



Περιέχει δωρεάν
CD-ROM

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

ΤΡΙΤΗ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Tirupathi R. Chandrupatla
Ashok D. Belegundu



Επιστημονική επιμέλεια ελληνικής έκδοσης: Χαράλαμπος Φραγκάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Περιεχόμενα

Πρόλογος.....	15
Οι συγγραφείς.....	18
1 Θεμελιώδεις έννοιες	19
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	19
1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΟ	19
1.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ	20
1.4 ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ	20
1.5 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	22
1.6 ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ–ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ.....	23
1.7 ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΗΣ–ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ	24
<i>Ειδικές περιπτώσεις.....</i>	<i>25</i>
1.8 ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ	27
1.9 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ — Η ΜΕΘΟΔΟΣ RAYLEIGH-RITZ	27
<i>Δυναμική Ενέργεια, Π.....</i>	<i>27</i>
<i>Η Μέθοδος Rayleigh-Ritz</i>	<i>30</i>
1.10 ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN	32
1.11 ΑΡΧΗ SAINT VENANT.....	35
1.12 ΤΑΣΗ VON MISES.....	36
1.13 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ Η/Υ	36
1.14 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	37
ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ	37
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	37
2 Μητρική άλγεβρα και απαλοιφή Gauss.....	43
2.1 ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ	43
<i>Διανύσματα γραμμών και στηλών.....</i>	<i>44</i>
<i>Πρόσθεση και αφαίρεση.....</i>	<i>44</i>
<i>Πολλαπλασιασμός με ένα βαθμωτό.....</i>	<i>44</i>
<i>Πολλαπλασιασμός μητρώων.....</i>	<i>44</i>
<i>Αναστροφή</i>	<i>45</i>
<i>Διαφόριση και ολοκλήρωση</i>	<i>45</i>
<i>Τετραγωνικό μητρώο.....</i>	<i>46</i>
<i>Διαγώνιο μητρώο</i>	<i>46</i>
<i>Μοναδιαίο μητρώο.....</i>	<i>46</i>
<i>Συμμετρικό μητρώο</i>	<i>47</i>

	Άνω τριγωνικό μητρώο.....	47
	Ορίζουσα μητρώου.....	47
	Αντιστροφή μητρώου.....	48
	Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.....	49
	Θετικά ορισμένο μητρώο.....	50
	Αποσύνθεση Cholesky.....	50
2.2	ΑΠΑΛΟΙΦΗ GAUSS.....	51
	Γενικός αλγόριθμος για την απαλοιφή Gauss.....	52
	Συμμετρικό μητρώο.....	55
	Συμμετρικά ζωνικά μητρώα.....	56
	Λύση με πολλαπλά δεξιά μέρη.....	58
	Απαλοιφή Gauss με αναγωγή στήλης.....	59
	Λύση κορυφογραμμής.....	61
	Μετωπική λύση.....	62
2.3	ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΖΥΓΟΥΣ ΚΛΙΣΕΩΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	62
	Αλγόριθμος συζυγούς κλίσης.....	62
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	63
	Προγράμματα H/Y.....	66

3 Προβλήματα μίας διάστασης..... 69

3.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	69
3.2	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	70
	Διαίρεση στοιχείων.....	70
	Σχήμα αρίθμησης.....	71
3.3	ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ.....	73
3.4	Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....	76
	Μητρώο ακαμψίας στοιχείου.....	77
	Όροι δυνάμεων.....	78
3.5	Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ GALERKIN.....	81
	Ακαμψία Στοιχείου.....	81
	Όροι δυνάμεων.....	82
3.6	ΣΥΝΘΕΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΦΟΡΤΙΟΥ.....	83
3.7	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ K.....	86
3.8	ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	88
	Τύποι συνοριακών συνθηκών.....	88
	Προσέγγιση απαλοιφής.....	89
	Προσέγγιση ποινής.....	94
	Πολυσημειακοί περιορισμοί.....	100
3.9	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ.....	103
3.10	ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ.....	109
	Αρχείο δεδομένων εισόδου.....	113
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	113
	Προγράμματα H/Y.....	123

4	Δικτυώματα	129
4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	129
4.2	ΕΠΙΠΕΔΑ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ.....	130
	<i>Τοπικά και ολικά συστήματα συντεταγμένων.....</i>	<i>130</i>
	<i>Τύπος υπολογισμού των ℓ και m.....</i>	<i>131</i>
	<i>Μητρώο ακαμψίας στοιχείου.....</i>	<i>132</i>
	<i>Υπολογισμοί τάσης</i>	<i>133</i>
	<i>Επιδράσεις θερμοκρασίας</i>	<i>137</i>
4.3	ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ	141
4.4	ΣΥΝΘΕΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΓΙΑ ΖΩΝΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΚΟΡΥΦΟΓΡΑΜΜΗΣ	142
	<i>Σύνθεση για ζωνική λύση</i>	<i>142</i>
	<i>Αρχείο δεδομένων εισόδου</i>	<i>146</i>
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	147
	<i>Προγράμματα H/Y.....</i>	<i>155</i>
5	Προβλήματα δυο διαστάσεων με τη χρήση τριγώνων σταθερής παραμόρφωσης.....	157
5.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	157
5.2	Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	158
5.3	ΤΡΙΓΩΝΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ (CST).....	160
	<i>Ισοπαραμετρική αναπαράσταση</i>	<i>162</i>
	<i>Προσέγγιση δυναμικής ενέργειας.....</i>	<i>166</i>
	<i>Ακαμψία στοιχείου</i>	<i>167</i>
	<i>Όροι δύναμης.....</i>	<i>168</i>
	<i>Προσέγγιση Galerkin.....</i>	<i>173</i>
	<i>Υπολογισμοί τάσης</i>	<i>175</i>
	<i>Επιδράσεις θερμοκρασίας</i>	<i>177</i>
5.4	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ..	179
	<i>Μερικές γενικές παρατηρήσεις για τη διαίρεση σε στοιχεία</i>	<i>181</i>
5.5	ΟΡΘΟΤΡΟΠΙΚΑ ΥΛΙΚΑ.....	182
	<i>Επιδράσεις θερμοκρασίας</i>	<i>185</i>
	<i>Αρχείο δεδομένων εισόδου</i>	<i>188</i>
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	190
	<i>Προγράμματα H/Y.....</i>	<i>202</i>
6	Αξονοσυμμετρικά στερεά υποβαλλόμενα σε αξονοσυμμετρική φόρτιση.....	207
6.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	207
6.2	ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ.....	208
6.3	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ: ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ	210
	<i>Προσέγγιση δυναμικής ενέργειας.....</i>	<i>212</i>
	<i>Όρος δύναμης σώματος.....</i>	<i>213</i>

	Περιστρεφόμενος σφόνδυλος.....	214
	Εφελκυσμός επιφάνειας.....	214
	Προσέγγιση Galerkin.....	216
	Υπολογισμοί τάσης.....	219
	Επίδραση θερμοκρασίας.....	220
6.4	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ..	220
	Κύλινδρος υποβαλλόμενος σε εσωτερική πίεση.....	220
	Άπειρος κύλινδρος.....	221
	Προσαρμογή με πίεση σε άκαμπτο άξονα.....	222
	Προσαρμογή με πίεση σε ελαστικό άξονα.....	222
	Ελατήριο Belleville.....	223
	Πρόβλημα θερμικής τάσης.....	224
	Αρχείο δεδομένων εισόδου.....	227
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	228
	Προγράμματα H/Y.....	236
7	Δισδιάστατα ισοπαραμετρικά στοιχεία και αριθμητική ολοκλήρωση.....	239
7.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	239
7.2	ΤΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΚΟΜΒΩΝ.....	239
	Συναρτήσεις μορφής.....	239
	Μητρώο ακαμψίας στοιχείου.....	242
	Διανύσματα δύναμης στοιχείου.....	244
7.3	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ.....	245
	Διπλά ολοκληρώματα.....	248
	Ολοκλήρωση ακαμψίας.....	248
	Υπολογισμοί τάσης.....	249
7.4	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ.....	251
	Τετράπλευρο εννέα κόμβων.....	251
	Τετράπλευρο οκτώ κόμβων.....	253
	Τρίγωνο έξι κόμβων.....	255
7.5	ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΓΙΑ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	257
7.6	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΥΖΥΓΟΥΣ ΚΛΙΣΗΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.....	258
	Συμπερασματικά σχόλια.....	258
	Αρχείο δεδομένων εισόδου.....	260
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	262
	Προγράμματα H/Y.....	265
8	Δοκοί και πλαίσια.....	269
8.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	269
	Προσέγγιση δυναμικής ενέργειας.....	270
	Προσέγγιση Galerkin.....	271
8.2	ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	272
8.3	ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΦΟΡΤΙΟΥ.....	275

8.4	ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ	276
8.5	ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΡΟΠΗ ΚΑΜΨΗΣ	277
8.6	ΔΟΚΟΙ ΣΕ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΤΗΡΙΓΜΑΤΑ	279
8.7	ΕΠΠΕΔΑ ΠΛΑΙΣΙΑ	280
8.8	ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ	285
8.9	ΚΑΠΟΙΑ ΣΧΟΛΙΑ	289
	<i>Αρχείο δεδομένων εισόδου</i>	290
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	293
	<i>Προγράμματα H/Y</i>	300
9	Προβλήματα ανάλυσης τάσεων σε τρεις διαστάσεις	309
9.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	309
9.2	ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	310
	<i>Ακαμψία στοιχείου</i>	313
	<i>Όροι δυνάμεων</i>	314
9.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΤΑΣΗΣ	314
9.4	ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ	315
9.5	ΕΞΑΕΔΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ	319
9.6	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	321
9.7	ΜΕΤΩΠΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΙΑ ΜΗΤΡΩΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	323
	<i>Συνδετικότητα και προμετωπική ρουτίνα</i>	324
	<i>Σύνθεση στοιχείων και εξέταση συγκεκριμένων βαθμών ελευθερίας</i>	325
	<i>Απαλοιφή συμπληρωμένων βαθμών ελευθερίας</i>	326
	<i>Προς τα πίσω αντικατάσταση</i>	326
	<i>Εξέταση πολυσημειακών περιορισμών</i>	326
	<i>Αρχείο δεδομένων εισόδου</i>	327
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	328
	<i>Προγράμματα H/Y</i>	332
10	Προβλήματα βαθμωτού πεδίου	341
10.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	341
10.2	ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	343
	<i>Μονοδιάστατη αγωγή θερμότητας</i>	344
	<i>Μονοδιάστατη μεταφορά θερμότητας σε λεπτά πτερύγια</i>	351
	<i>Δισδιάστατη αγωγή θερμότητας σε σταθερή κατάσταση</i>	355
	<i>Δισδιάστατα πτερύγια</i>	364
	<i>Προεπεξεργασία για το πρόγραμμα Heat2D</i>	366
10.3	ΣΤΡΕΨΗ	366
	<i>Τριγωνικό στοιχείο</i>	367
	<i>Μέθοδος Galerkin*</i>	368
10.4	ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ, ΔΙΗΘΗΣΗ, ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΚΑΙ ΡΟΗ ΡΕΥΣΤΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ	372
	<i>Δυναμική ροή</i>	372
	<i>Διήθηση</i>	373

	Προβλήματα ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.....	374
	Ροή ρευστών σε αγωγούς.....	377
	Ακουστική.....	379
	Συνοριακές συνθήκες	379
	Μονοδιάστατη ακουστική	380
	Μονοδιάστατες αξονικές δονήσεις	381
	Δισδιάστατη ακουστική.....	384
10.5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.....	385
	Αρχείο δεδομένων εισαγωγής.....	385
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	386
	Προγράμματα Η/Υ.....	397
11	Θέματα δυναμικής.....	403
11.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	403
11.2	ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ	403
	Στερεό σώμα με κατανεμημένη μάζα.....	404
11.3	ΜΗΤΡΩΑ ΜΑΖΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ	406
11.4	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	411
	Ιδιότητες των ιδιοδιανυσμάτων	412
	Υπολογισμός ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος.....	412
	Γενικευμένη μέθοδος Jacobi	418
	Τριδιαγωνοποίηση και προσέγγιση έμμεσης μετατόπισης	422
	Μετατροπή του γενικευμένου προβλήματος σε τυπική μορφή	422
	Τριδιαγωνοποίηση.....	423
	Έμμεσο συμμετρικό βήμα QR με μετατόπιση Wilkinson για διαγωνοποίηση.....	426
11.5	ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ ΜΕ ΕΝΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ	427
11.6	ΑΝΑΓΩΓΗ GUYAN	429
11.7	ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΑΚΑΜΠΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ.....	431
11.8	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.....	433
	Αρχείο δεδομένων εισόδου	434
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	436
	Προγράμματα Η/Υ.....	442
12	Προεπεξεργασία & μετεπεξεργασία.....	449
12.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	449
12.2	ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ	449
	Αναπαράσταση περιοχής και μπλοκ.....	449
	Κόμβοι γωνιών μπλοκ, πλευρές και υποδιαίρεσεις	450
12.3	ΜΕΤΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ.....	457
	Παραμορφωμένη σύνθεση και μορφή κατάστασης	457
	Σχεδίαση ισομετρικών καμπύλων.....	458
	Κομβικές τιμές από γνωστές τιμές σταθερού στοιχείου για τρίγωνο	459

	<i>Προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων για τετράπλευρο με τέσσερις κόμβους</i>	<i>461</i>
12.4	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ	462
	<i>Αρχείο δεδομένων εισόδου</i>	<i>464</i>
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	464
	<i>Προγράμματα Η/Υ</i>	<i>467</i>
	Παράρτημα	481
	Βιβλιογραφία	485
	Απαντήσεις σε επιλεγμένα προβλήματα	489
	Ευρετήριο	491

Προβλήματα δυο διαστάσεων με τη χρήση τριγώνων σταθερής παραμόρφωσης

$$\mathbf{u} = [u, v]^T \quad (5.1)$$
$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (5.2)$$

The diagram shows a 2D body with a boundary L and area A . A coordinate system (x, y) is centered at a point (x, y) with unit vectors u and v . A point i is shown with components P_x and P_y . A distributed load T acts on a portion of the boundary, and a boundary condition $u = 0$ is indicated on another portion. A legend at the bottom right defines t as thickness at (x, y) and f_x, f_y as force components per unit volume at (x, y) .

ΣΧΗΜΑ 5.1 Το πρόβλημα δύο διαστάσεων

$$\mathbf{f} = [f_x, f_y]^T \quad \mathbf{T} = [T_x, T_y]^T \quad \text{και} \quad dV = t \, dA \quad (5.4)$$

όπου t είναι το πάχος κατά την κατεύθυνση z . Η δύναμη σώματος $\mathbf{f}$ έχει μονάδες δύναμη/μονάδα όγκου, ενώ η δύναμη εφελκυσμού $\mathbf{T}$ έχει μονάδες δύναμη/μονάδα επιφανείας. Η σχέση παραμόρφωσης-μετατόπισης δίνεται από

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^T \quad (5.5)$$

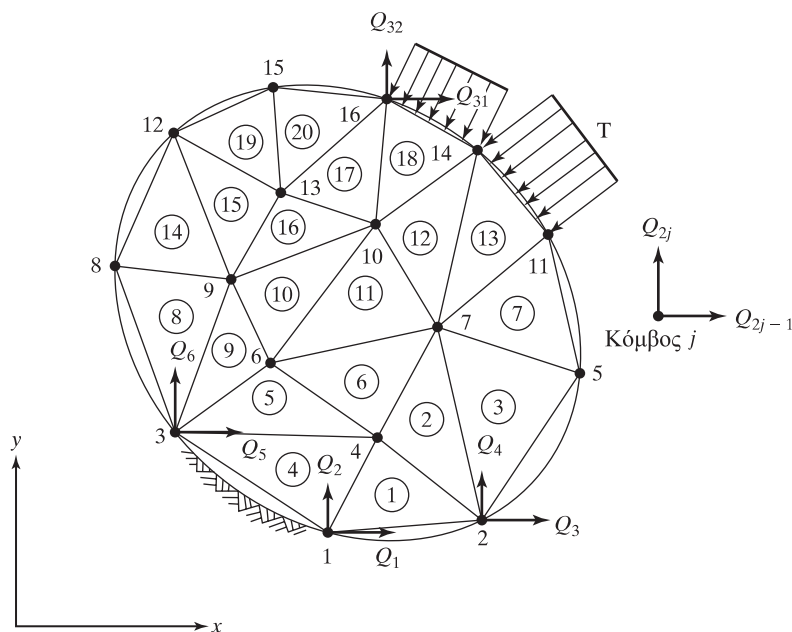
Η σχέση τάσεων και παραμορφώσεων δίνεται από τον τύπο (βλέπε Εξ. 1.18 και 1.19)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.6)$$

Για να διακριτοποιήσουμε την περιοχή εκφράζουμε τις μετατοπίσεις ως προς τις τιμές σε διακριτά σημεία. Πρώτα εισάγουμε τριγωνικά στοιχεία. Έπειτα αναπτύσσουμε τις έννοιες της ακαμψίας και της φόρτισης χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις ενέργειας και Galerkin.

5.2 Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Διαιρούμε την περιοχή δυο διαστάσεων σε τρίγωνα με ευθύγραμμες πλευρές. Το Σχήμα 5.2 δείχνει έναν τυπικό τριγωνισμό. Τα σημεία όπου συναντώνται οι ακμές των τριγώνων ονομάζονται κόμβοι, ενώ κάθε τρίγωνο το οποίο σχηματίζεται από τρεις κόμβους και τρεις πλευρές ονομάζεται *στοιχείο*. Τα στοιχεία καλύπτουν ολόκληρη την περιοχή, εκτός μιας μικρής περιοχής στο σύνορο. Αυτή η ακάλυπτη περιοχή βρίσκεται στα καμπύλα σύνορα και μπορεί να μειωθεί με επιλογή μικρότερων στοιχείων ή στοιχείων με καμπύλα σύνορα. Στόχος της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων είναι να λυθεί το πρόβλημα προσεγγιστικά και η ακάλυπτη περιοχή συνεισφέρει ως



ΣΧΗΜΑ 5.2 Διακριτοποίηση πεπερασμένου στοιχείου

ένα βαθμό σε αυτήν την προσέγγιση. Κατά τον τριγωνισμό του Σχ. 5.2, τοποθετούμε τους αριθμούς των κόμβων στις ακμές και τους αριθμούς των στοιχείων σε κύκλους.

Στο πρόβλημα δυο διαστάσεων που εξετάζουμε εδώ, κάθε κόμβος επιτρέπεται να μετατοπίζεται κατά τις δυο κατευθύνσεις x και y . Επομένως, κάθε κόμβος έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Όπως φαίνεται από το σχήμα αρίθμησης το οποίο χρησιμοποιήσαμε στα δικτυώματα, οι συνιστώσες μετατόπισης του κόμβου j λαμβάνονται ως Q_{2j-1} στην κατεύθυνση x και Q_{2j} στην κατεύθυνση y . Ορίζουμε το διάνυσμα ολικής μετατόπισης ως

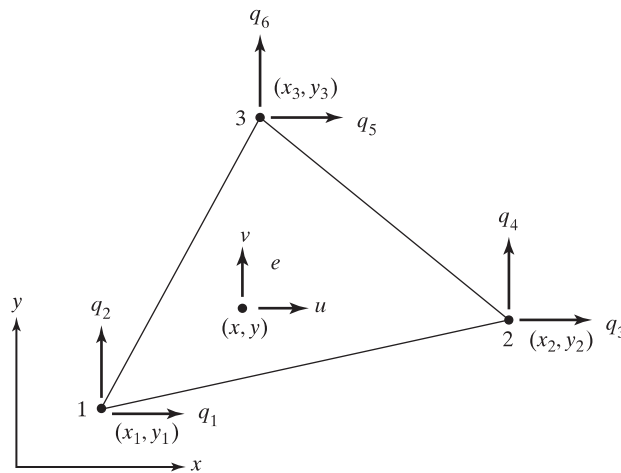
$$\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N]^T \quad (5.7)$$

όπου N είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας.

Αναπαριστούμε υπολογιστικά, τις πληροφορίες τριγωνισμού σε μορφή *κομβικών συντεταγμένων και συνδεσμολογίας*. Αποθηκεύουμε τις κομβικές συντεταγμένες σε έναν πίνακα δυο διαστάσεων, ο οποίος απαρτίζεται από το συνολικό αριθμό κόμβων και συντεταγμένων (δύο) ανά κόμβο. Για να δούμε τη συνδεσμολογία καθαρά, απομονώνουμε ένα τυπικό στοιχείο, όπως στο Σχ. 5.3. Για τους τρεις κόμβους οι οποίοι ορίζονται τοπικά ως 1, 2 και 3, οι αντίστοιχοι ολικοί αριθμοί κόμβων ορίζονται στο Σχ. 5.2. Συγκεντρώνουμε τις πληροφορίες συνδεσμολογίας των στοιχείων σε έναν πίνακα όπου αναφέρεται το μέγεθος και ο αριθμός των στοιχείων και οι κόμβοι (τρεις) ανά στοιχείο. Στον Πίνακα 5.1 απεικονίζεται μια τυπική συνδεσμολογία. Οι περισσότεροι πρότυποι κώδικες πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιούν αριστερόστροφη σύμβαση αρίθμησης, για να αποφεύγεται ο υπολογισμός αρνητικών εμβαδών. Όμως, για το πρόγραμμα το οποίο συνοδεύει αυτό το κεφάλαιο, η διάταξη δεν είναι αναγκαία.

Ο Πίνακας 5.1 ορίζει την αντιστοιχία των τοπικών και ολικών αριθμών κόμβων και τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας. Αναπαριστούμε τις συνιστώσες μετατόπισης ενός τοπικού κόμβου j ως q_{2j-1} και q_{2j} κατά τις κατευθύνσεις x και y , αντίστοιχα (Σχ. 5.3). Ορίζουμε το διάνυσμα μετατόπισης του στοιχείου ως

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_6]^T \quad (5.8)$$



ΣΧΗΜΑ 5.3 Τριγωνικό στοιχείο

Παρατηρήστε ότι από το μητρώο συνδεσμολογίας του Πίνακα 5.1, έχουμε τη δυνατότητα να εξαγάγουμε το διάνυσμα $\mathbf{q}$ από το ολικό διάνυσμα $\mathbf{Q}$, μια ενέργεια η οποία εκτελείται συχνά σε ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης,

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1 Συνδεσμολογία στοιχείων

Αριθμός Στοιχείου e	Τρεις κόμβοι		
	1	2	3
1	1	2	4
2	4	2	7
$\vdots$			
11	6	7	10
$\vdots$			
20	13	16	15

οι κομβικές συντεταγμένες οι οποίες συμβολίζονται με (x_1, y_1) , (x_2, y_2) και (x_3, y_3) έχουν την ολική αντιστοίχιση που ορίζεται στον Πίνακα 5.1. Η τοπική απεικόνιση των κομβικών συντεταγμένων και βαθμών ελευθερίας αποτελεί τη βάση για μια απλή και σαφή αναπαράσταση των χαρακτηριστικών του στοιχείου.

5.3 ΤΡΙΓΩΝΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ (CST)

Πρέπει να αναπαραστήσουμε τη μετατόπιση των σημείων εντός ενός στοιχείου συναρτήσει των κομβικών μετατοπίσεων του στοιχείου. Όπως αναφέραμε νωρίτερα, η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων χρησιμοποιεί την έννοια των συναρτήσεων μορφής για τη συστηματική ανάπτυξη αυτών των προσεγγίσεων. Οι τρεις συναρτήσεις μορφής N_1 , N_2 και N_3 , οι οποίες αντιστοιχούν στους κόμβους 1, 2 και 3 αντίστοιχα φαίνονται στο Σχ. 5.4. Η συνάρτηση μορφής N_1 έχει τιμή 1 στον κόμβο 1 και ελαττώνεται γραμμικά στην τιμή 0 στους κόμβους 2 και 3. Έτσι, οι τιμές της συνάρτησης μορφής N_1 ορίζουν μια επίπεδη επιφάνεια, η οποία απεικονίζεται σκιασμένη στο Σχ. 5.4α. Οι N_2 και N_3 αναπαρίστανται με παρόμοιες επιφάνειες, οι οποίες έχουν τιμή 1 στους κόμβους 2 και 3 αντίστοιχα, η οποία μειώνεται στην τιμή 0 στις απέναντι κορυφές. Αλλά και κάθε γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων μορφής αναπαριστά μια επίπεδη επιφάνεια. Πιο συγκεκριμένα, η σχέση $N_1 + N_2 + N_3$ αναπαριστά ένα επίπεδο με ύψος 1 στους κόμβους 1, 2 και 3. Άρα, το επίπεδο είναι παράλληλο προς το τρίγωνο 123. Συνεπώς, για κάθε N_1 , N_2 και N_3 ,

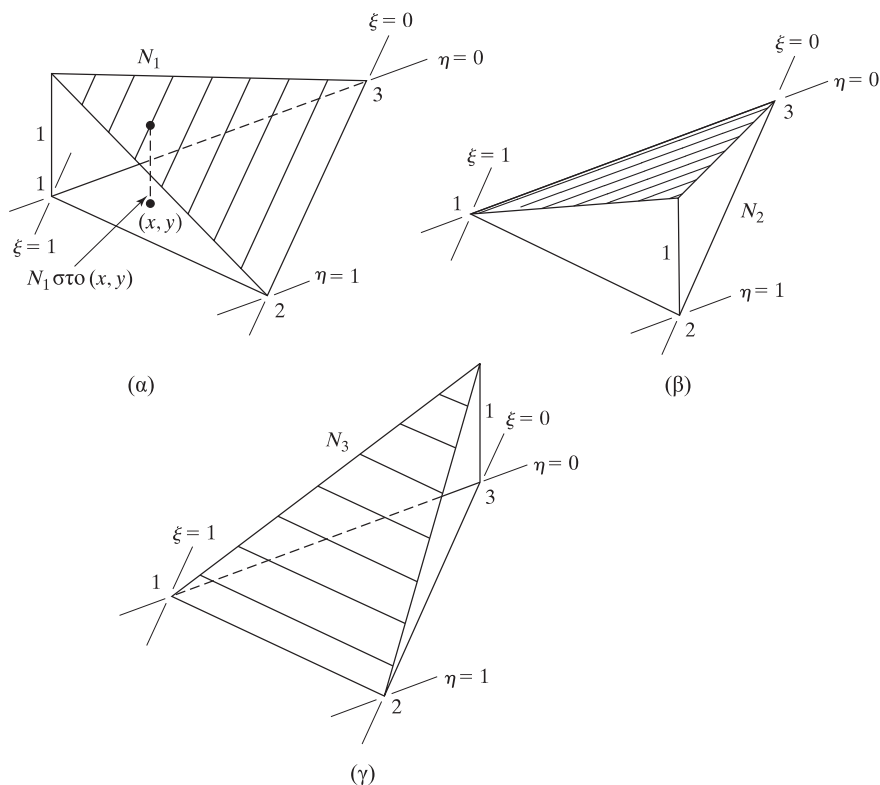
$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \quad (5.9)$$

Γι' αυτό το λόγο, οι N_1 , N_2 και N_3 δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Μόνο δύο από αυτές είναι ανεξάρτητες. Οι ανεξάρτητες συναρτήσεις μορφής αναπαρίστανται κατάλληλα από το ζεύγος ξ , η ως

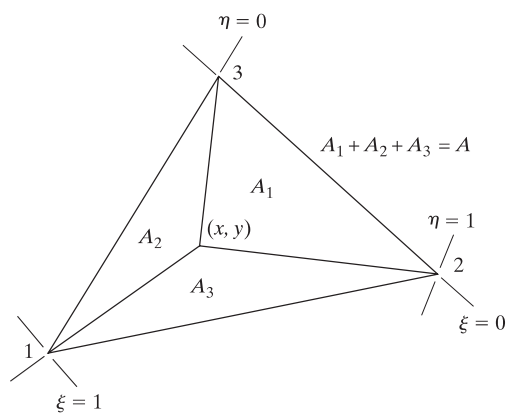
$$N_1 = \xi \quad N_2 = \eta \quad N_3 = 1 - \xi - \eta \quad (5.10)$$

όπου ξ και η είναι φυσικές συντεταγμένες (Σχ. 5.4). Σε αυτό το σημείο, πρέπει να σημειώσουμε την ομοιότητα με το στοιχείο μίας διάστασης (Κεφάλαιο 3). Στο πρόβλημα μίας διάστασης, αντιστοιχίσαμε τις συντεταγμένες x με τις συντεταγμένες ξ και ορίσαμε τις συναρτήσεις μορφής συναρτήσει του ξ . Στην προκειμένη περίπτωση, στο πρόβλημα δύο διαστάσεων, αντιστοιχίζουμε τις συντεταγμένες x, y με τις συντεταγμένες ξ, η και ορίζουμε τις συναρτήσεις μορφής συναρτήσει των ξ και η .

Οι συναρτήσεις μορφής μπορούν να παρασταθούν φυσικά με **συντεταγμένες επιφανείας**. Ένα σημείο (x, y) ενός τριγώνου, το διαιρεί σε τρεις περιοχές A_1 , A_2 και A_3 , όπως στο Σχ. 5.5. Οι συναρτήσεις μορφής N_1 , N_2 και N_3 αναπαρίστανται με ακρίβεια από



ΣΧΗΜΑ 5.4 Συναρτήσεις μορφής



ΣΧΗΜΑ 5.5 Συντεταγμένες επιφανείας

$$N_1 = \frac{A_1}{A} \quad N_2 = \frac{A_2}{A} \quad N_3 = \frac{A_3}{A} \quad (5.11)$$

όπου A είναι το εμβαδόν του στοιχείου. Προφανώς, έχουμε $N_1 + N_2 + N_3 = 1$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του τριγώνου.

Ισοπαραμετρική αναπαράσταση

Γράφουμε τις μετατοπίσεις εσωτερικά του στοιχείου χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις μορφής και τις κομβικές τιμές του άγνωστου πεδίου μετατόπισης. Έχουμε

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5 \\ v &= N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6 \end{aligned} \quad (5.12\alpha)$$

ή χρησιμοποιώντας την Εξ. 5.10,

$$\begin{aligned} u &= (q_1 + q_5)\xi + (q_3 + q_5)\eta + q_5 \\ v &= (q_2 - q_6)\xi + (q_4 - q_6)\eta + q_6 \end{aligned} \quad (5.12\beta)$$

Εκφράζουμε τις σχέσεις 5.12α σε μορφή μητρώου ορίζοντας ένα μητρώο συνάρτησης μορφής

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

και

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (5.14)$$

Στην περίπτωση του τριγωνικού στοιχείου, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις συντεταγμένες x , y συναρτήσει κομβικών συντεταγμένων, χρησιμοποιώντας τις ίδιες συναρτήσεις μορφής. Αυτό λέγεται **ισοπαραμετρική αναπαράσταση**. Η προσέγγιση αυτή απλοποιεί την ανάπτυξη και διατηρεί την ομοιομορφία με άλλα σύνθετα στοιχεία. Έχουμε

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{aligned} \quad (5.15\alpha)$$

ή

$$\begin{aligned} x &= (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta + x_3 \\ y &= (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta + y_3 \end{aligned} \quad (5.15\beta)$$

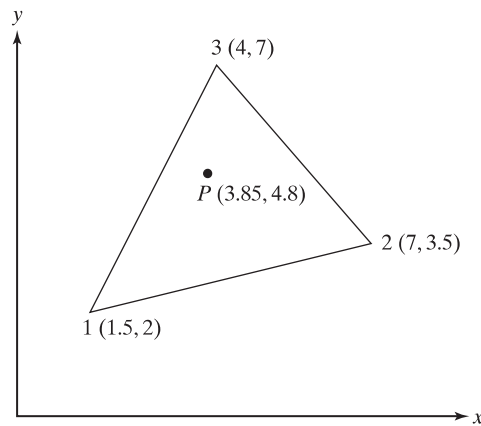
Αντικαθιστώντας $x_{ij} = x_i - x_j$ και $y_{ij} = y_i - y_j$ γράφουμε τις Εξ. 5.15β ως

$$\begin{aligned} x &= x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3 \\ y &= y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3 \end{aligned} \quad (5.15\gamma)$$

Οι εξισώσεις αυτές συσχετίζουν τις συντεταγμένες x και y με τις συντεταγμένες ξ και η . Η Εξίσωση 5.12 εκφράζει τα u και v ως συναρτήσεις των ξ και η .

Παράδειγμα 5.1

Υπολογίστε τις συναρτήσεις μορφής N_1 , N_2 και N_3 στο εσωτερικό σημείο P για το τριγωνικό στοιχείο του Σχ. Π5.1.

**ΣΧΗΜΑ Π5.1** Παραδείγματα 5.1 και 5.2**Λύση**

Χρησιμοποιώντας την ισοπαραμετρική αναπαράσταση (Εξ. 5.15), έχουμε

$$3.85 = 1.5N_1 + 7N_2 + 4N_3 = -2.5\xi + 3\eta + 4$$

$$4.8 = 2N_1 + 3.5N_2 + 7N_3 = -5\xi - 3.5\eta + 7$$

Αναδιατάσσουμε τις δύο εξισώσεις στη μορφή

$$2.5\xi - 3\eta = 0.15$$

$$5\xi + 3.5\eta = 2.2$$

Λύνοντας τις εξισώσεις, λαμβάνουμε $\xi = 0.3$ και $\eta = 0.2$ από όπου συνεπάγεται

$$N_1 = 0.3 \quad N_2 = 0.2 \quad N_3 = 0.5$$

Για να υπολογίσουμε τις παραμορφώσεις, πρέπει να λάβουμε μερικές παραγώγους των u και v ως προς x και y . Από τις Εξ. 5.12 και 5.15 βλέπουμε ότι τα u , v και x , y είναι συναρτήσεις των ξ και η . Δηλαδή, $u = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Παρόμοια, $v = v(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγώγισης για μερικές παραγώγους του u , έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Τις οποίες μπορούμε να γράψουμε σε μορφή μητρώων ως

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

όπου το τετραγωνικό μητρώο (2×2) ορίζεται ως η *Ιακωβιανή* του μετασχηματισμού, $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Στο παράρτημα παραθέτουμε μερικές ακόμα ιδιότητες της Ιακωβιανής. Λαμβάνοντας την παράγωγο των x και y έχουμε

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Επίσης, από την Εξ. 5.16,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

όπου $\mathbf{J}^{-1}$ είναι το αντίστροφο της Ιακωβιανής $\mathbf{J}$ και δίνεται από

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\det \mathbf{J} = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} \quad (5.21)$$

Από το εμβαδόν του τριγώνου, είναι προφανές ότι το μέγεθος της ορίζουσας, $\det \mathbf{J}$ είναι το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου. Εάν τα σημεία 1, 2 και 3 είναι διατεταγμένα αριστερόστροφα, η $\det \mathbf{J}$ έχει θετικό πρόσημο. Έχουμε

$$A = \frac{1}{2} |\det \mathbf{J}| \quad (5.22)$$

όπου το $||$ αναπαριστά το μέγεθος. Οι περισσότεροι κώδικες υπολογιστών χρησιμοποιούν αριστερόστροφη διάταξη κόμβων, και την ορίζουσα $\det \mathbf{J}$ για τον υπολογισμό του εμβαδού.

Παράδειγμα 5.2

Ορίσετε την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού $\mathbf{J}$ για το τριγωνικό στοιχείου του Σχ. Π5.1.

Λύση

Έχουμε

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & -5.0 \\ 3.0 & -3.5 \end{bmatrix}$$

Άρα, $\det \mathbf{J} = 23.75$ μονάδες. Αυτό είναι το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου. Εάν οι κόμβοι 1, 2 και 3 είναι δεξιόστροφα διατεταγμένοι, τότε η ορίζουσα $\det \mathbf{J}$ είναι αρνητική. ■

Από τις Εξ. 5.19 και 5.20 προκύπτει ότι

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (5.23\alpha)$$

Αντικαθιστώντας το u με τη μετατόπιση v , λαμβάνουμε την παρόμοια έκφραση

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23} \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial v}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (5.23\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης (5.5) και τις Εξ. 5.12β και 5.23

$$= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}(q_1 - q_5) - y_{13}(q_3 - q_5) \\ -x_{23}(q_2 - q_6) + x_{13}(q_4 - q_6) \\ -x_{23}(q_1 - q_5) + x_{13}(q_3 - q_5) + y_{23}(q_2 - q_6) - y_{13}(q_4 - q_6) \end{pmatrix} \quad (5.24\alpha)$$

Από τον ορισμό των x_{ij} και y_{ij} μπορούμε να γράψουμε $y_{31} = y_{13}$ και $y_{12} = y_{13} - y_{23}$ κ.λπ. Γράφουμε την προηγούμενη εξίσωση στη μορφή

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}q_1 + y_{31}q_3 + y_{12}q_5 \\ x_{32}q_2 + x_{13}q_4 + x_{21}q_6 \\ x_{32}q_1 + y_{23}q_2 + x_{13}q_3 + y_{31}q_4 + x_{21}q_5 + y_{12}q_6 \end{pmatrix} \quad (5.24\beta)$$

Γράφουμε την εξίσωση σε μορφή μητρώου ως

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (5.25)$$

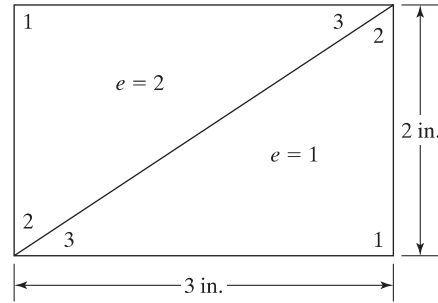
όπου $\mathbf{B}$ είναι ένα μητρώο (3×6) στοιχείου παραμόρφωσης-μετατόπισης, το οποίο συνδέει τις τρεις παραμορφώσεις με τις έξι κομβικές μετατοπίσεις και δίνεται από το

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Σημειώνεται ότι όλα τα στοιχεία του μητρώου $\mathbf{B}$ είναι σταθερές και εκφράζονται συναρτήσει των κομβικών συντεταγμένων.

Παράδειγμα 5.3

Βρείτε τα μητρώα $\mathbf{B}^e$ παραμόρφωσης-κομβικών μετατοπίσεων για τα στοιχεία του Σχ. 5.3. Χρησιμοποιήστε τους τοπικούς αριθμούς που δίνονται στις γωνίες.



ΣΧΗΜΑ Π5.3

Λύση

Έχουμε

$$\mathbf{B}^1 = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

όπου η $\det \mathbf{J}$ λαμβάνεται από $x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} = (3)(2) - (3)(0) = 6$. Χρησιμοποιώντας τους τοπικούς αριθμούς των γωνιών, μπορούμε να γράψουμε τη $\mathbf{B}^2$ χρησιμοποιώντας τη σχέση ως

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

■

Προσέγγιση δυναμικής ενέργειας

Η δυναμική ενέργεια Π του συστήματος δίνεται από την

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} t dA - \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA - \int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T} t d\ell - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (5.27)$$

Στον τελευταίο όρο της Εξ. 5.27, το i υποδεικνύει το σημείο εφαρμογής του φορτίου σημείου $\mathbf{P}_i$ και $\mathbf{P}_i = [P_x, P_y]^T$. Η άθροιση ως προς i δίνει τη δυναμική ενέργεια, η οποία οφείλεται στα φορτία όλων των σημείων.

Αν χρησιμοποιήσουμε τον τριγωνισμό του Σχ. 5.9, μπορούμε να γράψουμε την ολική δυναμική ενέργεια στη μορφή

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2} \int_e \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} t dA - \sum_e \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA - \int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T} t d\ell - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (5.28\alpha)$$

ή

$$\Pi = \sum_e U_e - \sum_e \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA - \int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T} t d\ell - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (5.28\beta)$$

όπου $U_e = \frac{1}{2} \int_e \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} t dA$ είναι η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου.

Ακαμψία στοιχείου

Αντικαθιστούμε τώρα την παραμόρφωση, από τη σχέση παραμόρφωσης-μετατόπισης στοιχείου της Εξ. 5.25, στην Εξίσωση 5.28β της ενέργειας παραμόρφωσης στοιχείου U_e , για να λάβουμε

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_e \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} t_e dA \\ &= \frac{1}{2} \int_e \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} t_e dA \end{aligned} \quad (5.29a)$$

Θεωρώντας το πάχος του στοιχείου t_e ως σταθερό και λαμβάνοντας υπόψη ότι όλοι οι όροι στα μητρώα $\mathbf{D}$ και $\mathbf{B}$ είναι σταθεροί, έχουμε

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t_e \left(\int_e dA \right) \mathbf{q} \quad (5.29\beta)$$

Τώρα, $\int_e dA = A_e$, όπου A_e είναι το εμβαδόν του στοιχείου. Συνεπώς,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T t_e A_e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (5.29\gamma)$$

ή

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}^e \mathbf{q} \quad (5.29\delta)$$

όπου $\mathbf{k}^e$ είναι το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου το οποίο δίνεται από

$$\mathbf{k}^e = t_e A_e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (5.30)$$

Στην περίπτωση επίπεδης τάσης ή επίπεδης παραμόρφωσης, μπορούμε να υπολογίσουμε το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου λαμβάνοντας το κατάλληλο μητρώο ιδιοτήτων υλικού $\mathbf{D}$ που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 1, και εκτελώντας τον προηγούμενο πολλαπλασιασμό με υπολογιστή. Σημειώνουμε ότι, επειδή το $\mathbf{D}$ είναι συμμετρικό, και το μητρώο $\mathbf{k}^e$ είναι συμμετρικό. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη συνδεσμολογία στοιχείων του Πίνακα 5.1, προσθέτουμε τις τιμές ακαμψίας στοιχείου του $\mathbf{k}^e$ στις αντίστοιχες ολικές θέσεις του μητρώου συνολικής ακαμψίας $\mathbf{K}$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} U &= \sum_e \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}^e \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Το μητρώο συνολικής ακαμψίας $\mathbf{K}$ είναι συμμετρικό και ζωνικό ή αραιό. Η τιμή ακαμψίας K_{ij} είναι μηδέν όταν οι βαθμοί ελευθερίας i και j δεν συνδέονται δια μέσου ενός στοιχείου. Εάν οι βαθμοί ελευθερίας i και j συνδέονται μέσω ενός ή περισσότερων στοιχείων, συσσωρεύονται τιμές ακαμψίας από αυτά τα στοιχεία. Για τους ολικούς βαθμούς ελευθερίας που αριθμούνται όπως στο Σχ. 5.2, το εύρος ζώνης συσχετίζεται με τη μέγιστη διαφορά των αριθμών κόμβων του στοιχείου, για όλα τα στοιχεία. Εάν i_1 , i_2 και i_3 είναι αριθμοί κόμβων του στοιχείου e , η μέγιστη διαφορά αριθμού κόμβων του στοιχείου δίνεται από τον τύπο

$$m_e = \max(|i_1 - i_2|, |i_2 - i_3|, |i_3 - i_1|) \quad (5.32a)$$

Το μισό εύρους της ζώνης δίνεται από

$$\text{NBW} = 2 \left(\max_{1 \leq e \leq \text{NE}} (m_e) + 1 \right) \quad (5.32\beta)$$

όπου ΝΕ είναι ο αριθμός των στοιχείων και 2 είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας ανά κόμβο.

Το μητρώο συνολικής ακαμψίας $\mathbf{K}$ είναι σε μια μορφή όπου όλοι οι βαθμοί ελευθερίας $\mathbf{Q}$ είναι ελεύθεροι. Για να λάβουμε υπόψη τις συνοριακές συνθήκες, πρέπει να το τροποποιήσουμε.

Όροι δύναμης

Ας δούμε πρώτα τον **όρο δύναμης σώματος**

$$\int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA$$

που εμφανίζεται στην ολική δυναμική ενέργεια στην Εξ. 5.28β. Έχουμε

$$\int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA = t_e \int_e (u f_x + v f_y) dA$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις παρεμβολής της Εξίσωσης 5.12α, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA &= q_1 \left(t_e f_x \int_e N_1 dA \right) + q_2 \left(t_e f_y \int_e N_1 dA \right) \\ &+ q_3 \left(t_e f_x \int_e N_2 dA \right) + q_4 \left(t_e f_y \int_e N_2 dA \right) \\ &+ q_5 \left(t_e f_x \int_e N_3 dA \right) + q_6 \left(t_e f_y \int_e N_3 dA \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Από τον ορισμό των συναρτήσεων μορφής σε ένα τρίγωνο, τις οποίες βλέπουμε στο Σχ. 5.4, το

$$\int_e N_1 dA$$

αναπαριστά τον όγκο ενός τετραέδρου με εμβαδόν βάσης A_e και ύψος ακμής 1 (αδιάστατο). Ο όγκος αυτού του τετραέδρου δίνεται από τον τύπο $1/3 \times \text{Εμβαδόν βάσης} \times \text{Ύψος}$ (Σχ. 5.6) και είναι

$$\int_e N_i dA = \frac{1}{3} A_e \quad (5.34)$$

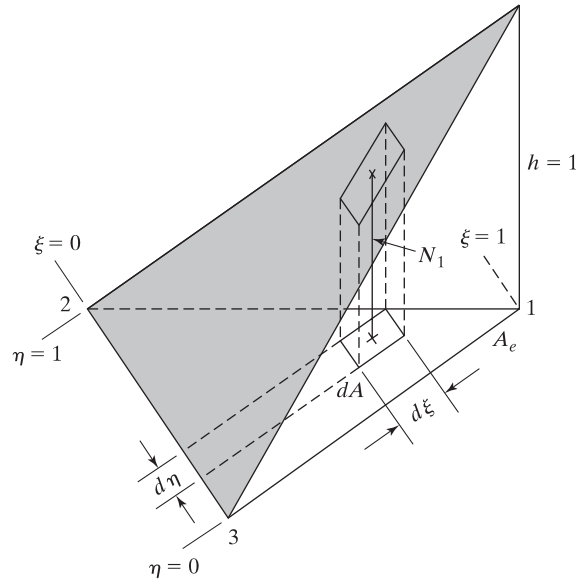
Παρόμοια, $\int_e N_2 dA = \int_e N_3 dA = \frac{1}{3} A_e$. Μπορούμε τώρα να γράψουμε την Εξ. 5.33 στη μορφή

$$\int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA = \mathbf{q}^T \mathbf{f}^e \quad (5.35)$$

όπου $\mathbf{f}^e$ είναι το διάνυσμα της δύναμης σώματος του στοιχείου και δίνεται από

$$\mathbf{f}^e = \frac{t_e A_e}{3} [f_x, f_y, f_x, f_y, f_x, f_y]^T \quad (5.36)$$

Αυτές οι κομβικές δυνάμεις του στοιχείου συνεισφέρουν στο διάνυσμα ολικού φορτίου $\mathbf{F}$. Πρέπει, να χρησιμοποιήσουμε πάλι τη συνδεσμολογία του Πίνακα 5.1 για να προσθέσουμε το $\mathbf{f}^e$ στο διάνυσμα ολικής δύναμης $\mathbf{F}$. Το διάνυσμα $\mathbf{f}^e$ είναι



$$\int_e N_1 dA = \frac{1}{3} \cdot A_e h = \frac{1}{3} \cdot A_e$$

$$\text{ή } \int_e N_1 dA = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} N_1 \det J d\eta d\xi = 2A_e \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi d\eta d\xi = \frac{1}{3} \cdot A_e$$

ΣΧΗΜΑ 5.6 Ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μορφής

διαστάσεων (6×1) , όπου $\mathbf{F}$ είναι $(N \times 1)$. Αυτή η διαδικασία σύνθεσης συζητείται στα Κεφάλαια 3 και 4. Την ορίζουμε συμβολικά,

$$\mathbf{F} \longleftarrow \sum_e \mathbf{f}^e \quad (5.37)$$

Η **δύναμη εφελκυσμού** είναι ένα κατανεμημένο φορτίο που ασκείται στην επιφάνεια του σώματος. Μια τέτοια δύναμη ενεργεί στις ακμές που συνδέουν συνοριακούς κόμβους. Μια δύναμη εφελκυσμού η οποία ενεργεί στην ακμή ενός στοιχείου συνεισφέρει στο διάνυσμα ολικού φορτίου $\mathbf{F}$. Μπορούμε να προσδιορίσουμε αυτή τη συνεισφορά, αν θεωρήσουμε τον όρο της εφελκυστικής δύναμης $\int \mathbf{u}^T \mathbf{T} d\ell$. Έστω η ακμή ℓ_{1-2} στην οποία ενεργεί εφελκυσμός T_x, T_y σε μονάδες δύναμης ανά μονάδα εμβαδού επιφανείας, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.7α. Έχουμε

$$\int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T} d\ell = \int_{\ell_{1-2}} (uT_x + vT_y) t d\ell \quad (5.38)$$

Από τις σχέσεις παρεμβολής οι οποίες χρησιμοποιούν τις συναρτήσεις μορφής παίρνουμε

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 \\ v &= N_1 q_2 + N_2 q_4 \\ T_x &= N_1 T_{x1} + N_2 T_{x2} \\ T_y &= N_1 T_{y1} + N_2 T_{y2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

ΤΡΙΤΗ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Tirupathi R. Chandrupatla Ashok D. Belegundu

Η τρίτη έκδοση της *Εισαγωγής στα Πεπερασμένα Στοιχεία για Μηχανικούς* προσφέρει μια ολοκληρωμένη προσέγγιση στις μεθοδολογίες των πεπερασμένων στοιχείων, με ασκήσεις και παραδείγματα εφαρμογών μηχανικού. Τα βήματα τα οποία χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη της θεωρίας εφαρμόζονται σε πλήρη, αυτοδύναμα προγράμματα Η/Υ, ενώ παραμένουν οι στρατηγικές και οι φιλοσοφίες των προηγούμενων εκδόσεων. Το βιβλίο αποτελεί βασικό εκπαιδευτικό βοήθημα για τελειόφοιτους πτυχιακών προγραμμάτων, πρωτοετείς σπουδαστές μεταπτυχιακών προγραμμάτων, αλλά και πολύτιμη πηγή μάθησης για κάθε μηχανικό.

Σημαντικά χαρακτηριστικά:

- Πάνω από 250 σχήματα.
- Έμφαση στη μορφοποίηση και τη μοντελοποίηση προβλημάτων σε κάθε κεφάλαιο.
- Πρακτικά παραδείγματα και προβλήματα.
- Εξέταση των αρχών προεπεξεργασίας και μετεπεξεργασίας στο τελευταίο κεφάλαιο.

Νέα στοιχεία της 3ης έκδοσης:

Περισσότερα προγράμματα και πηγαίος κώδικας στο συνοδευτικό CD



Περιλαμβάνονται πλήρη και αυτοδύναμα προγράμματα Η/Υ με πηγαίο κώδικα σε Visual Basic, Visual Basic του Excel, MATLAB, QUICKBASIC, FORTRAN και C.

Ο **Tirupathi R. Chandrupatla** είναι καθηγητής και διευθυντής προγράμματος στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Rowan University, Glassboro, New Jersey. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα περιλαμβάνουν ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, σχεδίαση, βιομηχανική παραγωγή και βελτιστοποίηση.

Ο **Ashok D. Belegundu** είναι καθηγητής στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του State University, University Park, Pennsylvania. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα περιλαμβάνουν πεπερασμένα στοιχεία, σχεδίαση μηχανών και τεχνικές βελτιστοποίησης.

Επισκεφθείτε μας στο Internet:
<http://www.klidarithmos.gr>



ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ

Δομοκού 4, Στάθμος Λαρίσης, 10440 Αθήνα,
Τηλ. 210-5237635

ISBN 960-209-920-8



9 789602 099209