ΚΩΣΤΑΣ Γ. ΣΑΛΑΡΗΣ • ΑΝΔΡΕΑΣ Ν. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΠΑΤΑΚΗΣ

Μαθηματικά για διαγωνισμούς

Ε΄ & ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr
ΒΙΒΛΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ

Κώστας Γ. Σάλαρης, Ανδρέας Ν. Τριανταφύλλου

Μαθηματικά
για διαγωνισμούς

Ε΄ & ΣΤ΄ Δημοτικού

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Θέση υπογραφής δικαιούχου δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας,
εφόσον η υπογραφή προβλέπεται από τη σύμβαση

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν. 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής αδείας του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Εκδόσεις Πατάκη – Εκπαίδευση
Κωνσταντίνος Σάλαρης, Ανδρέας Τριανταφύλλου, *Μαθηματικά για διαγωνισμούς – Ε΄ & ΣΤ΄ Δημοτικού*
Διορθώσεις: Νάντια Κουτσουρούμπα
Υπεύθυνος έκδοσης: Νίκος Κύρος
Επιμέλεια: Γεωργία Ευθυμίου
Dtp: Γιώργος Χατζησπύρος
Φιλμ – μοντάζ: Μαρία Ποινιού-Ρένεση
Copyright© Σ. Πατάκης Α.Ε.Ε.Δ.Ε. (Εκδόσεις Πατάκη), κληρονόμοι Κωνσταντίνου Σάλαρη και Ανδρέας Τριανταφύλλου, Αθήνα, 2019
Πρώτη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Φεβρουάριος 2019
Κ.Ε.Τ. Γ280 – Κ.Ε.Π. 13/19
ISBN 978-960-16-8222-8

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665, ΦΑΞ: 210.36.50.069
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078
ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ ΒΟΡΕΙΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ: ΚΟΡΥΤΣΑΣ (ΤΕΡΜΑ ΠΟΝΤΟΥ – ΠΕΡΙΟΧΗ Β΄ ΚΤΕΟ),
570 09 ΚΑΛΟΧΩΡΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ, Τ.Θ. 1213, ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15, ΦΑΞ: 2310.70.63.55
Web site: http://www.patakis.gr • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

Περιεχομενα

Πρόλογος 7
Ένα συνοπτικό σημείωμα για τον γονιό και τον δάσκαλο 9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

1.1 Φυσικοί αριθμοί 21
1.1.1 Ορισμοί 21
1.1.2 Απαγγελία και γραφή φυσικών αριθμών 27
1.1.3 Μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα 28
1.1.4 Μια σύντομη αναδρομή στον τρόπο γραφής των αριθμών και στα αριθμητικά συστήματα 30
1.1.5 Διαιρετότητα 33
1.1.6 Ιδιότητες διαιρετότητας 34
1.1.7 Κριτήρια διαιρετότητας 35
1.1.8 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) 40
1.1.9 Εύρεση ΜΚΔ 41
1.1.10 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) 42
1.1.11 Εύρεση ΕΚΠ 42
1.1.12 Α. Ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων 43
1.1.12 Β. Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ 45
1.2 Δεκαδικοί αριθμοί 46
1.2.1 Στρογγυλοποίηση φυσικών και δεκαδικών αριθμών 47
1.2.2 Σύγκριση φυσικών και δεκαδικών αριθμών 48
1.2.3 Πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών 49
1.2.4 Μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα 51
1.2.5 Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών αριθμών 52
1.2.6 Πολλαπλασιασμοί με το 10, 100, 1.000, ... 54
1.2.7 Πολλαπλασιασμοί με το 0,1, 0,01, 0,001, ... 54
1.2.8 Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών 56
1.2.9 Πράξεις με μεικτές αριθμητικές παραστάσεις 59
1.3 Κλάσματα – Μεικτοί αριθμοί 62
1.3.1 Μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα 63
1.3.2 Ιδιότητες κλασμάτων 65
1.3.3 Πράξεις μεταξύ κλασμάτων 66
1.3.4 Σύγκριση μεταξύ δύο κλασμάτων 72
1.4 Δυνάμεις 75
1.5 Μεταβλητές 78
1.6 Εξισώσεις 79
1.6.1 Μέθοδος για να λύνουμε εξισώσεις στις οποίες έχουμε όλες τις πράξεις 81

1.7 Λόγοι – Ποσά – Αναλογίες – Στατιστική 84
1.7.1 Αναλογίες 85
1.7.2 Ανάλογα ποσά 89
1.7.3 Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά 92
1.7.4 Η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα 95
1.7.5 Η απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά 98
1.7.6 Η απλή μέθοδος των τριών στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά 100
1.8 Ποσοστά – Τόκοι – Επιτόκια 104
1.8.1 Ποσοστά 104
1.9 Ραβδογράμματα 110
1.10 Πίνακας κατανομής συχνοτήτων 113
1.11 Μέσος όρος (μέση τιμή) 115
1.12 Μονάδες μέτρησης 117
1.12.1 Μονάδες μέτρησης μήκους 117
1.12.2 Μονάδες μάζας 121
1.12.3 Μονάδες μέτρησης χρόνου 124
1.12.4 Μονάδες μέτρησης χρήματος – Ευρώ 128
1.13 Μοτίβα 130
1.13.1 Γεωμετρικά μοτίβα 130
1.13.2 Αριθμητικά μοτίβα 131
1.14 Επίλυση σύνθετων προβλημάτων 135

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

2.1 Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας 147
2.2 Γωνίες 149
2.3 Μονάδες μέτρησης γωνιών και τόξων 152
2.4 Εμβαδόν – Μονάδες μέτρησης 153
2.5 Παραλληλόγραμμο – Εμβαδόν παραλληλογράμμου 155
2.6 Τρίγωνο – Εμβαδόν τριγώνου 157
2.7 Τραπέζιο – Εμβαδόν τραπεζίου 161
2.8 Κύκλος 167
2.9 Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο 169
2.10 Κύλινδρος 172
2.11 Μονάδες μέτρησης όγκου 174
2.12 Όγκος στερεών 176
2.13 Κλίμακες 180

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ 185

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ 203

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ 227

ΛΥΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ 253

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ 275

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄: ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

Θέματα Ε΄ Δημοτικού 295
1ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2007 295
2ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2008 298
3ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2009 301
4ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2010 304
5ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2011 307
6ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2012 310
7ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2013 313
8ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2014 315
9ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2015 317
9ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – Δωδεκάνησα – 2015. 319
10ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2016 321
10ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – Δωδεκάνησα – 2016. 323
11ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2017 325
12ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2018 327
Ενδεικτικές λύσεις των θεμάτων Ε΄ Δημοτικού 330
1ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2007 330
2ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2008 332
3ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2009 334
4ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2010 336
5ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2011 338
6ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2012 340
7ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2013 342
8ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2014 344
9ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2015 346
9ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – Δωδεκάνησα – 2015. 348
10ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2016 350
10ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – Δωδεκάνησα – 2016. 351
11ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2017 353
12ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2018 355
Θέματα ΣΤ΄ Δημοτικού. 358
1ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2007 358
2ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2008 360
3ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2009 363
4ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2010 366
5ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2011 369
6ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2012 372
7ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2013 375
8ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2014 377

9ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2015 380
9ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – Δωδεκάνησα – 2015 383
10ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2016 385
10ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – Δωδεκάνησα – 2015 387
11ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2017 389
12ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2018 392
Ενδεικτικές λύσεις των θεμάτων ΣΤ΄ Δημοτικού 395
1ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2007 395
2ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2008 396
3ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2009 397
4ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2010 399
5ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2011 401
6ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2012 404
7ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2013 406
8ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2014 408
9ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2015 410
9ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – Δωδεκάνησα – 2015 412
10ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2016 414
10ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – Δωδεκάνησα – 2016 416
11ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2017 418
12ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά» – 2018 420

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄: ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ

Θέματα Μαθηματικών για την εισαγωγή στα Πρότυπα Γυμνάσια 425
2013 425
2014 427
2015 429
2016 432
2017 435
2018 438
Ενδεικτικές λύσεις των θεμάτων Μαθηματικών για την εισαγωγή στα Πρότυπα Γυμνάσια . . 442
2013 442
2014 443
2015 444
2016 444
2017 445
2018 446

Βιβλιογραφία 447

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα τελευταία σαράντα χρόνια η διδασκαλία των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στηρίζεται στη δασκαλοκεντρική διδασκαλία με επεξήγηση από έδρας των μαθηματικών εννοιών από τον δάσκαλο και την ενασχόληση των μαθητών με την επίλυση ασκήσεων και πάλι ασκήσεων. Ίσως η κατάσταση αυτή έχει προκύψει από τις απαιτήσεις των εισαγωγικών εξετάσεων στα Ανώτερα και Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα, που είναι κατεξοχήν η επίλυση ασκήσεων με παρεμβαλλόμενα θέματα θεωρίας από τα σχολικά εγχειρίδια. Οι ασκήσεις, όπως λέει και η ετυμολογία της λέξης, έχουν ως σκοπό την εξάσκηση των μαθητών. Αυτή όμως η εξάσκηση θα πρέπει να οδηγεί σε κάτι δημιουργικό. Η δημιουργία στα Μαθηματικά εμπεδώνεται μέσω της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, είτε αυτά αφορούν προβλήματα της καθημερινής ζωής είτε ακόμα και επιστημονικά προβλήματα. Η Ένωση Δασκάλων των Μαθηματικών στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής διακηρύσσει εδώ και 20 χρόνια ότι «Η λύση προβλημάτων πρέπει να είναι στο κέντρο των σχολικών Μαθηματικών».

Η σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών καθοδηγεί τους δασκάλους προς την κατεύθυνση της επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων. Πιστεύεται μάλιστα από τη συντριπτική μερίδα των επιστημόνων που ασχολούνται με τη διδακτική ότι μέσω της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων διδάσκεται ο μαθητής τις βασικές μαθηματικές έννοιες, καταστρώνει στρατηγικές και συνδέει τις μαθηματικές γνώσεις του με την πραγματικότητα της καθημερινής ζωής.

Συμμεριζόμενοι την παραπάνω άποψη, παραδίνουμε στους μαθητές και στους δασκάλους τους ένα βιβλίο που προσπαθεί να διδάξει Μαθηματικά μέσα από την επίλυση προβλημάτων σε συνδυασμό με την απαραίτητη θεωρία σε συνοπτική μορφή και την παράθεση πληθώρας παραδειγμάτων και λυμένων ασκήσεων.

Είναι γεγονός ότι με τα νέα βιβλία Μαθηματικών που δόθηκαν στους μαθητές του Δημοτικού και του Γυμνασίου γίνεται μια προσπάθεια να αλλάξει το σύστημα διδασκαλίας στα Μαθηματικά με την εισαγωγή δραστηριοτήτων και προβλημάτων που στηρίζονται σε διαθεματικές εφαρμογές. Τα αποτελέσματα μέχρι σήμερα, όπως παραδέχεται η εκπαιδευτική κοινότητα που διδάσκει τα Μαθηματικά, είναι πενιχρά. Ας ελπίσουμε ότι τα επόμενα χρόνια, καθώς θα εξοικειώνονται οι δάσκαλοι με τη νέα ύλη και θα καλύπτουν με προφορικό λόγο τις αδυναμίες του βιβλίου, θα δούμε περισσότερα θετικά αποτελέσματα.

Πιστεύουμε ότι το παρόν βιβλίο, πέρα από τη βοήθεια που προσφέρει στους μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του Δημοτικού, στους μαθητές της Α΄ τάξης του Γυμνασίου και στους δασκάλους και στους καθηγητές τους, κατευθύνει τους αναγνώστες σε δεξιότητες σκέψης, με τις οποίες κατεξοχήν ασχολούνται τα Μαθηματικά, όπως:

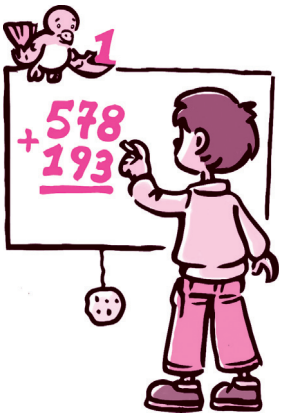
- η αριθμητική αντίληψη
- η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με απλούς υπολογισμούς
- η αναλυτική σκέψη και η κριτική ικανότητα
- ο επαγωγικός και διαγραμματικός συλλογισμός
- η ικανότητα κατηγοριοποίησης, ταξινόμησης και επεξεργασίας πληροφοριών
- η ταχύτητα και η ακρίβεια αντίληψης, η παρατηρητικότητα, η αντίληψη του χώρου κτλ.

Εδώ και επτά χρόνια η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (ΕΜΕ) διοργανώνει τον μαθητικό διαγωνισμό «Παιχνίδι και Μαθηματικά», στον οποίο παίρνουν μέρος χιλιάδες μαθητές της Ε΄ και της ΣΤ΄ τάξης των Δημοτικών από όλες τις περιοχές της Ελλάδας. Ο αριθμός των μαθητών που έλαβαν μέρος στον διαγωνισμό το έτος 2013 ξεπέρασε τις 55.000. Ο διαγωνισμός αυτός εντάσσεται στον κύκλο των μαθηματικών διαγωνισμών που ακολουθούν σε Γυμνάσιο και Λύκειο και οδηγούν τους μαθητές στους διεθνείς διαγωνισμούς των Μαθηματικών Ολυμπιάδων. Η ύλη που περιέχεται στο παρόν βιβλίο και η επιλογή των ασκήσεων έγινε με τέτοιον τρόπο, ώστε να προετοιμάζεται ο μαθητής της Ε΄ και της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού κατάλληλα για την επιτυχή συμμετοχή του στον διαγωνισμό «Παιχνίδι και Μαθηματικά». Πέραν των διαγωνισμών της ΕΜΕ, το βιβλίο θα φανεί χρήσιμο και στους μαθητές που συμμετέχουν και σε άλλους μαθητικούς διαγωνισμούς, όπως ο διαγωνισμός «Καγκουρό». Θεωρούμε ότι το βιβλίο αυτό θα αποτελέσει ουσιαστικό βοήθημα των μαθητών που θα λάβουν μέρος στις εξετάσεις για την εισαγωγή τους στα Πρότυπα Γυμνάσια.

1.1 ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Φυσικοί αριθμοί είναι οι 0, 1, 2, 3, …, 8, 9, …, 100, 101, …, 500, …



Κάθε φυσικός αριθμός δημιουργείται από τον προηγούμενό του, με πρόσθεση σε αυτόν του αριθμού 1. Εξαίρεση αποτελεί το 0, που δεν έχει προηγούμενο αριθμό. Για παράδειγμα, ο αριθμός 2 δημιουργείται από τον προηγούμενό του 1, με πρόσθεση σε αυτόν του 1, και ο αριθμός 9 δημιουργείται προσθέτοντας στον προηγούμενό του 8 τον 1. Έτσι, αν βρούμε έναν φυσικό αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο, και προσθέσουμε σε αυτόν τον 1, θα δημιουργήσουμε έναν νέο φυσικό αριθμό που είναι μεγαλύτερός του. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ακόμα ένας μεγαλύτερος και από αυτόν ένας μεγαλύτερος κ.ο.κ. Επομένως κατανοούμε ότι οι φυσικοί αριθμοί «δεν τελειώνουν ποτέ», έχουν δηλαδή άπειρο πλήθος ή είναι άπειροι.

Για να γράψουμε έναν φυσικό αριθμό, χρησιμοποιούμε τα δέκα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9, τα οποία και αποκαλούμε ψηφία του δεκαδικού συστήματος ή ψηφία του αριθμητικού συστήματος που έχει βάση το 10. Ανάλογα με το πλήθος των ψηφίων που έχει ο αριθμός που δημιουργείται βάζοντας το ένα ψηφίο δίπλα στο άλλο, λέγεται αντίστοιχα μονοψήφιος, διψήφιος, τριψήφιος, ..., δεκαψήφιος κτλ.

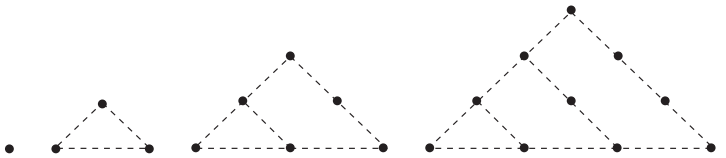
Διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που ο ένας διαφέρει από τον προηγούμενό του κατά μία μονάδα, π.χ. 5, 6, 7, 8, …

Ακολουθούν οι ορισμοί που αφορούν φυσικούς αριθμούς:

- **Άρτιοι (ζυγοί)** (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, …) λέγονται οι αριθμοί που το τελευταίο τους ψηφίο είναι 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8. Παραδείγματα άρτιων (ζυγών) αριθμών είναι ο 12.154 και ο 1.250.
- **Περιττοί (μονοί)** (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …) λέγονται οι αριθμοί που το τελευταίο τους ψηφίο είναι 1 ή 3 ή 5 ή 7 ή 9. Παραδείγματα περιττών (μονών) αριθμών είναι ο 33 και ο 15.321.
- **Παλίνδρομοι** ή **καρκινικοί** λέγονται οι αριθμοί που διαβάζονται το ίδιο από αριστερά προς τα δεξιά και από δεξιά προς τα αριστερά. Παραδείγματα παλίνδρομων αριθμών είναι οι 22, 121, 2.332, 1.578.751. Όλοι οι μονοψήφιοι αριθμοί, δηλαδή οι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, είναι παλίνδρομοι.
- **Πρώτοι** λέγονται οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι του 1 και έχουν μοναδικούς διαιρέτες τον εαυτό τους και τη μονάδα (αριθμό 1). Ο φυσικός αριθμός που έχει τουλάχιστον τρεις διαιρέτες ονομάζεται σύνθετος. Ο φυσικός αριθμός 2 είναι πρώτος, διότι έχει μόνο δύο διαιρέτες, τον ίδιο τον αριθμό, δηλαδή τον 2, και τη μονάδα, δηλαδή τον 1. Πρώτος είναι και ο αριθμός 3, καθώς και ο 17 για τον ίδιο λόγο. Αντίθετα, ο φυσικός αριθμός 4 είναι σύνθετος, καθώς, πέρα από τον ίδιο τον αριθμό, τον 4, και τη μονάδα, έχει διαιρέτη και τον αριθμό 2. Οι αριθμοί 0 και 1 δεν είναι ούτε πρώτοι ούτε σύνθετοι.
- **Τέλειοι** λέγονται οι αριθμοί που το διπλάσιό τους είναι ίσο με το άθροισμα των διαιρετών τους. Ο 6 είναι τέλειος, διότι Δ (6) = 1, 2, 3, 6 και $1 + 2 + 3 + 6 = 12 (= 2 \cdot 6)$. Ο επόμενος τέλειος αριθμός είναι ο 28, διότι Δ (28) = 1, 2, 4, 7, 14, 28 και το άθροισμα των διαιρετών είναι $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 (= 2 \cdot 28)$. Ο επόμενος τέλειος αριθμός είναι ο 496.
- **Πολύγωνοι** λέγονται οι αριθμοί οι οποίοι μπορούν να παρασταθούν με τελείες που αντιστοιχούν σε κορυφές πολυγώνου (τριγώνου, τετραγώνου, πενταγώνου κ.ο.κ.). Ανάλογα με το γεωμετρικό σχήμα που παριστάνουν οι τελείες, οι αριθμοί ονομάζονται τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι κτλ.

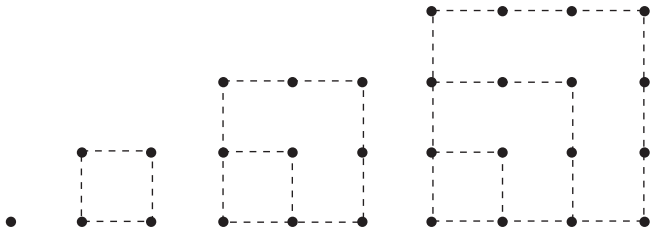
Οι Πυθαγόρειοι ήταν εκείνοι που πρώτοι συνέδεσαν τους αριθμούς με τη Γεωμετρία.

Τρίγωνοι αριθμοί



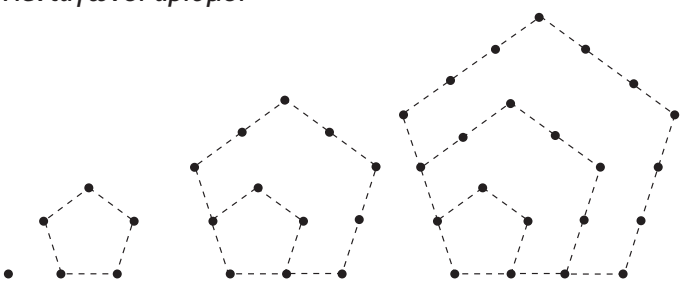
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, …

Τετράγωνοι αριθμοί



1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …

Πεντάγωνοι αριθμοί



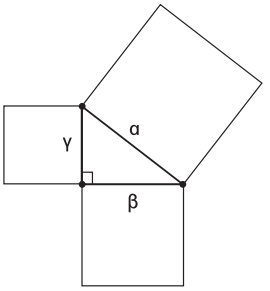
1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, …

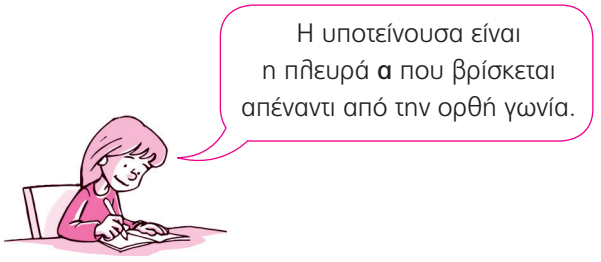
- **Πυθαγόρειες τριάδες**

  Πυθαγόρεια τριάδα ονομάζουμε κάθε τριάδα αριθμών οι οποίοι είναι μήκη των τριών πλευρών ορθογώνιου τριγώνου.

  Για τα μήκη των πλευρών ορθογώνιου τριγώνου ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα:

«Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του».





Για παράδειγμα, οι τριάδες (3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (20, 21, 29) κτλ. είναι πυθαγόρειες τριάδες.

Πυθαγόρειες τριάδες έχουν βρεθεί και σε βαβυλωνιακές πινακίδες. Τη γενική μέθοδο όμως υπολογισμού των τριάδων έδωσαν οι Πυθαγόρειοι, από τους οποίους και πήραν το όνομά τους.

Οι φυσικοί αριθμοί καθώς και όλες οι υποκατηγορίες τους, όπως άρτιοι, περιττοί, παλίνδρομοι, πρώτοι, τέλειοι και πολύγωνοι αριθμοί, ήταν γνωστοί στους αρχαίους Έλληνες από τον 5ο αιώνα πριν από τη γέννηση του Χριστού. Τα πρώτα βιβλία στα οποία αναφέρονται οι φυσικοί αριθμοί και οι ιδιότητές τους είναι γραμμένα από τον γνωστό Έλληνα μαθηματικό της αρχαιότητας Ευκλείδη. Για τους φυσικούς αριθμούς ο Γερμανός μαθηματικός του 19ου αιώνα Leopold Kronecker έλεγε ότι ήταν δώρο του Θεού στους ανθρώπους. Όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί είναι κατασκεύασμα των ανθρώπων.

Αν από τους φυσικούς αριθμούς βγάλουμε το 0, τότε οι υπόλοιποι αριθμοί ονομάζονται ακέραιοι της αριθμητικής, και μάλιστα θετικοί ακέραιοι. Όπως θα δούμε αργότερα, υπάρχουν και οι αρνητικοί ακέραιοι. Τους αρνητικούς ακεραίους θα τους συναντήσετε στο Γυμνάσιο.

Προβληματα Πληρους Αναπτυξης

Πρόβλημα 001

Ο Κώστας άρχισε να διαβάζει τη Δευτέρα ένα βιβλίο που είχε 208 σελίδες. Τη Δευτέρα διάβασε 48 σελίδες, την Τρίτη 32 σελίδες, την Τετάρτη 49 σελίδες και την Πέμπτη τέλειωσε το διάβασμα του βιβλίου. Πόσες σελίδες διάβασε την Πέμπτη;

Πρόβλημα 002

Ένα φύλλο τριφυλλιού σκέπασε τον τελευταίο αριθμό της ισότητας:

$$2.005 - 205 = 1.300 + \clubsuit$$

Ποιος αριθμός κρύβεται κάτω από το τριφύλλι;

Πρόβλημα 003

Η Κατερίνα μένει στο σπίτι με τους γονείς της, την αδελφή της, έναν σκύλο, δύο γάτες, δύο κότες και τέσσερα χρυσόψαρα. Πόσα πόδια έχουν όλοι όσοι μένουν στο σπίτι;

Πρόβλημα 004

Η Μάνια και η Κατερίνα πρέπει να λύσουν συνολικά 10 ασκήσεις Μαθηματικών. Η Μάνια πρέπει να λύσει δύο ασκήσεις περισσότερες από την Κατερίνα. Πόσες ασκήσεις πρέπει να λύσει η Κατερίνα;

Πρόβλημα 005

Ο Κώστας σε μια εργασία Μαθηματικών που του έδωσε ο δάσκαλος για το σπίτι πρέπει να προσθέσει 5 αριθμούς. Κάνει τις πράξεις στο πρόχειρο και τις μεταφέρει στο καθαρό του τετράδιο. Κατά τη μεταφορά όμως ξέχασε έναν προσθετέο και αντί για πέντε προσθετέους έγραψε τέσσερις. Έτσι, αντιγράφοντας στο καθαρό τετράδιο, έγραψε $3.281 + 2.087 + 124 + 2.989 = 9.503$. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι σωστό. Ποιος είναι ο αριθμός που ξέχασε ο Κώστας να μεταφέρει στο καθαρό τετράδιο;

Πρόβλημα 006

Ο Παύλος διάβασε 20 μικρές ιστορίες που η καθεμία είχε 10 σελίδες. Η Άννα διάβασε 10 βιβλία με 50 σελίδες το καθένα. Πόσες σελίδες περισσότερες διάβασε η Άννα από τον Παύλο;

Πρόβλημα 007

Δίνονται τα ψηφία 3, 5, 7, 2. Να κατασκευάσετε από τα ψηφία αυτά τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο αριθμό παίρνοντας το κάθε ψηφίο μία μόνο φορά και να βρείτε τη διαφορά του μικρότερου αριθμού από τον μεγαλύτερο.

Πρόβλημα 008

Ποιος από τους ακόλουθους αριθμούς έχει τα περισσότερα μηδενικά;

α) Έντεκα εκατομμύρια είκοσι χιλιάδες.
β) Δεκαπέντε εκατομμύρια έντεκα χιλιάδες εκατό.
γ) Δέκα εκατομμύρια δύο.
δ) Δεκατρία εκατομμύρια τριακόσιες χιλιάδες εξακόσια.
ε) Δέκα εκατομμύρια διακόσιες μία χιλιάδες δύο.

Πρόβλημα 009

Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς έχει στη θέση των μονάδων τις περισσότερες μονάδες;

α) Έντεκα εκατομμύρια εκατόν είκοσι χιλιάδες έντεκα.
β) Δεκαπέντε εκατομμύρια έντεκα χιλιάδες εκατό.
γ) Δέκα εκατομμύρια δώδεκα.
δ) Δεκατρία εκατομμύρια τριακόσιες χιλιάδες εξακόσια.
ε) Δέκα εκατομμύρια εκατόν μία χιλιάδες εκατόν έντεκα.

Πρόβλημα 010

Δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 603. Ποιος είναι ο μικρότερος από αυτούς;

Πρόβλημα 011

Δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 2.009. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος από αυτούς;

Πρόβλημα 012

Πέντε φίλοι ζυγίζονται ανά δύο σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς. Μετά από τις ζυγίσεις έχουμε τα εξής αποτελέσματα: 90 κιλά, 92 κιλά, 93 κιλά, 94 κιλά, 95 κιλά, 96 κιλά, 97 κιλά, 98 κιλά, 100 κιλά, 101 κιλά. Πόσα κιλά ζυγίζουν και τα πέντε αγόρια μαζί;

Πρόβλημα 013

Αν 7 μεγάλες μπάλες μαζί με 11 μικρές μπάλες ζυγίζουν 97 γραμμάρια και 9 μικρές μπάλες μαζί με 13 μεγάλες ζυγίζουν 123 γραμμάρια, πόσα γραμμάρια ζυγίζει ένα ζευγάρι από μία μικρή και μία μεγάλη μπάλα;

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Οι αρχαίοι Έλληνες ήταν οι πρώτοι που ανέδειξαν τη Γεωμετρία ως οργανωμένο κλάδο των Μαθηματικών. Ο μεγάλος μαθηματικός Ευκλείδης με την έκδοση των 13 βιβλίων με την ονομασία *Στοιχεία* θεμελίωσε τη Γεωμετρία, η οποία προς τιμήν του ονομάζεται μέχρι και σήμερα Ευκλείδεια Γεωμετρία.

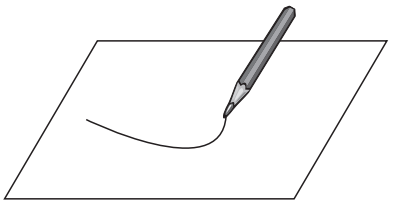
Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στηρίζεται σε έναν αριθμό προτάσεων οι οποίες είναι αυταπόδεικτες και ονομάζονται αξιώματα, αποτελούν δε τα δομικά υλικά με τα οποία χτίζεται το οικοδόμημα της Γεωμετρίας. **Τα βασικότερα αξιώματα**, όπως τα διατύπωσε ο Ευκλείδης το 300 π.Χ. περίπου, είναι:

Σημείο είναι καθετί που δεν έχει διαστάσεις.

Το σημείο δεν έχει μήκος, πλάτος και πάχος. Το συμβολίζουμε με μια τελεία και το ονομάζουμε με ένα από τα πρώτα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου Α, Β, Γ, Δ κτλ.

Γραμμή είναι αυτό που έχει μήκος χωρίς πλάτος.

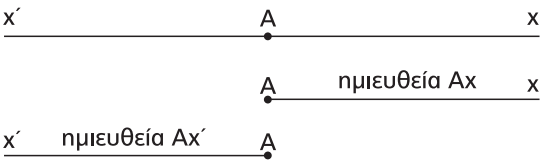
Δημιουργείται από τη συνεχή μετακίνηση ενός σημείου επάνω σε μια επιφάνεια. Η γραμμή δεν έχει τέλος και από τις δύο κατευθύνσεις. Η γραμμή έχει μόνο μία διάσταση, το μήκος.



Ευθεία γραμμή είναι εκείνη η γραμμή που κείται εξίσου προς τα σημεία της.

Μια τεντωμένη κλωστή μάς δίνει την εικόνα μιας ευθείας γραμμής μεταξύ δύο σημείων Α και Β. Από δύο σημεία περνάει μία και μόνο ευθεία. Ένα κομμάτι ευθείας που περιλαμβάνεται μεταξύ δύο σημείων Α και Β λέγεται **ευθύγραμμο τμήμα**. Το ευθύγραμμο τμήμα έχει συγκεκριμένο μήκος.

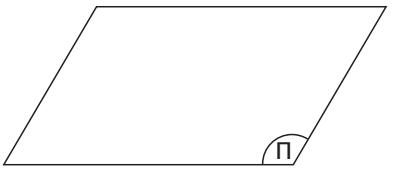
Ένα σημείο Α πάνω σε μια ευθεία x'x τη χωρίζει σε δύο κομμάτια που λέγονται ημιευθείες Ax και Ax'.



Επίπεδη επιφάνεια είναι εκείνη η επιφάνεια που κείται εξίσου προς τις ευθείες της.

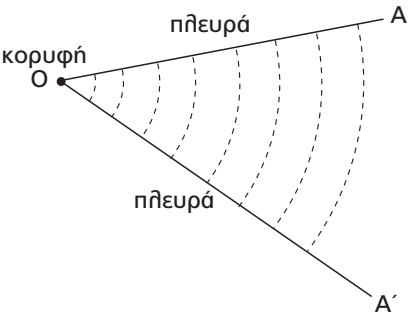
Παραδείγματα επίπεδων επιφανειών είναι η επιφάνεια ενός μαρμάρινου δαπέδου ή η επιφάνεια ενός τραπεζιού, με την επάνω του επιφάνεια να αποτελείται από φύλλο γυαλιού.

Το επίπεδο το συμβολίζουμε με το διπλανό σχήμα και αναφερόμαστε σε αυτό με το γράμμα Π.



2.2 ΓΩΝΙΕΣ

Ας πάρουμε δύο ημιευθείες σε ένα φύλλο χαρτιού, την ΟΑ και την ΟΑ', που έχουν κοινή αρχή το σημείο Ο.



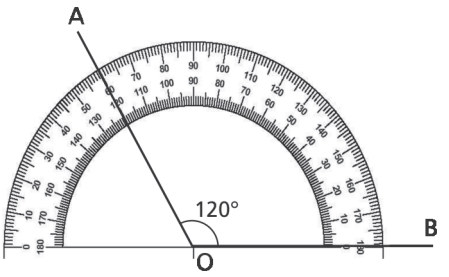
Ονομάζουμε **γωνία** $A\hat{O}A'$ το μέρος του επιπέδου που περιλαμβάνεται μεταξύ των ημιευθειών ΟΑ και ΟΑ' (χώρος των διακεκομμένων γραμμών), συμπεριλαμβανομένων και των ημιευθειών ΟΑ, ΟΑ'. Το σημείο Ο ονομάζεται *κορυφή της γωνίας*.

Δεχόμαστε ότι οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΑ' επεκτείνονται και πέρα από το χαρτί, οπότε αντίστοιχα επεκτείνεται και η γωνία (το μέρος του επιπέδου που περιλαμβάνεται μεταξύ των ημιευθειών ΟΑ και ΟΑ').

Μπορούμε να συγκρίνουμε γωνίες μεταξύ τους αν τοποθετήσουμε τη μία επάνω στην άλλη, με την κορυφή και τη μία πλευρά τους να συμπίπτουν και η άλλη πλευρά τους να βρίσκεται προς το ίδιο μέρος της κοινής πλευράς. Αν η άλλη πλευρά τους επίσης συμπίπτει, τότε οι γωνίες είναι ίσες (έχουν το ίδιο άνοιγμα). Αν δε συμπίπτει, είναι άνισες, οπότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ποια από τις δύο γωνίες είναι η μεγαλύτερη.

Για να μετρήσουμε μια γωνία, χρησιμοποιούμε το **μοιρογνωμόνιο**.

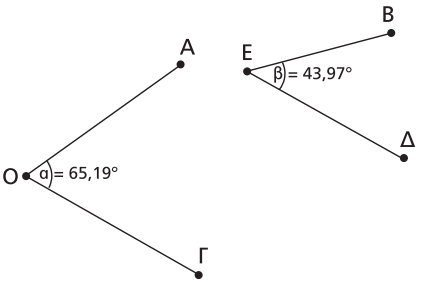
Όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε στο χαρτί μια γωνία, π.χ. 120 μοιρών, με κορυφή το σημείο Ο και πλευρά την ΟΒ, τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και φέρνουμε την πλευρά ΟΑ, η οποία πρέπει να περνάει από το σημείο του μοιρογνωμονίου που έχει την ένδειξη 120°.



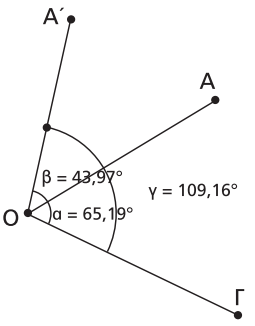
Μια γωνία μπορεί να είναι **οξεία** (μικρότερη από 90°), **ορθή** (ίση με 90°) ή **αμβλεία** (μεγαλύτερη από 90°).

Για να βρούμε το *άθροισμα 2 ή περισσότερων γωνιών,* μπορούμε:

- είτε να αθροίσουμε τα μεγέθη τους:
  $\hat{AOГ}+\hat{BEΔ} = 65{,}19° + 43{,}97° = 109{,}16°$

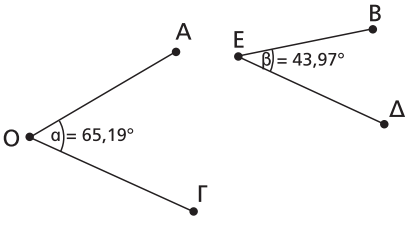


- είτε να τοποθετήσουμε τη μία δίπλα στην άλλη (πρακτικά, πρώτα αποτυπώνουμε σε διαφανές χαρτί τη γωνία που θέλουμε να μεταφέρουμε), ώστε οι κορυφές και η μία πλευρά τους να συμπίπτουν και να μην έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο, δηλαδή οι άλλες πλευρές να είναι εκατέρωθεν (να μην είναι προς το ίδιο μέρος) της κοινής πλευράς, και να μετρήσουμε με το μοιρογνωμόνιο το συνολικό μέγεθος της γωνίας που ορίζεται από την κοινή κορυφή και τις μη κοινές πλευρές των γωνιών.

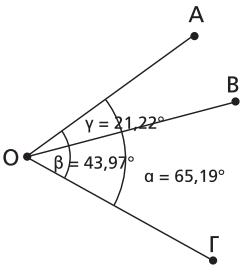


Για να βρούμε τη *διαφορά 2 γωνιών,* μπορούμε:

- είτε να αφαιρέσουμε τα μεγέθη τους:
  $\hat{AOГ}+\hat{BEΔ} = 65{,}19° - 43{,}97° = 21{,}22°$

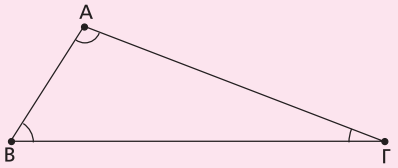


- είτε να τοποθετήσουμε τη μία πάνω στην άλλη (πρακτικά, πρώτα αποτυπώνουμε σε διαφανές χαρτί τη γωνία που θέλουμε να μεταφέρουμε), ώστε οι κορυφές και η μία πλευρά τους να συμπίπτουν και οι άλλες πλευρές να είναι προς το ίδιο μέρος της κοινής πλευράς, και να μετρήσουμε με το μοιρογνωμόνιο το μέγεθος της γωνίας που ορίζεται από την κοινή κορυφή και τις μη κοινές πλευρές των γωνιών.



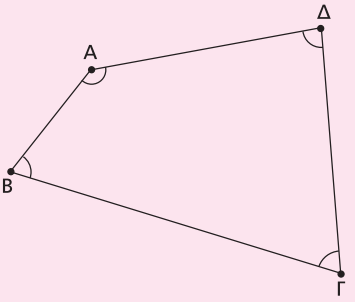
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι πάντοτε 180°:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 180°$



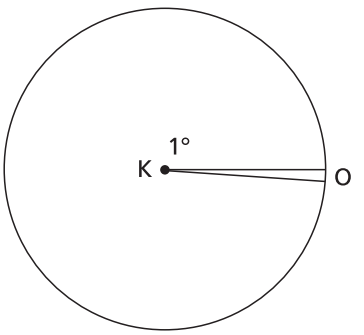
Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι πάντα 360°:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta} = 360°$ ή 4 ορθές

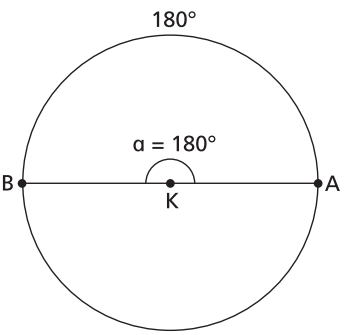


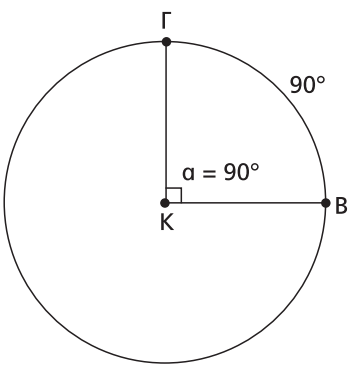
2.3 ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΤΟΞΩΝ

Ένας κύκλος οποιασδήποτε ακτίνας ρ χωρίζεται σε 360 ίσα τμήματα. Η γωνία που έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου (επίκεντρη γωνία) και οι πλευρές της καταλήγουν στα άκρα ενός από αυτά τα τμήματα λέμε ότι είναι μία **μοίρα** (1 μοίρα) και συμβολίζεται 1°. Η μία μοίρα υποδιαιρείται σε 60 ίσα μέρη, το καθένα από τα οποία λέγεται ένα *πρώτο λεπτό της μοίρας* και συμβολίζεται 1′. Το ένα πρώτο λεπτό της μοίρας το χωρίζουμε σε 60 ίσα μέρη, το καθένα από τα οποία λέγεται ένα *δεύτερο λεπτό της μοίρας* και συμβολίζεται 1″. Το μέτρο ενός τόξου κύκλου είναι ίσο με το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που οι πλευρές της καταλήγουν στα άκρα του.



- Ισχύει η ισότητα 1° = 60′ = 3.600″.
- Ολόκληρο το τόξο οποιουδήποτε κύκλου είναι 360°.
- Μια γωνία με πλευρές αντικείμενες ημιευθείες είναι 180°.
- Το μισό τόξο ενός κύκλου οποιασδήποτε ακτίνας είναι 180°.
- Μια γωνία που οι πλευρές της είναι ημιευθείες κάθετες μεταξύ τους είναι 90°.
- Το τέταρτο ενός κύκλου οποιασδήποτε ακτίνας είναι 90°.





2.4 ΕΜΒΑΔΟΝ – ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ο αριθμός που εκφράζει το αποτέλεσμα της μέτρησής της, δηλαδή της σύγκρισής της με τη μονάδα μέτρησης εμβαδών που ορίζεται να είναι το *τετραγωνικό μέτρο* (τ.μ. ή m^2).

Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου είναι:

- το τετραγωνικό δεκατόμετρο (τ.δεκ. ή dm^2),
- το τετραγωνικό εκατοστόμετρο (τ.εκ. ή cm^2) και
- το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (τ.χιλ. ή mm^2).

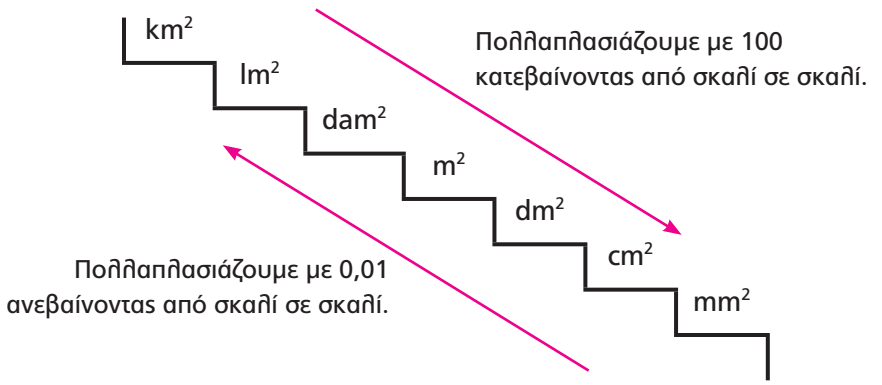
Πολλαπλάσιο του τετραγωνικού μέτρου είναι το τετραγωνικό χιλιόμετρο (τ.χμ. ή km^2), όπου 1 τ.χμ. = 1.000.000 τ.μ.

Η σχέση που συνδέει τις παραπάνω μονάδες μέτρησης είναι:

$$\mathbf{1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10.000\ cm^2 = 1.000.000\ mm^2}$$
$$\mathbf{1\ mm^2 = 0{,}01\ cm^2 = 0{,}0001\ dm^2 = 0{,}000001\ m^2}$$

Όταν θέλουμε να μετατρέψουμε τα $\mathbf{m^2}$ σε $\mathbf{dm^2}$, $\mathbf{cm^2}$, $\mathbf{mm^2}$, πολλαπλασιάζουμε με 100, 10.000, 1.000.000 αντίστοιχα. Αντίστροφα, όταν θέλουμε να μετατρέψουμε τα $\mathbf{mm^2}$ σε $\mathbf{cm^2}$, $\mathbf{dm^2}$, $\mathbf{m^2}$, πολλαπλασιάζουμε με 0,01, 0,0001, 0,000001 αντίστοιχα.

Εποπτικά μπορούμε να φανταστούμε ότι τα πολλαπλάσια και οι υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου βρίσκονται στα σκαλιά μιας σκάλας, ως εξής:



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Μονάδα	Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν
m^2	3					1,5
dm^2		25			670	
cm^2			700			
mm^2				8.500		

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Τα 3 m^2 είναι 3 • 100 = 300 dm^2 ή 300 • 100 = 30.000 cm^2 ή 30.000 • 100 = 3.000.000 mm^2.

Τα 25 dm^2 είναι 25 : 100 = 0,25 m^2 ή 25 • 100 = 2.500 cm^2 ή 2.500 • 100 = 250.000 mm^2.

Τα 700 cm^2 είναι 700 : 100 = 7 dm^2 ή 7 : 100 = 0,07 m^2 ή 700 • 100 = 70.000 mm^2.

Τα 8.500 mm^2 είναι 8.500 : 100 = 85 cm^2 ή 85 : 100 = 0,85 dm^2 ή 0,85 : 100 = 0,0085 m^2.

Τα 670 dm^2 είναι 670 • 100 = 67.000 cm^2 ή 67.000 • 100 = 6.700.000 mm^2 ή 670 : 100 = 6,7 m^2.

Τα 1,5 m^2 είναι 1,5 • 100 = 150 dm^2 ή 150 • 100 = 15.000 cm^2 ή 15.000 • 100 = 1.500.000 mm^2.

Τελικά ο πίνακας γίνεται:

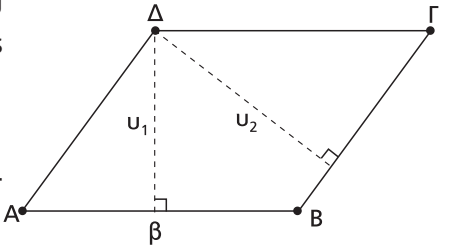
Μονάδα	Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν
m^2	3	0,25	0,07	0,0085	6,7	1,5
dm^2	300	25	7	0,85	670	150
cm^2	30.000	2.500	700	85	67.000	15.000
mm^2	3.000.000	250.000	70.000	8.500	6.700.000	1.500.000

2.5 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Παραλληλόγραμμο είναι το τετράπλευρο που έχει ανά δύο τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Το παραλληλόγραμμο που έχει και τις τέσσερις γωνίες του ορθές ονομάζεται **ορθογώνιο**, ενώ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες ονομάζεται **τετράγωνο**.

■ **Ύψος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο και στις δύο παράλληλες πλευρές του παραλληλογράμμου.

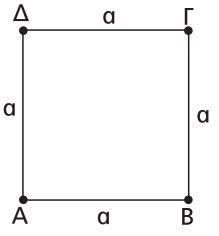
Κάθε παραλληλόγραμμο έχει 2 ύψη. (Συνηθίζουμε από μία κορυφή να φέρνουμε κάθετη στην απέναντι πλευρά.)



Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος. Δηλαδή **Ε = β • υ**.

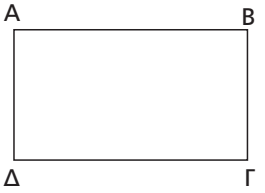
Για να βρούμε το **εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλογράμμου**, πολλαπλασιάζουμε τη μία πλευρά επί την άλλη, δεδομένου ότι, αν τη μία πλευρά τη θεωρήσουμε βάση, η άλλη θα είναι το ύψος.

Για να βρούμε το **εμβαδόν τετραγώνου**, πολλαπλασιάζουμε την πλευρά του επί τον εαυτό της, αφού στο τετράγωνο όλες οι πλευρές είναι ίσες και, αν τη μία πλευρά τη θεωρήσουμε βάση, η άλλη θα είναι το ύψος.

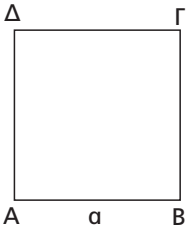


Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα βλέπετε ένα ορθογώνιο. Μπορούμε να πάρουμε ως βάση την πλευρά ΔΓ, οπότε το ύψος θα είναι η πλευρά ΑΔ και το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι Ε = ΔΓ • ΑΔ.
   Αν πάρουμε ως βάση την πλευρά ΑΔ, το ύψος θα είναι η ΔΓ και το εμβαδόν θα είναι Ε = ΑΔ • ΔΓ.

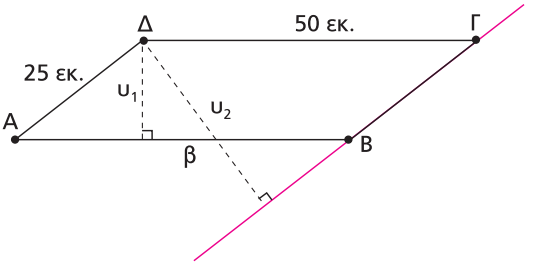


2. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα τετράγωνο με πλευρά α. Επειδή στο τετράγωνο όλες οι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους, η βάση και το ύψος είναι ίσα, οπότε το εμβαδόν θα είναι $E = α \cdot α = α^2$.



Εφαρμογή

Να βρεθούν τα ύψη του παραλληλογράμμου του διπλανού σχήματος, το οποίο έχει πλευρές ίσες με 25 εκ. και 50 εκ., αν γνωρίζουμε ότι έχει εμβαδόν 100 τ.εκ.



ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το σχήμα, αν πάρουμε ως βάση την ΑΒ, θα έχουμε:
$50 \cdot υ_1 = 100$, οπότε $υ_1 = 100 : 50$, άρα $υ_1 = 2$ εκ.
Αν πάρουμε ως βάση τη ΒΓ, θα έχουμε:
$25 \cdot υ_2 = 100$, οπότε $υ_2 = 100 : 25$, άρα $υ_2 = 4$ εκ.

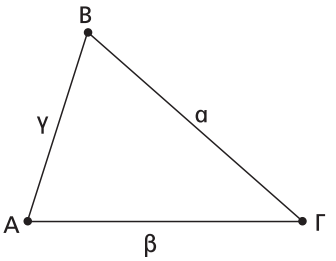
2.6 ΤΡΙΓΩΝΟ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τρίγωνο είναι το γεωμετρικό σχήμα που έχει τρεις πλευρές και τρεις κορυφές (άρα και τρεις γωνίες).

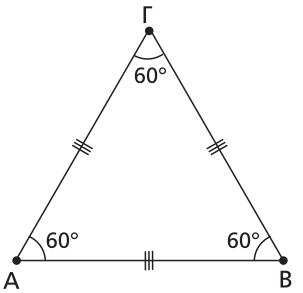
Τα τρίγωνα χαρακτηρίζονται είτε σύμφωνα με τις πλευρές τους είτε σύμφωνα με τις γωνίες τους.

■ Με **κριτήριο τις πλευρές** έχουμε τρία είδη τριγώνων:

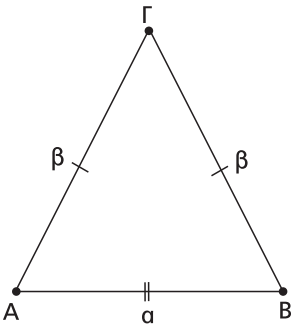
• Το **σκαληνό**, που έχει άνισες πλευρές.



• Το **ισόπλευρο**, που έχει και τις τρεις πλευρές ίσες (και τις τρεις γωνίες ίσες).

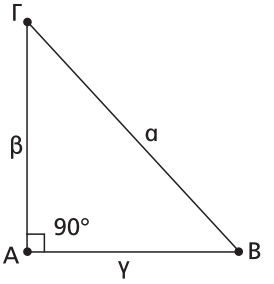


• Το **ισοσκελές**, που έχει δύο πλευρές ίσες (και δύο γωνίες ίσες).

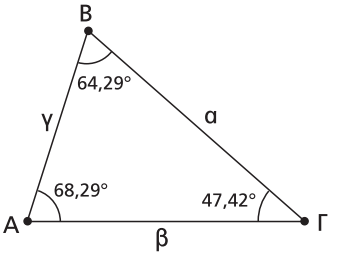


- Με **κριτήριο τις γωνίες** έχουμε τρία είδη τριγώνων:

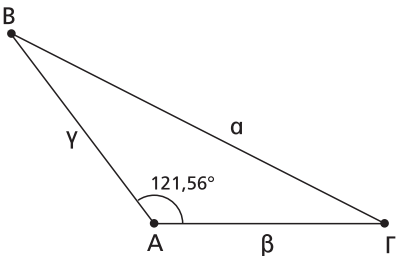
  - Το **ορθογώνιο**, που έχει τη μία γωνία ορθή, δηλαδή 90°.



  - Το **οξυγώνιο**, που έχει και τις τρεις γωνίες οξείες, δηλαδή η καθεμία έχει μέτρο μικρότερο των 90°.

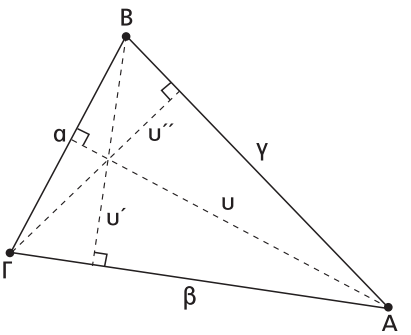


  - Το **αμβλυγώνιο**, που έχει μία γωνία αμβλεία, δηλαδή με μέτρο μεγαλύτερο των 90°.



- **Ύψος** ενός τριγώνου είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από την κάθε κορυφή προς την απέναντι πλευρά.

  Ένα τρίγωνο έχει τρεις πλευρές (την ΑΓ, την ΑΒ και τη ΒΓ) και τρία ύψη (το ύψος υ από την κορυφή Α στην απέναντι πλευρά ΒΓ = α, το ύψος υ' από την κορυφή Β στην απέναντι πλευρά ΑΓ = β και το ύψος υ'' από την κορυφή Γ στην απέναντι πλευρά ΑΒ = γ).



Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το μισό γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος, δηλαδή $E = \frac{\alpha \cdot \upsilon}{2}$ ή $E = \frac{\beta \cdot \upsilon'}{2}$ ή $E = \frac{\gamma \cdot \upsilon''}{2}$.

Εφαρμογές

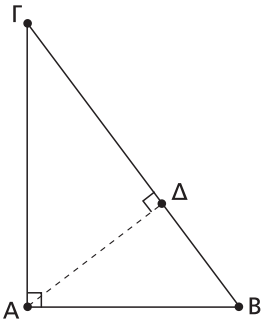
1. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με πλευρές ΑΒ = 6 εκ., ΑΓ = 8 εκ. και ΒΓ = 10 εκ. Να βρείτε το ύψος ΑΔ του τριγώνου.

ΛΥΣΗ

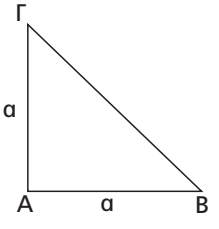
Αν θεωρήσουμε ως βάση του τριγώνου την πλευρά ΑΒ και ύψος την πλευρά ΑΓ, το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$E = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = 24 \text{ τ.εκ.}$$

Αν θεωρήσουμε ως βάση την υποτείνουσα ΒΓ και ύψος το τμήμα ΑΔ, το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}$ ή $E = 5 \cdot A\Delta$ και, επειδή $E = 24$, έχουμε $5 \cdot A\Delta = 24$, οπότε $A\Delta = \frac{24}{5}$, άρα $A\Delta = 4{,}8$ εκ.



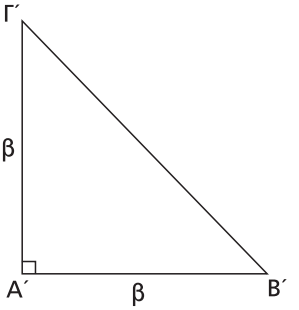
2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και ισοσκελές. Το εμβαδόν του τριγώνου είναι 2 τετραγωνικά εκατοστά. Τι θα συμβεί με τις κάθετες και ίσες μεταξύ τους πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΑΓ, όταν τετραπλασιάσουμε το εμβαδόν και εξακολουθήσει το νέο τρίγωνο να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές;



Σχήμα 1

ΛΥΣΗ

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι Ε = 2 τετραγωνικά εκατοστά (σχήμα 1). Σύμφωνα με τον τύπο του εμβαδού, αν θεωρήσουμε βάση τη μία κάθετη πλευρά και ύψος την άλλη κάθετη πλευρά και με δεδομένο ότι οι δύο κάθετες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες, ΑΒ = ΑΓ = α (ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο), θα έχουμε $E = \frac{\alpha \cdot \alpha}{2} = 2$, οπότε α • α = 4.

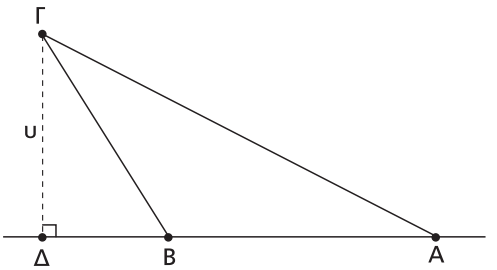


Σχήμα 2

Αν είναι β η πλευρά του νέου τριγώνου (σχήμα 2), θα έχουμε $E' = \frac{\beta \cdot \beta}{2} = 8$, οπότε β • β = 16.

Παρατηρούμε ότι α • α = 4 = 2 • 2 και β • β = 16 = 4 • 4, άρα α = 2 και β = 4. Επομένως η πλευρά β είναι διπλάσια από την πλευρά α.

3. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΓΑΒ. Η πλευρά του ΑΒ έχει μήκος 5 cm. Το ύψος ΓΔ από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ έχει μήκος 4 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



ΛΥΣΗ

Όπως παρατηρείτε στο σχήμα, το ύψος του τριγώνου συναντάει την προέκταση της πλευράς ΑΒ, αφού «ύψος ενός τριγώνου από μία κορυφή αυτού στην απέναντι πλευρά είναι η κάθετος από την κορυφή προς την απέναντι πλευρά».

Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο το ύψος που φέρνουμε από οξεία γωνία (< 90°) συναντάει την απέναντι πλευρά στην προέκτασή της.

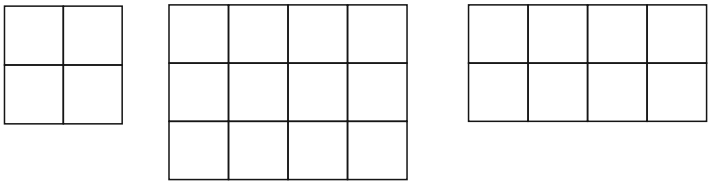
Μετά από αυτή την ουσιαστική παρατήρηση είναι εύκολο να βρούμε το εμβαδόν:

$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

ΘΕΜΑΤΑ Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

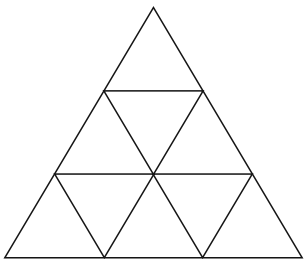
1ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά»

1. Σκιάζω τα $\frac{3}{4}$ κάθε σχήματος.



2. Ο Δημήτρης πρόσθεσε όλους τους αριθμούς από το 1 μέχρι και το 11 και βρήκε άθροισμα 56. Έκανε τον έλεγχο και διαπίστωσε πως δεν πρόσθεσε έναν αριθμό. Ποιος ήταν ο αριθμός αυτός;

3. Βρίσκω πόσα μικρά και μεγαλύτερα τρίγωνα υπάρχουν στο διπλανό σχήμα:

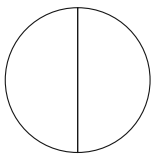


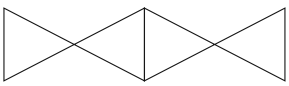
5 ☐ 7 ☐

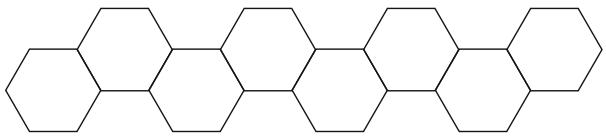
12 ☐ 13 ☐ 14 ☐

4. Σκιάζω

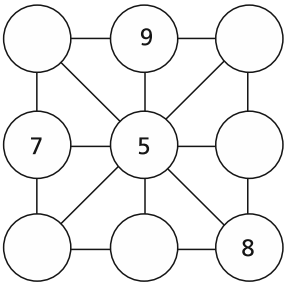
Τι μέρος έμεινε ασκίαστο;

Το $\frac{1}{2}$ του 

Τα $\frac{3}{4}$ του 

Τα $\frac{5}{8}$ του 

5. Συμπληρώνω τους κενούς κύκλους με αριθμούς, έτσι ώστε το άθροισμα κάθε τριάδας αριθμών οριζόντια, κατακόρυφα και διαγώνια να είναι 15.



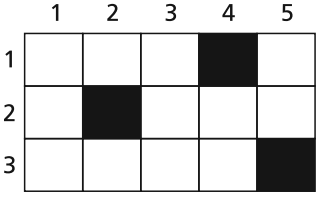
6. Συμπληρώνω ό,τι λείπει στις παρακάτω πράξεις:

$$\begin{array}{r} 4.564 \\ +\square.7\square3 \\ \hline 6.\square57 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \square2.\square45 \\ -\ 71.432 \\ \hline 10.91\square \end{array}$$

7. Κάνω τις πράξεις:

α) $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+1=.....$ **β)** $5-\frac{3}{4}=.....$ **γ)** $\frac{5}{4}:\frac{5}{3}=.....$

8. Βρίσκω τους αριθμούς και λύνω το σταυράριθμο:



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ

1. Παρά ένα τετρακόσια!
2. Τόσα πόδια έχουν 33 πρόβατα.
3. Τόσο είναι το διπλάσιο του 500.

ΚΑΘΕΤΑ

1. Το πρώτο ψηφίο μου είναι το άθροισμα των άλλων δύο.
3. Δέκα φορές το 91.
4. Τόσες πάντα είναι όλες οι μέρες του Απρίλη.
5. Μια δωδεκάδα έχει ακριβώς τόσα αυγά.

9. Μία τάξη έχει 26 παιδιά. Τα κορίτσια είναι 4 περισσότερα από τα αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια και πόσα είναι τα αγόρια;

10. Ο κύριος Γιώργος αγόρασε ένα οικόπεδο 360 τ.μ. Θέλει να κτίσει σ' αυτό

ένα σπίτι, το οποίο να καλύπτει το 25% του οικοπέδου. Στο υπόλοιπο οικόπεδο θα φυτέψει πορτοκαλιές. Αν σε κάθε 9 τετραγωνικά μέτρα φυτέψει μία πορτοκαλιά, πόσες πορτοκαλιές θα χρειαστεί;

11. Η Άννα και ο Κωστής αγόρασαν βιβλία και πλήρωσαν 36 €. Η Άννα πλήρωσε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και ο Κωστής τα υπόλοιπα.

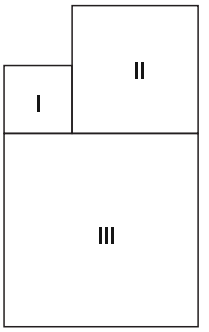
α) Πόσα ευρώ πλήρωσε καθένας;

β) Τα χρήματα που έβαλε ο Κωστής ήταν τα $\frac{3}{7}$ από αυτά που είχε στο πορτοφόλι του. Πόσα ευρώ τού έμειναν;

12. Το διπλανό σχήμα αποτελείται από τρία τετράγωνα. Το τετράγωνο I έχει περίμετρο 4 εκ. και το τετράγωνο II έχει περίμετρο 8 εκ.

α) Πόσα εκ. είναι η περίμετρος του τετραγώνου III;

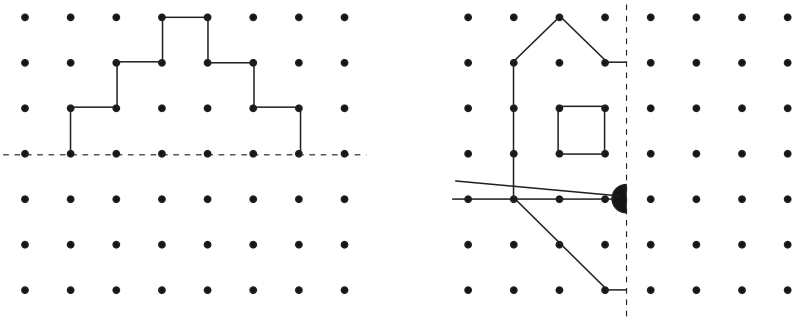
β) Πόσα εκ. είναι η περίμετρος όλου του σχήματος;



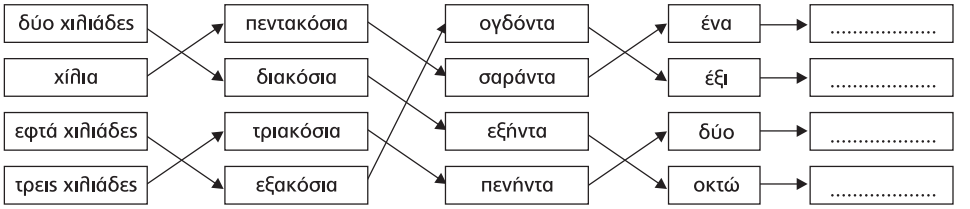
2008

2ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά»

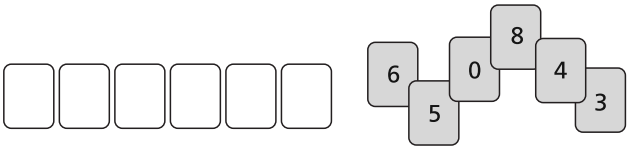
1. Συμπληρώνω το άλλο μισό.



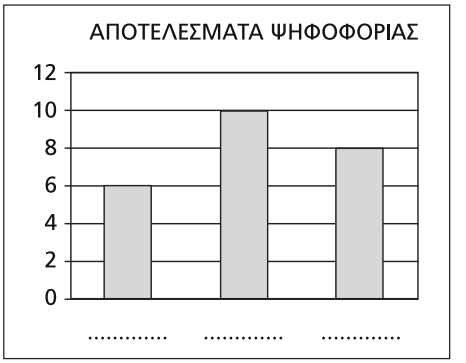
2. Ακολουθώ τα βέλη και γράφω με ψηφία τους αριθμούς που σχηματίζονται.



3. Χρησιμοποιώ τα ψηφία που βλέπω στις κάρτες, μια φορά το καθένα, και φτιάχνω έναν αριθμό μεγαλύτερο από τον 700.000.



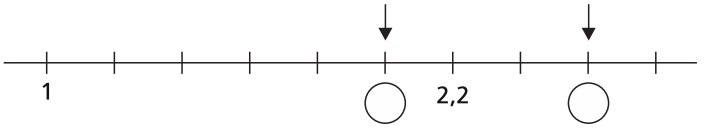
4. Ο Γιάννης εκλέχτηκε πρόεδρος της τάξης μας με δύο ψήφους περισσότερες από την Ελένη. Ο Κώστας πήρε 6 ψήφους.
Συμπληρώνω στο διπλανό γράφημα ποια ράβδος αντιστοιχεί σε κάθε παιδί.



5. Το άθροισμα των ηλικιών ενός πατέρα και του γιου του είναι 54 χρόνια. Μετά από δύο χρόνια, το άθροισμα των ηλικιών τους θα είναι:

α. 56 χρόνια **β.** 57 χρόνια **γ.** 58 χρόνια
δ. 59 χρόνια **ε.** 60 χρόνια

6. Ποιους αριθμούς δείχνουν τα βέλη;

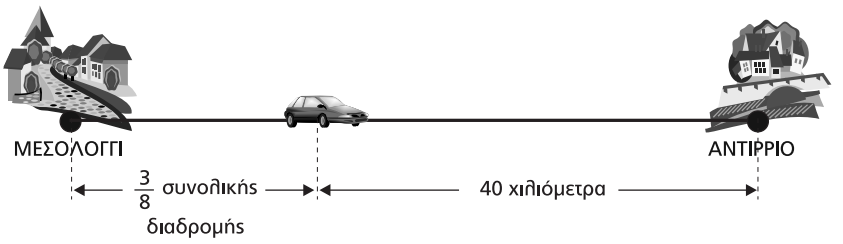


7. Ο κυρ Μιχάλης έφυγε από τα Μέγαρα το πρωί με λαχανικά για την Αθήνα. Τη στιγμή που ξεκίνησε, ο χιλιομετρητής (το κοντέρ) του αυτοκινήτου του έδειχνε 43.354 χιλιόμετρα. Όταν επέστρεψε στο σπίτι του, έδειχνε 43.444 χιλιόμετρα.
Πόσα χιλιόμετρα είναι η απόσταση Αθήνα-Μέγαρα;

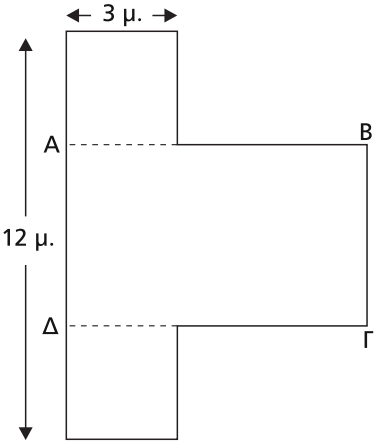
8. Συμπληρώνω τους αριθμούς που λείπουν στα κενά τετράγωνα.
Στα τετράγωνα που δείχνουν τα βέλη γράφω το άθροισμα των αριθμών της αντίστοιχης γραμμής ή της αντίστοιχης στήλης.

4,2	1,8	6
7,5	3,5	
1,8		
8,5	0,5	
	7	

9. Ο Βασίλης ταξιδεύει από το Μεσολόγγι για το Αντίρριο. Έχει διανύσει τα $\frac{3}{8}$ της διαδρομής και του απομένουν 40 χιλιόμετρα. Πόση είναι η απόσταση Μεσολόγγι-Αντίρριο;



10. Το παρακάτω σχήμα, που αποτελείται από δύο ίσα τετράγωνα και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, έχει συνολικό εμβαδόν 66 τ.μ. Πόσα μέτρα είναι το μήκος και πόσα μέτρα το πλάτος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ;



ΘΕΜΑΤΑ ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

1ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά»

1. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς 3,14 και 3,142;

☐ 3,014 ☐ 3,104 ☐ 3,140 ☐ 3,141 ☐ 3,145

2. Συμπληρώνω με αριθμούς το μαγικό τετράγωνο, έτσι ώστε το άθροισμα κάθε τριάδας αριθμών οριζόντια, κάθετα και διαγώνια να είναι ίδιο.

100		80
	70	
		40

3. Υπολογίζω τις παρακάτω παραστάσεις:

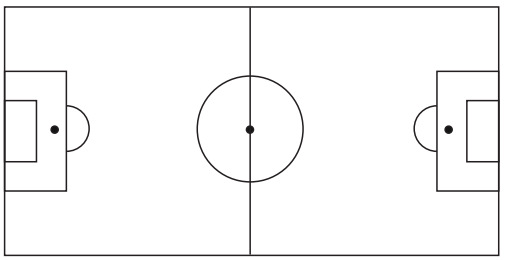
$2^3 =$ $3^2 =$

$2^3 - 2 \cdot 3 =$ $1^{2007} =$

4. Ο Γιάννης και η Αγγελική έχουν ο καθένας από ένα ίδιο παστέλι. Ο Γιάννης τρώει το $\frac{1}{2}$ από το $\frac{1}{4}$ του παστελιού του. Η Αγγελική τρώει το $\frac{1}{4}$ από το $\frac{1}{2}$ του παστελιού της. Ποιος από τους δύο έφαγε περισσότερο;

Ο Γιάννης ☐ Η Αγγελική ☐ Κανένας από τους δύο ☐

5. Βρίσκω πόσες είναι οι ορθές γωνίες του ποδοσφαιρικού γηπέδου.

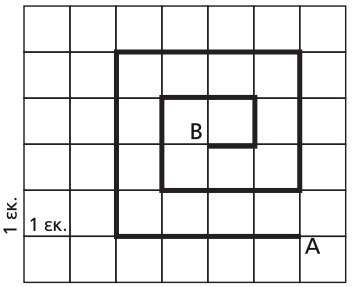


6. Βρίσκω το αποτέλεσμα κάθε πράξης:

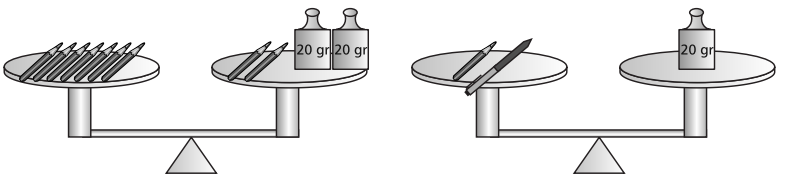
$32 - \frac{5}{6} = ...$ $\frac{4}{8} : 4 = ...$ $\left(\frac{3}{8} : \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{4}{3} = ...$

7. Υπολογίζω την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:
$(25 + 15) : 8 - (15 - 10) : 5 =$
$12 + 3 + 9 \bullet 3 - 12 : 4 =$
$2 + (7{,}6 + 2{,}4) : 2 - (20 + 10) : 5 =$

8. Το μήκος της σχεδιασμένης διαδρομής από το σημείο Α έως το σημείο Β είναι …… εκ.



9. Οι ζυγαριές ισορροπούν. Στις ζυγαριές υπάρχουν μολύβια, μια πένα και σταθμά. Βρίσκω τα γραμμάρια που αντιστοιχούν στην πένα.



10. Η σειρά των παρακάτω αριθμών δεν είναι τυχαία… Ποιος αριθμός λείπει σε κάθε περίπτωση;
α) 25, 36, □, 64, 81, □, 121
β) 200, 195, 185, 170, □, 125, □

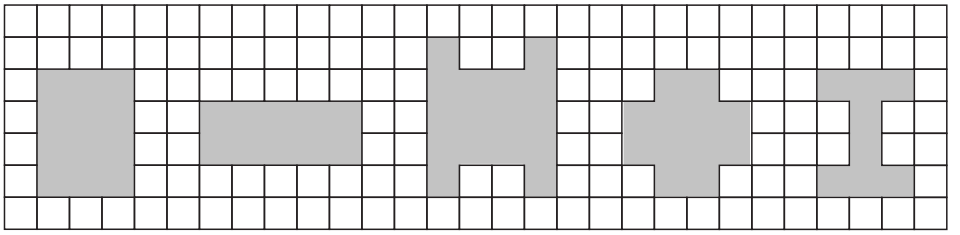
11. Τρεις φίλοι αγόρασαν από ένα βιβλίο ο καθένας. Τα βιβλία είχαν την ίδια αξία. Ο πρώτος έδωσε 15 €, ο δεύτερος έδωσε 20 € και ο τρίτος 50 €. Ο βιβλιοπώλης, επειδή δεν είχε ψιλά για να δώσει στον καθένα τα ρέστα του, τους επέστρεψε συνολικά 43 €. Βρίσκω πόσο κοστίζει το ένα βιβλίο και πόσα ρέστα πήρε ο καθένας τους.

12. Σε μια κατασκήνωση πήγαν 500 παιδιά. Από αυτά τα παιδιά, τα κορίτσια ήταν το 40%. Μετά από μερικές μέρες ήρθαν στην κατασκήνωση 36 αγόρια και 64 κορίτσια. Πόσο τοις εκατό των παιδιών είναι τώρα τα κορίτσια;

2008

2ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά»

1. Μετρώ από πόσα τετραγωνάκια αποτελείται το καθένα από τα παρακάτω σχήματα:



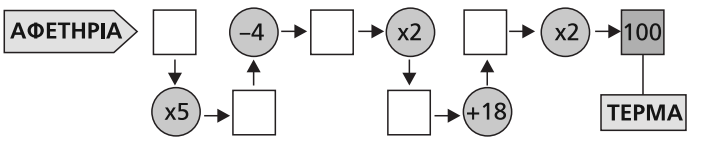
....

2. Κυκλώνω τον αριθμό που δεν έχει την ίδια αξία με τους υπόλοιπους:

$$4{,}05 \qquad \frac{405}{10} \qquad \frac{4050}{1000} \qquad 4{,}050 \qquad \frac{405}{100}$$

3. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς πρέπει να μπει στην αφετηρία για να φτάσουμε στο τέρμα;

α) 2 **β)** 3 **γ)** 4 **δ)** 5 **ε)** 6



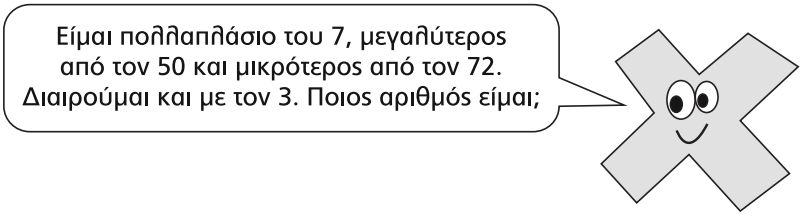
4. Συμπληρώνω τους αριθμούς που λείπουν:

$$\begin{array}{r} \square\,\square\,8\,4 \\ +\quad 7\,\square\,\square \\ \hline 2\,7\,9\,3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \square\,9\,\square \\ \times\quad\quad 3 \\ \hline 5\,8\,5 \end{array}$$

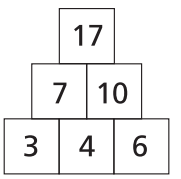
5. Ο **Κεραυνός**, η ομάδα μπάσκετ του σχολείου μας, νίκησε την **Αστραπή**, την ομάδα μπάσκετ γειτονικού σχολείου, με διαφορά 22 πόντων. Συνολικά και οι δύο ομάδες πέτυχαν 110 πόντους. Πόσοι ήταν οι πόντοι της κάθε ομάδας;

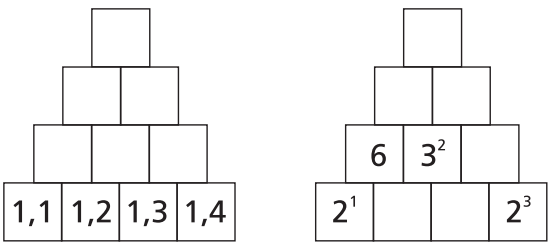
6. Σε μια κατασκήνωση ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια είναι $\frac{4}{5}$. Αν τα αγόρια είναι 80, πόσα παιδιά φιλοξενεί η κατασκήνωση;

7.



8. Στη μικρή πυραμίδα δεξιά, το 7 είναι το άθροισμα του 3 και του 4, το 10 είναι το άθροισμα του 4 και του 6 και το 17 είναι το άθροισμα του 7 και του 10. Συμπληρώνω με τον ίδιο τρόπο τις παρακάτω πυραμίδες:

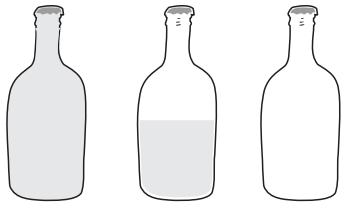




9. Ένα γυάλινο μπουκάλι γεμάτο με λάδι ζυγίζει 600 γραμμάρια. Το ίδιο μπουκάλι, αλλά με το μισό λάδι, ζυγίζει 340 γραμμάρια. Με ποια από τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις μπορείς να βρεις πόσο ζυγίζει το μπουκάλι, όταν είναι άδειο; (Λύνω τη σωστή.)

α) $600 - (600 - 340) \times 2 =$

β) $340 - 600 : 2 =$



600 γραμ. 340 γραμ. .... γραμ.

10. Η Μαρίνα έχει 56 € και ο μικρός της αδελφός, ο Βασίλης, έχει 44 €. Τα παιδιά αποφάσισαν η Μαρίνα να ξοδεύει στο κυλικείο του σχολείου 7 € την εβδομάδα και ο Βασίλης 4 € την εβδομάδα.

α) Μετά από πόσες εβδομάδες θα τους έχει μείνει το ίδιο ποσό;

β) Ποιου παιδιού τα χρήματα θα τελειώσουν πιο γρήγορα;

3ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός «Παιχνίδι και Μαθηματικά»

ΘΕΜΑ 1ο

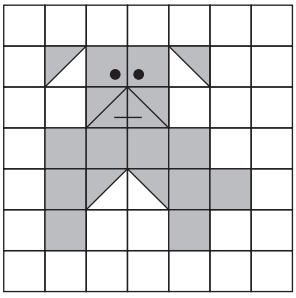
Δύο από τα κλάσματα είναι ισοδύναμα. Κύκλωσέ τα:

$$\frac{4}{5},\ \frac{8}{12},\ \frac{16}{20},\ \frac{45}{20},\ \frac{50}{40}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Πόσα είναι όλα τα τετραγωνάκια του σχήματος;

Β) Από πόσα τετραγωνάκια αποτελείται το σκυλάκι;



ΘΕΜΑ 3ο

Αντιστοίχισε τα ίσα αποτελέσματα:

$8 \cdot 0{,}01$	$3 : 5$
$3{,}4 - 2{,}6$	$8 : 100$
$0{,}7 \cdot 3$	$10^2 + 2^2$
$4+5 \cdot 20$	$2+\frac{1}{10}$

ΘΕΜΑ 4ο

Η Μαρία παίζοντας μπάσκετ ευστόχησε στα $\frac{4}{5}$ των βολών που έριξε. Πόσο % των βολών έχασε.

ΘΕΜΑ 5ο

Σε ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι, όταν ο παίκτης αποκτήσει 5 ξύλινες ράβδους, μπορεί να τις ανταλλάξει με μια ράβδο χρυσού. Όταν κερδίσει 2 σιδερένιες ρά-

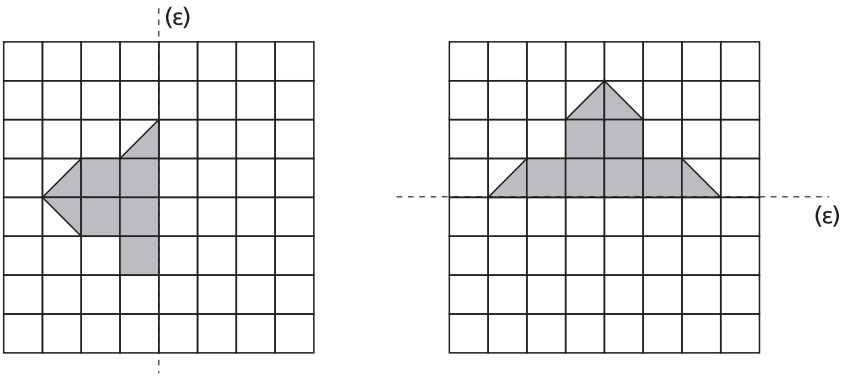
βδους, μπορεί επίσης να τις ανταλλάξει με μια ράβδο χρυσού. Κύκλωσε τι είναι προτιμότερο, προκειμένου να κερδίσει περισσότερες ράβδους χρυσού:
α. Να αποκτήσει 30 ξύλινες και 20 σιδερένιες ράβδους, *ή*
β. Να αποκτήσει 20 ξύλινες και 30 σιδερένιες ράβδους.

ΘΕΜΑ 6ο

Δέκα παιδιά αποφάσισαν να αγοράσουν μια μπάλα ποδοσφαίρου. Θα πλήρωναν από 6 € το καθένα. Όμως τα μισά άλλαξαν γνώμη και δε συμμετέχουν. Πόσα € θα πληρώσει το καθένα από τα υπόλοιπα παιδιά, για να αγοράσουν την μπάλα ποδοσφαίρου;

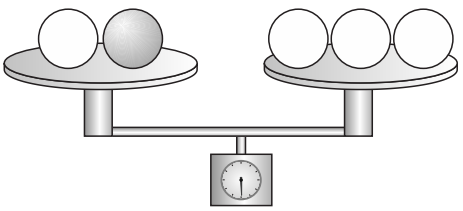
ΘΕΜΑ 7ο

Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να χρωματίσεις τα κατάλληλα τετραγωνάκια, ώστε να έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία (ε).



ΘΕΜΑ 8ο

Στο παρακάτω σχήμα η ζυγαριά ισορροπεί. Αν το βάρος της άσπρης μπάλας είναι 300 γρ., πόσο είναι το βάρος της γκρίζας μπάλας;

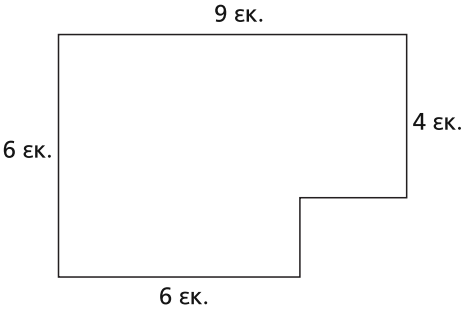


ΘΕΜΑ 9ο

Ένα ταχυδρομικό περιστέρι ξεκινάει από τον πρώτο πύργο στις 8.30 π.μ. και φτάνει στο δεύτερο πύργο στις 9.00 π.μ. Αν το περιστέρι διανύει 3 χμ. σε 10 λεπτά, πόσα χιλιόμετρα απέχουν οι δύο πύργοι;

ΘΕΜΑ 10ο

Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος:



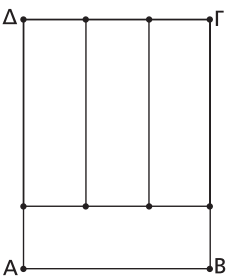
Θέματα Μαθηματικών για την εισαγωγή στα Πρότυπα Γυμνάσια

Στα θέματα 1 έως και 8 κυκλώστε μία μόνο απάντηση.

1. Ο Ερμής έχει δυο κομπιουτεράκια, το Α και το Β. Το Α κάνει 17 πολλαπλασιασμούς ανά δευτερόλεπτο, ενώ το Β κάνει 1017 πολλαπλασιασμούς ανά λεπτό. Πόσους περισσότερους πολλαπλασιασμούς κάνει το Α από το Β σε δυο λεπτά;

(Α) 10 **(Β)** 9 **(Γ)** 6 **(Δ)** 3 **(Ε)** 2

2. Το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι φτιαγμένο από τέσσερα ίδια ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι 28 εκ. Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι ίσο με:



(Α) 2 εκ. **(Β)** 6 εκ. **(Γ)** 7 εκ.
(Δ) 8 εκ. **(Ε)** 10 εκ.

3. Καθένα από τα παρακάτω σύμβολα αντιστοιχεί σε έναν μονοψήφιο φυσικό αριθμό. Διαφορετικά σύμβολα αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς. Αν ισχύουν οι ισότητες:

☒ = ☺ + ☺

☺ = ♦ : ♦

♦ = ☒ × ☒

Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σύμβολο ♦;

(Α) 1 **(Β)** 2 **(Γ)** 3 **(Δ)** 4 **(Ε)** 5

Πρόβλημα 2.

α) Παρατηρούμε ότι η περίμετρος τριγώνου είναι $5,1+6,2+8,7=20$ εκ. Άρα και η περίμετρος του τετραγώνου είναι 20 εκ. Επομένως η πλευρά του τετραγώνου είναι $20:4=5$ εκ. Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $5 \cdot 5=25$ τ.εκ.

β) Η πλευρά του νέου τετραγώνου είναι $4 \cdot 5=20$ εκ. Επομένως το εμβαδόν του είναι $20 \cdot 20=400$ τ.εκ.

2018

1. Γ, **2.** Β, **3.** Δ, **4.** Γ, **5.** Γ, **6.** Δ, **7.** Α, **8.** Ε

Πρόβλημα 1.

α) Το ποσοστό των κοριτσιών είναι $\frac{1}{4} \cdot 40\%=10\%$ του συνόλου των ατόμων. Η διαφορά $60\%-10\%=50\%$ του συνόλου των ατόμων αντιστοιχεί σε 150 άτομα. Άρα όλοι (ενήλικες + παιδιά) είναι 300. Επομένως οι ενήλικες είναι $\frac{60}{100} \cdot 300=180$ και τα παιδιά είναι $300-180=120$.

β) Ο αριθμός των παιδιών μετά είναι τα $\frac{8}{5}$ του αριθμού των ενήλικων, δηλαδή $\frac{8}{5} \cdot 180=288$ παιδιά. Άρα ήρθαν $288-120=168$ παιδιά.

Πρόβλημα 2.

α) Η Μαρία ξόδεψε τα $\frac{3}{8}$ του μισθού της για φαγητό. Άρα έμειναν τα $\frac{5}{8}$ του μισθού. Για μετακίνηση ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των $\frac{5}{8}$ του μισθού της, δηλαδή τα $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8}=\frac{5}{24}$ του μισθού. Έμειναν τα $\frac{2}{3}$ των $\frac{5}{8}$ του μισθού της, δηλαδή τα $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$ του μισθού και αυτό το ποσό μοιράστηκαν συνολικά, ισόποσα, παίρνοντας $\frac{1}{12}$ η καθεμία. Άρα ήταν 5 συνολικά οι αδερφές (μαζί με τη Μαρία) και $5-1=4$ οι αδερφές της Μαρίας.

β) Το $\frac{1}{12}$ του μισθού αντιστοιχεί σε 208 ευρώ.

Τα $\frac{12}{12}$ του μισθού αντιστοιχούν σε $12 \cdot 208=2.496$ ευρώ.

Τα $\frac{5}{24}$ του μισθού αντιστοιχούν σε $\frac{5}{24} \cdot 2.496=520$ ευρώ.