δ) $-27x^3y^6\omega^9 = (\dots\dots\dots)^3$

2.12 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $10^5x = 10^7$

β) $7^8x = (-7)^{10}$

γ) $2^7 \cdot 3^{10}x = -4^4(-9)^5$

δ) $\frac{(-5)^9}{(-3)^6}x = \frac{-5^{10}}{(-3)^5}$

Η συστηματοποίηση των ασκήσεων

1. Ιδιότητες των δυνάμεων

2.13 Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = [(x^2y^3)^{-2}(xy^3)^4] : (x^3 : y^{-1})^{-3}$ για $x = 2007$ και $y = \frac{2}{2007}$ και να τη γράψετε ως μία δύναμη με βάση φυσικό αριθμό.

2.14 Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta^2} \right)^2 \left(\frac{\beta}{\alpha^2} \right)^2 \right] : (\alpha\beta)^{-2}$, όπου οι α, β είναι αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν.

2.15 Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παρακάτω παραστάσεων για $x = 0,4$ και $y = -2,5$:

α) $A = [x^5(xy^2)^3] : (x^{-2} : y)^{-2}$ **β)** $B = [(xy^{-1})^2 : (x^3y^7)^{-1}]^2$

2.16 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = x^2(x^2y^3)^2(x^{-1})^{-3}$, όταν $x^3y^2 = -2$

β) $B = [x^2(xy^2)^3]^3 : [(x^{-2}y^{-3})^{-2}]^3$, όταν $x = -3$

2.17 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = [(\alpha^2\beta^{-1})^2\alpha^{-2}(\beta^2)^{-3}]^{-1} : \left(\frac{\beta^{-2}}{\alpha^4} \right)^{-3}$, όπου $\alpha = 0,01$ και $\beta = 0,1$

β) $B = \frac{\alpha\beta^{-2}(\alpha^{-1}\beta^2)^4(\alpha\beta^{-1})^2}{\alpha^{-2}\beta(\alpha^2\beta^{-1})^3\alpha^{-1}\beta}$, όπου $\alpha = 10^{-3}$ και $\beta = 10^{-2}$

2.18 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (0,25)^{30} \cdot 8^{20}$

β) $B = 12^{2000}(1,5)^{1000} \cdot 6^{-3000}$

2. Δυνάμεις με αρνητική βάση

2.19 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(-1)^{10}(-2)^3(-15)^0$

β) $[(-1)^{101}(-3)^3] : (-3)^2$

γ) $(-2)^2(-3)^4$

δ) $\left(-\frac{1}{2} \right)^{-3} (-5^{-1})^{-1}$