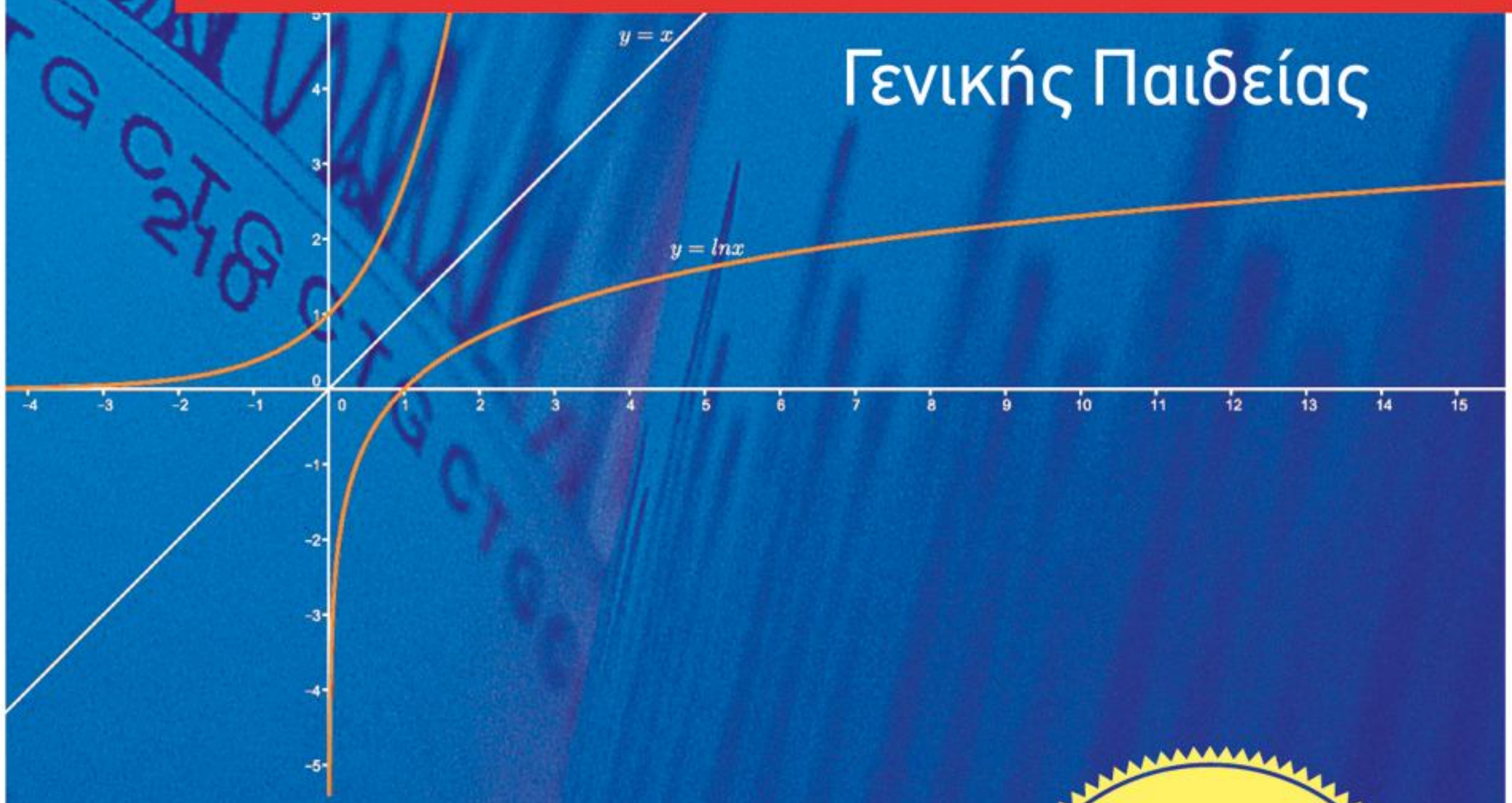
Θανάσης Τσιούμας

Άλγεβρα

Β΄ Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας



Περιέχει τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr
ΒΙΒΛΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Περιεχομενα

Πρόλογος 5

Κεφάλαιο 1: Συστήματα
1. Γραμμικά συστήματα 9
2. Μη γραμμικά συστήματα 28
3. Γενικά θέματα στα συστήματα 38

Κεφάλαιο 2: Ιδιότητες συναρτήσεων
1. Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης 45
2. Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης 66
3. Γενικά θέματα στις ιδιότητες συναρτήσεων 72

Κεφάλαιο 3: Τριγωνομετρία
1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 85
2. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες 100
3. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο 112
4. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 132
5. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις 155
6. Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών 182
7. Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α 203
8. Γενικά θέματα στην τριγωνομετρία 233
Τυπολόγιο τριγωνομετρίας 243

Κεφάλαιο 4: Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις
1. Πολυώνυμα 249
2. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις 273
3. Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές 304
4. Γενικά θέματα στα πολυώνυμα 321

Κεφάλαιο 5: Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση
1. Εκθετική συνάρτηση 341

2. Λογάριθμοι 375
3. Λογαριθμική συνάρτηση 393
4. Γενικά θέματα στις εκθετικές – λογαριθμικές συναρτήσεις 429

Επαναληπτικά θέματα σε όλη την ύλη 445
Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε όλη την ύλη 453
Προεκτάσεις 461

Απαντήσεις 465

Λύσεις ασκήσεων του σχολικού βιβλίου 513

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Συστήματα

1. Γραμμικά συστήματα*

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους

Θεωρούμε την εξίσωση $3x + 2y = 6$, όπου x, y είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν θέσουμε μια τυχαία τιμή στο x, για παράδειγμα την τιμή 1, βρίσκουμε $y = \frac{3}{2}$.

Θα λέμε τότε ότι το ζεύγος $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ είναι λύση της εξίσωσης. Επίσης, αν $x = 0$, τότε $y = 3$, δηλαδή έχει λύση το (0, 3).

Ακόμη, άλλες λύσεις της εξίσωσης είναι οι $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$, (2, 0), (–2, 6)..., και γενικά κάθε ζεύγος της μορφής $\left(\kappa, \frac{6-3\kappa}{2}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$, είναι λύση της εξίσωσης, δηλαδή η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις, που είναι οι συντεταγμένες των σημείων μιας ευθείας ε, η οποία έχει εξίσωση την $3x + 2y = 6$.

Γενικά: Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ (2) λέγεται **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους, που παριστάνει ευθεία, όταν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$. Π.χ. η εξίσωση $0x + 0y = 1$ δεν παριστάνει ευθεία.

Η εξίσωση $2x + 3y^2 = 5$ δεν είναι γραμμική.

Η εξίσωση (2) θα έχει **άπειρες λύσεις** ή θα είναι **αδύνατη** ($0x + 0y = 3$).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει ευθεία, διότι, αν:

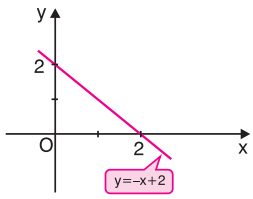
- $\beta \neq 0$, $y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$ ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, ειδικά για $\alpha = 0$, $y = \frac{\gamma}{\beta}$ ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x.
- $\beta = 0$ (άρα $\alpha \neq 0$), $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y.

---

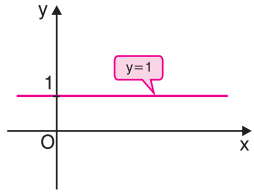
* *Η παράγραφος 1.1 είναι εκτός ύλης σύμφωνα με τις οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων για το σχολικό έτος 2016 – 2017 αλλά έχει επιλεχθεί να συμπεριληφθεί στον παρόν βιβλίο επειδή η ύλη της παραγράφου κρίνεται προαπαιτούμενη για επόμενες παραγράφους*

Για παράδειγμα:

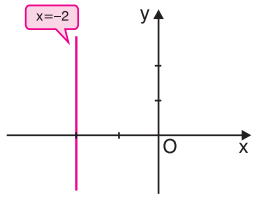
- Η εξίσωση $x + y = 2$ παίρνει τη μορφή $y = -x + 2$, η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο 2.



- Η εξίσωση $y = 1$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x στο σημείο 1.



- Η εξίσωση $x = -2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο –2.



Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή σύστημα 2 x 2

Είναι αυτό που έχει τη μορφή $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**.

Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλο γραμμικό σύστημα, που έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Τα δύο αυτά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα συστήματα**. Αν ε, ε΄ οι εξισώσεις του συστήματος, τότε η εξίσωση $\lambda(\varepsilon) + \lambda'(\varepsilon')$, όπου $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των εξισώσεων ε, ε΄.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης $3x + 2y = 6$, όπως βρήκαμε, είναι τα ζεύγη: $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$, $(2, 0)$, $(-2, 6)$... Για την άλλη εξίσωση έχουμε ως λύσεις τις

(1, 1), (0, 2), (2, 0)... Παρατηρούμε ότι το ζεύγος (2, 0) είναι η **κοινή** λύση των δύο εξισώσεων. Θα λέμε ότι το σύστημα είναι **συμβιβαστό** (δηλαδή έχει λύση).

Σημειωση

Αν μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις ενός συστήματος 2 x 2 είναι αδύνατη, τότε το σύστημα θα είναι αδύνατο. Για παράδειγμα, το σύστημα:

$\begin{cases} 0x + 0y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ είναι αδύνατο.

Μέθοδοι επίλυσης γραμμικού συστήματος 2 x 2

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 6 & (1) \\ x + y = 2 & (2) \end{cases}$

Θα το λύσουμε με τις δύο μεθόδους, τη **μέθοδο της αντικατάστασης** και τη **μέθοδο των αντίθετων συντελεστών** (ή μέθοδο της απαλοιφής).

■ Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, π.χ. τη (2) ως προς y. Έτσι, το σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ y = 2 - x \end{cases}$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση το y με την παράσταση που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει:

$$3x + 2(2 - x) = 6 \Leftrightarrow 3x + 4 - 2x = 6 \Leftrightarrow x = 2.$$

Οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - x \end{cases}$

Αντικαθιστούμε την τιμή του x στη δεύτερη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο:

$$y = 2 - 2 = 0.$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (x, y) = (2, 0).

Σημειωση

Για να είμαστε βέβαιοι ότι το ζεύγος (2, 0) είναι λύση του συστήματος, αντικαθιστούμε τις τιμές των αγνώστων στις αρχικές εξισώσεις και ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν, δηλαδή κάνουμε **επαλήθευση του συστήματος**. Συγκεκριμένα:

1η εξίσωση: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$

2η εξίσωση: $2 + 0 = 2$

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι:

$$(\Sigma)\ \begin{cases} 3x+2y=6 \\ x+y=2 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot(-2) \end{vmatrix} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} 3x+2y=6 \\ -2x-2y=-4 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε:

$$3x + 2y - 2x - 2y = 6 - 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (2, 0)$, η ίδια προφανώς που βρέθηκε με την προηγούμενη μέθοδο.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2 x 2

Κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ x+y=2 \end{cases}$ που λύσαμε προηγουμένως παριστάνει μια ευθεία γραμμή. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών προσδιορίζει τη λύση του συστήματος, αφού οι συντεταγμένες του (2, 0) επαληθεύουν συγχρόνως τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

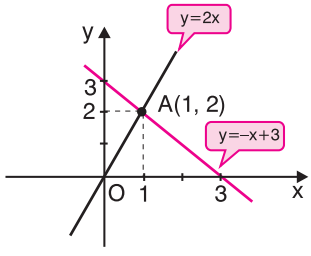
Σχολιο

Αν ένα γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ αποτελείται από δύο εξισώσεις που παριστάνουν ευθείες (όταν $\alpha_1 \neq 0$ ή $\beta_1 \neq 0$ και $\alpha_2 \neq 0$ ή $\beta_2 \neq 0$), τότε έχουμε για τις θέσεις των δύο ευθειών τα εξής:

Οι ευθείες τέμνονται

Παράδειγμα 2

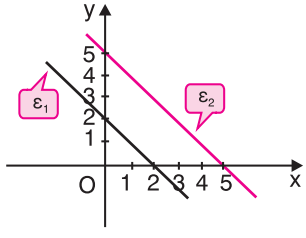
Οι ευθείες ε_1: $x + y = 3$, ε_2: $2x - y = 0$ τέμνονται στο Α(1, 2), οπότε το σύστημα θα έχει **μοναδική λύση** τη $(x, y) = (1, 2)$.



Οι ευθείες είναι παράλληλες

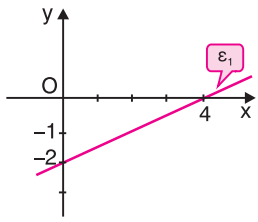
Παράδειγμα 3

Το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ε_1: $x + y = 5$, ε_2: $x + y = 2$ ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$) δεν έχει κοινή λύση, δηλαδή το σύστημα είναι **αδύνατο**.



Οι ευθείες ταυτίζονται

Παράδειγμα 4



Στο σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ε_1: $x - 2y = 4$, ε_2: $-2x + 4y = -8$ παρατηρούμε ότι ε_2: $-2(x - 2y) = -8$ ή ε_2: $x - 2y = 4$, άρα $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$ (δηλαδή οι ευθείες συμπίπτουν).

Έτσι, οι άπειρες λύσεις της πρώτης ικανοποιούν και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Άρα αυτό θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(x, y) = (2y + 4, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Συμπέρασμα

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί:

- **να έχει μοναδική λύση,**
- **να είναι αδύνατο,**
- **να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.**

Σχολιο

Αν $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, τότε το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = 0 \end{cases}$ λέγεται **ομογενές**, που θα έχει μοναδική λύση την (0, 0) (αφού το επαληθεύει) ή θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Για παράδειγμα, το σύστημα $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση τη $(x, y) = (0, 0)$, αφού έχουμε με πρόσθεση κατά μέλη $3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, οπότε και $y = 0$. Προφανώς ένα γραμμικό ομογενές σύστημα αποκλείεται να είναι αδύνατο.

Γραμμικό σύστημα 3 x 3

Μια εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, με έναν τουλάχιστον από τους συντελεστές α, β, γ διάφορο του μηδενός, λέγεται **γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους**.

Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης με τρεις αγνώστους λέγεται κάθε τριάδα αριθμών που την επαληθεύει. Για παράδειγμα, η εξίσωση $3x - 4y + 2z = -9$ έχει μία λύση, την τριάδα (1, 1, –4), αφού την επαληθεύει.

Ένα γραμμικό σύστημα 3 x 3 θα έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \omega = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \omega = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 \omega = \delta_3 \end{cases}$$

Για την **επίλυσή του** χρησιμοποιούμε **δύο μεθόδους**:

α) τη μέθοδο απαλοιφής αγνώστων,

β) τη μέθοδο αντικατάστασης.

ΣΧΟΛΙΑ

1. Ένα γραμμικό σύστημα 3 x 3 (και γενικά ένα ν x ν) μπορεί:

- **να έχει μοναδική λύση,**
- **να είναι αδύνατο,**
- **να έχει άπειρες λύσεις.**

2. Αν οι σταθεροί όροι είναι μηδενικοί, δηλαδή στο σύστημα είναι:
$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, τότε θα είναι **ομογενές**, το οποίο:

- θα έχει **μοναδική λύση** τη **μηδενική** ή
- θα έχει **άπειρες λύσεις**.

Παράδειγμα 5

Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + 2y - 3\omega = 0 \\ 2x - y + \omega = 2 \\ 3x + y - \omega = 3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x + y - 2\omega = 2 & (1) \\ 2x - 3y + 4\omega = 1 & (2) \\ 3x - 2y + 2\omega = 0 & (3) \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x + 3y - 4\omega = 11 \\ x + y - 2\omega = 5 \\ 2x - y - \omega = 1 \end{cases}$

Λύση

α) Προσθέτουμε τη 2η με την 3η εξίσωση και έχουμε $5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$, οπότε είναι:

$$\begin{cases} 1 + 2y - 3\omega = 0 \\ 2 \cdot 1 - y + \omega = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 3\omega = -1 \\ -y + \omega = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 3\omega = -1 \\ -2y + 2\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \omega = 1,$$

άρα και $y = 1$, $\omega = 1$, δηλαδή το σύστημα έχει **μοναδική λύση** τη $(x, y, \omega) = (1, 1, 1)$.

β) Μεταξύ της 2ης και της 3ης εξίσωσης κάνουμε απαλοιφή του x, δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4\omega = 1 \\ 3x - 2y + 2\omega = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y - 12\omega = -3 \\ 6x - 4y + 4\omega = 0 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη είναι $5y - 8\omega = -3$ (4).

Επίσης, μεταξύ της 1ης και της 2ης εξίσωσης κάνουμε απαλοιφή του x, δηλαδή:

$$\begin{cases} x + y - 2\omega = 2 \\ 2x - 3y + 4\omega = 1 \end{cases} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 4\omega = -4 \\ 2x - 3y + 4\omega = 1 \end{cases}$$

Οπότε $-5y + 8\omega = -3$ (5). Παρατηρούμε από τις (4), (5) ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.

γ) Από την 1η και τη 2η εξίσωση έχουμε:

$$\begin{cases} x + 3y - 4\omega = 11 \\ x + y - 2\omega = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4\omega = 11 \\ -x - y + 2\omega = -5 \end{cases}$$

άρα $2y - 2\omega = 6 \Leftrightarrow y = \omega + 3$.

Από την 1η και την 3η εξίσωση έχουμε:

$$\begin{cases} x + 3y - 4\omega = 11 \\ 2x - y - \omega = 1 \end{cases} \left| (-2) \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 6y + 8\omega = -22 \\ 2x - y - \omega = 1 \end{cases}$$

Τότε έχουμε $-7y + 7\omega = -21 \Leftrightarrow y = \omega + 3$, οπότε η 1η εξίσωση γίνεται για $y = \omega + 3$: $x + 3(\omega + 3) - 4\omega = 11 \Leftrightarrow x + 3\omega + 9 - 4\omega = 11 \Leftrightarrow x = \omega + 2$.

Έτσι, το σύστημα θα έχει **άπειρες λύσεις**, τις $(x, y, \omega) = (\omega + 2, \omega + 3, \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 6

Να λυθούν τα 3 x 3 ομογενή συστήματα:

α) $\begin{cases} \mathbf{x - 5y + 3\omega = 0} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{3x - 7y - 2\omega = 0} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{2x + 3y - \omega = 0} & \mathbf{(3)} \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \mathbf{x - y + \omega = 0} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{x + 3y + 5\omega = 0} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{4x - y + 7\omega = 0} & \mathbf{(3)} \end{cases}$

Λύση

α) Έχουμε από τις (1), (2): $\begin{cases} x - 5y + 3\omega = 0 \\ 3x - 7y - 2\omega = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 15y - 9\omega = 0 \\ 3x - 7y - 2\omega = 0 \end{cases}$

Τότε $8y - 11\omega = 0$ (4).

(1), (3): $\begin{cases} x - 5y + 3\omega = 0 \\ 2x + 3y - \omega = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 10y - 6\omega = 0 \\ 2x + 3y - \omega = 0 \end{cases}$

Τότε $13y - 7\omega = 0$ (5).

Από τις (4), (5) προκύπτει ότι $y = \omega = 0$, άρα και $x = 0$, δηλαδή το σύστημα θα έχει **μοναδική λύση** την (0, 0, 0).

β) Έχουμε από τις (1), (2): $\begin{cases} x - y + \omega = 0 \\ x + 3y + 5\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - \omega = 0 \\ x + 3y + 5\omega = 0 \end{cases}$

Έτσι, $4y + 4\omega = 0 \Leftrightarrow y + \omega = 0$, οπότε η (1) γίνεται $x = -2\omega$.

Άρα το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις, τις $(x, y, \omega) = (-2\omega, -\omega, \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Λυμενες Ασκησεις

1.1. **Να λύσετε το σύστημα** $\begin{cases} x + 2y = 7 & (1) \\ 3x - y = 0 & (2) \end{cases}$

α) με τη μέθοδο της αντικατάστασης

β) με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

γ) γραφικά

Λύση

α) Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση. Λύνουμε την (1) ως προς x και έχουμε $x = 7 - 2y$, οπότε η (2) γράφεται:

$3(7 - 2y) - y = 0 \Leftrightarrow 21 - 6y - y = 0 \Leftrightarrow 7y = 21 \Leftrightarrow y = 3$, άρα $x = 7 - 2 \cdot 3$ ή $x = 1$.

Επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (1, 3)$.

β) Προσπαθούμε να κάνουμε απαλοιφή του ενός αγνώστου, πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς, έτσι ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου να γίνουν αντίθετοι.

Έχουμε $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει:

$7x = 7$, δηλαδή $x = 1$, οπότε $y = 3$.

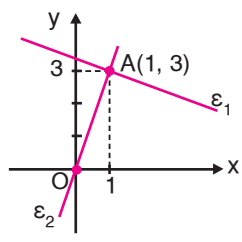
γ) Σχεδιάζουμε τις ευθείες:

ε_1: $x + 2y = 7$ και ε_2: $3x - y = 0$,

που τέμνονται στο σημείο A(1, 3).

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος

$(x, y) = (1, 3)$.



1.2 **Δίνεται η εξίσωση $x + 2y = 4$ (1).**

α) Να γράψετε μία άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δύο εξισώσεις και με βάση το γράφημα να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

Λύση

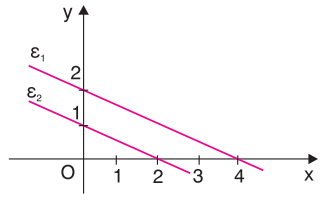
α) Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} x+2y=4 \\ x+2y=2 \end{cases}$ που είναι αδύνατο, διότι τα πρώτα μέλη είναι ίσα, ενώ $2 \neq 4$. Άρα η εξίσωση $x + 2y = 2$ δεν έχει καμία κοινή λύση με την (1).

β) Σχεδιάζουμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x+2y=4$ και $\varepsilon_2 : x+2y=2$.

x	0	4
y	2	0

x	0	2
y	1	0

Παρατηρούμε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, άρα το σύστημα είναι **αδύνατο**.

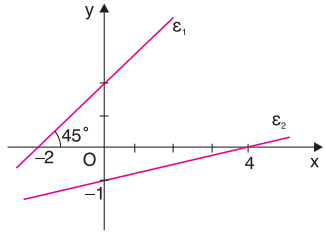


Εξάλλου το σύστημα γράφεται $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$

που είναι αδύνατο, αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι παραπάνω εξισώσεις είναι παράλληλες.

1.3 **α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2.**

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.



Λύση

α) Έχουμε $\varepsilon_1 : y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$, άρα $y = x + \beta$. Επίσης την επαληθεύει το σημείο A(–2, 0), άρα ισχύει $0 = -2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$, οπότε $\varepsilon_1 : y = x + 2$.

Επίσης η εξίσωση της ευθείας ε_2 θα έχει τη μορφή $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$, που την επαληθεύουν τα σημεία B(4, 0) και Γ(0, –1), άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 0=\alpha_2 4+\beta_2 \\ -1=\alpha_2 0+\beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha_2+\beta_2=0 \\ \beta_2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha_2-1=0 \\ \beta_2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2=\frac{1}{4} \\ \beta_2=-1 \end{cases}$$

επομένως $\varepsilon_2 : y = \frac{1}{4}x - 1$.

β) Το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 προκύπτει από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, δηλαδή το σύστημα:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = \frac{1}{4}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - 1 = x + 2 \\ y = \frac{1}{4}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 4x + 8 \\ y = \frac{1}{4}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -12 \\ y = \frac{1}{4}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής τους είναι το M(–4, –2).

1.4. Τι μπορείτε να πείτε για τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \quad (\Sigma_2)\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=3 \end{cases} \quad (\Sigma_3)\begin{cases} 0x+0y=1 \\ 0x+0y=0 \end{cases} \quad (\Sigma_4)\begin{cases} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τις λύσεις τους.

Λύση

- Το (Σ_1) είναι αδύνατο, γιατί $1 \neq 2$.
- Το (Σ_2) έχει άπειρες λύσεις, διότι η δεύτερη εξίσωση γράφεται $3(x + y) = 3$ ή $x + y = 1$. Είναι $y = 1 - x$, άρα οι άπειρες λύσεις έχουν τη μορφή $(x, y) = (x, 1 - x)$, όπου $x \in \mathbb{R}$.
- Το (Σ_3) είναι αδύνατο, διότι η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη.
- Το (Σ_4) έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι όλα τα ζεύγη (x, y), όπου $x, y \in \mathbb{R}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Τα (Σ_3) και (Σ_4) δεν μπορούν να λυθούν γραφικά, γιατί οι εξισώσεις τους δεν παριστάνουν ευθείες.

1.5. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{2x+y}{3} - \frac{4}{9} = \frac{x+y}{2} & (1) \\ \frac{12x-7}{2} - \frac{3(2x+y)}{10} = \frac{7}{10} & (2) \end{cases}$

Λύση

Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα, εκτελούμε τις πράξεις (απαλοιφές παρονομαστών, επιμεριστικές, αναγωγές όμοιων όρων) και το φέρνουμε στη μορφή γραμμικού συστήματος.

- Η (1) γράφεται:

$$18 \cdot \frac{2x+y}{3} - 18 \cdot \frac{4}{9} = 18 \cdot \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 6(2x+y) - 2 \cdot 4 = 9(x+y) \Leftrightarrow$$

$$12x + 6y - 8 = 9x + 9y \Leftrightarrow 12x - 9x + 6y - 9y = 8 \Leftrightarrow 3x - 3y = 8.$$

- Η (2) εξίσωση γίνεται:

$$10 \cdot \frac{12x-7}{2} - 10 \cdot \frac{3(2x+y)}{10} = 10 \cdot \frac{7}{10} \Leftrightarrow$$

$$5(12x-7) - 3(2x+y) = 7 \Leftrightarrow 60x - 35 - 6x - 3y = 7 \Leftrightarrow 54x - 3y = 42.$$

Επομένως έχουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x - 3y = 8 \\ 54x - 3y = 42 \end{cases}$

Προφανώς, μας εξυπηρετεί η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών.

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με -1 και έχουμε:

$$\begin{cases} -3x + 3y = -8 \\ 54x - 3y = 42 \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις εξισώσεις, οπότε είναι:

$51x = 34 \Leftrightarrow x = \frac{34}{51} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. Για $x = \frac{2}{3}$ βρίσκουμε από την (1):

$$3 \cdot \frac{2}{3} - 3y = 8 \Leftrightarrow 2 - 3y = 8 \Leftrightarrow 3y = -6 \Leftrightarrow y = -2.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, -2\right)$.

1.6. Σε ένα κρεοπωλείο είναι κρεμασμένα κοτόπουλα και κουνέλια. Κάποιος μέτρησε 20 κεφάλια και 56 πόδια. Πόσα είναι τα κοτόπουλα και πόσα τα κουνέλια;

Λύση

Έστω x τα κοτόπουλα και y τα κουνέλια. Τότε θα έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x + y = 20 & (1)\ (\text{κεφάλια}) \\ 2x + 4y = 56 & (2)\ (\text{πόδια}) \end{cases}$$

γιατί το κοτόπουλο έχει 2 πόδια, ενώ το κουνέλι 4.

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Είναι $y = 20 - x$, οπότε η (2) γράφεται:

$2x + 4(20 - x) = 56 \Leftrightarrow 2x + 80 - 4x = 56 \Leftrightarrow -2x = -24 \Leftrightarrow x = 12$

και βρίσκουμε $y = 20 - 12 = 8$.

Άρα έχουμε 12 κοτόπουλα και 8 κουνέλια.

1.7. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3|x| - y = 1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x(x + 2) - y(1 - x) = xy + x^2 - 3 \\ \dfrac{x - y}{3} - \dfrac{1 - x}{2} = 1 - y \end{cases}$

Λύση

α) Πρέπει $xy \neq 0$. Πολλαπλασιάζουμε την $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0$ με xy και

έχουμε $xy\dfrac{1}{x} + xy\dfrac{1}{y} = xy \cdot 0 \Leftrightarrow y + x = 0$ ή $x + y = 0$. Έτσι:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 3x - 2(-x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει για λύση τη $(x, y) = \left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{6}{5}\right)$.

β) • Αν $\mathbf{x \geq 0}$, τότε $|x| = x$, δηλαδή έχουμε:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$$
$$7x \quad = 10$$

Με πρόσθεση κατά μέλη είναι $x = \dfrac{10}{7} > 0$ (δεκτή), οπότε:

$y = 3x - 1 \Leftrightarrow y = 3 \cdot \dfrac{10}{7} - 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{23}{7}$, άρα το σύστημα έχει ως λύση τη $(x, y) = \left(\dfrac{10}{7}, \dfrac{23}{7}\right)$.

• Αν $\mathbf{x < 0}$, τότε $|x| = -x$, δηλαδή είναι:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ -3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 8 \\ -6x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 < 0 \text{ (δεκτή) και } y = -3x - 1 \Leftrightarrow y = -3(-2) - 1 \Leftrightarrow$$
$$-5x \quad = 10$$

$y = 5$, δηλαδή $(x, y) = (-2, 5)$.

γ) Έχουμε $\begin{cases} x^2 + 2x - y + xy = xy + x^2 - 3 \\ 6 \cdot \dfrac{x-y}{3} - 6 \cdot \dfrac{1-x}{2} = 6(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2(x-y) - 3(1-x) = 6(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x - 2y - 3 + 3x = 6 - 6y \end{cases}$

Άρα $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 5x + 4y = 9 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y = -12 \\ 5x + 4y = 9 \end{cases}$

Οπότε, με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε $13x = -3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{13}$.

Έτσι, $y = 2x + 3 \Leftrightarrow y = 2 \cdot \left(-\dfrac{3}{13}\right) + 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{33}{13}$.

Τελικά, το σύστημα έχει για λύση τη $(x, y) = \left(-\dfrac{3}{13}, \dfrac{33}{13}\right)$.

1.8. **α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΑΒ, όπου Α(–1, 1) και Β(2, 0).**
β) Να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών ΑΒ, ε_1, ε_2 με
ε_1: $x + y = 1$ και ε_2: $x + y = 2$.

Λύση

α) Επειδή $-1 \neq 2$, άρα η ευθεία ΑΒ // y′y, οπότε θα έχει τη μορφή $y = \alpha x + \beta$, που την επαληθεύουν οι συντεταγμένες των Α, Β:

- Για $x = -1$ και $y = 1$, έχουμε $1 = \alpha(-1) + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = -1$ (1).
- Για $x = 2$ και $y = 0$, έχουμε $0 = \alpha \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 0$ (2).

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη, είναι $3\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{1}{3}$ και $\beta = -2\alpha \Leftrightarrow$ $\beta = \dfrac{2}{3}$. Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

β) Είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, οπότε η ΑΒ τέμνει την ε_1, καθώς και την ε_2. Λύνουμε τότε τα συστήματα:

$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3} \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Άρα $\left(x = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{2}\right)$, δηλαδή η ΑΒ τέμνει την ευθεία ε_1 στο Ρ $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, και

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (y = 0,\ x = 2).$$

Άρα η ΑΒ τέμνει την ε_2 στο σημείο Q(2, 0).

1.9. Να βρεθούν οι τιμές των x, y για τις οποίες η εξίσωση $(2x + 3y - 4) - \kappa(x + y - 1) = 0$ είναι αληθής για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε $(x + y - 1)\kappa - (2x + 3y - 4) = 0$, εξίσωση α′ βαθμού ως προς κ, που θέλουμε να αληθεύει για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, δηλαδή να είναι **ταυτότητα**, οπότε θα πρέπει:

$x + y - 1 = 0$ και $-(2x + 3y - 4) = 0$.

Έτσι, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \text{ και } x = 1 - y \Leftrightarrow x = -1.$$

1.10. Έστω η εξίσωση $(\lambda - 1)x + (\lambda - 2)y = 8$ (1).

α) Να αποδειχθεί ότι η (1) είναι εξίσωση ευθείας ε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πότε η ε είναι παράλληλη στον x′x και πότε παράλληλη στον y′y;

β) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία ε διέρχεται από ένα σταθερό (γνωστό) σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Η (1) δεν παριστάνει ευθεία, όταν έχουμε ταυτόχρονα $\lambda - 1 = 0$ και $\lambda - 2 = 0$, που είναι **αδύνατο**. Έτσι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) είναι εξίσωση ευθείας.

- Αν $\lambda = 1$, τότε ε_1: $y = -8$, που είναι ευθεία παράλληλη στον x′x.
- Αν $\lambda = 2$, τότε ε_2: $x = 8$, που είναι ευθεία παράλληλη στον y′y.

β) Στο **α)** θέσαμε όπου $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$ και βρήκαμε αντίστοιχα δύο ευθείες, τις ε_1: $y = -8$, ε_2: $x = 8$, που οι εξισώσεις τους προέρχονται από την (1). Προφανώς οι ε_1, ε_2 θα τέμνονται στο σημείο P(8, −8), που είναι σταθερό, γιατί οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1). Πραγματικά έχουμε:

$(\lambda - 1) \cdot 8 + (\lambda - 2)(-8) = 8 \Leftrightarrow 8\lambda - 8 - 8\lambda + 16 = 8$, που ισχύει.

1.11. Η εξίσωση μιας παραβολής (C) έχει τη μορφή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (1). Να βρεθεί η εξίσωσή της, αν η (C) διέρχεται από τα σημεία Α(1, 0), Β(–2, 21), Γ(3, –4).

Λύση

Επειδή το σημείο Α(1, 0) ανήκει στη C, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή την (1), άρα $0 = \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$ (2).

Όμοια, τα (–2, 21) και (3, –4) θα επαληθεύουν την (1), δηλαδή:

$21 = \alpha(-2)^2 + \beta(-2) + \gamma \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta + \gamma = 21$ (3),

$-4 = \alpha \cdot 3^2 + \beta \cdot 3 + \gamma \Leftrightarrow 9\alpha + 3\beta + \gamma = -4$ (4).

Έτσι, έχουμε το σύστημα των (2), (3), (4), δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (2) \\ 4\alpha - 2\beta + \gamma = 21 & (3) \\ 9\alpha + 3\beta + \gamma = -4 & (4) \end{cases}$$

Από τις (2), (3) κάνουμε απαλοιφή του γ, δηλαδή $\begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 4\alpha - 2\beta + \gamma = 21 \end{cases}$

Με πρόσθεση είναι $3\alpha - 3\beta = 21 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 7$ (5).

Επίσης, από τις (2), (4) $\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 9\alpha + 3\beta + \gamma = -4 \end{cases}$

Τότε $8\alpha + 2\beta = -4 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = -2$ (6).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (5), (6) και έχουμε $5\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$, οπότε $\beta = 1 - 7 = -6$ και $\gamma = 5$. Τελικά (C): $y = x^2 - 6x + 5$.

Ερωτησεις Κατανοησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ (Σ) Ή ΛΑΘΟΣ (Λ)

Να σημειώσετε το Σωστό (Σ) ή το Λανθασμένο (Λ) των παρακάτω ισχυρισμών:

1.12. Η εξίσωση $5x + 7y = 20$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(x, y) = \left(\frac{20 - 7y}{5}, y\right)$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. **Σ** **Λ**

1.13. Η ευθεία με εξίσωση $y = \frac{1}{2}$ είναι παράλληλη στον άξονα y΄y. **Σ** **Λ**

1.14. Η ευθεία με εξίσωση $x = -5$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

1.15. Οι ευθείες ε_1: $x = -\sqrt{3}$ και ε_2: $y = \frac{1}{3}$ είναι κάθετες. **Σ** **Λ**

1.16. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει ευθεία. **Σ** **Λ**

1.17. Το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ είναι αδύνατο, άρα οι αντίστοιχες ευθείες είναι παράλληλες. **Σ** **Λ**

1.18. Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ** **Λ**

1.19. Το σύστημα $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + y = 0 \end{cases}$ είναι αδύνατο. **Σ** **Λ**

1.20. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2 x 2 έχει δύο τουλάχιστον λύσεις, τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ** **Λ**

1.21. Το σύστημα $\begin{cases} 0x + y = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση τη $(x, y) = (3, 1)$. **Σ** **Λ**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α΄ Ομάδα

1.22. Δίνεται η εξίσωση $x + 2y = 7$.

α) Να εξετάσετε ποια από τα ζεύγη είναι λύσεις της εξίσωσης:
$(0, 7)$, $(-1, 4)$, $(7, 0)$, $(1, 3)$, $(-2, 2)$.

β) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης $x + 2y = 7$.

1.23. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\kappa x + (\kappa + 2)y = 1$ παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του κ.

1.24. Να λυθεί γραφικά το σύστημα $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

1.25. Να αποδείξετε γραφικά ότι το σύστημα
$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 9 \end{cases}$ δεν έχει λύσεις (είναι αδύνατο).

1.26. Να λυθούν με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 4x - 5y = 13 \\ y = \frac{1}{2}x + 3{,}4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$

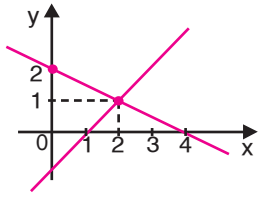
1.27. Να λυθούν με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 5x - 7y = 47 \\ 2x + 7y = 16 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

1.28. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x - 5 = 2(y+1) - 8 \\ 2(x - 1) - 9 = 3(1 - 2y) \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \frac{2x - 1}{3} + \frac{y + 2}{4} = 4 \\ \frac{x - y}{3} = \frac{x + 3}{2} - 3 \end{cases}$

1.29. Ποιο σύστημα παριστάνει το διπλανό σχήμα;



1.30. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \\ x + y = 24 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 7 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 9 \end{cases}$

1.31. Ένα ξενοδοχείο έχει συνολικά 32 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια, στα οποία υπάρχουν συνολικά 77 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

1.32. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = \alpha \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

α) να έχει άπειρο πλήθος λύσεων **β)** να είναι αδύνατο

1.33. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $3x - 2y = 4$ και ε_2: $6x - 4y = \gamma$.

α) Να βρεθούν οι συντελεστές διεύθυνσης των ε_1, ε_2.

β) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου γ για τις οποίες οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται;

γ) Για ποιες τιμές της παραμέτρου γ οι ευθείες:

i) είναι παράλληλες; **ii)** ταυτίζονται;

1.34. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 3y + \omega = -15 \\ 2x + y - 2\omega = 6 \\ -3x + y + \omega = 5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x + \psi - \omega = 1 \\ x + 2\psi + \omega = 8 \\ 3x - \psi + 2\omega = 7 \end{cases}$

1.35. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x + 2y + \omega = 18 \\ x + 2y + \omega = 9 \\ x + y + 3\omega = -1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x + 3\psi = 5 \\ 2\omega - y = 1 \\ 7x - 9\omega = 3 \end{cases}$

1.36. Τρεις αριθμοί είναι ανάλογοι των 6, 5, 3 και έχουν άθροισμα 70. Να βρεθούν οι αριθμοί.

1.37. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = -2 \\ y + \omega = 5 \\ \omega + x = 7 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x + y - \omega = 2 \\ y + \omega - x = 5 \\ \omega + x - y = 7 \end{cases}$

1.38. Η εξίσωση μιας παραβολής είναι $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και $\alpha \neq 0$. Να βρείτε την εξίσωσή της, αν διέρχεται από τα σημεία (1, 2), (–1, 0) και (2, –3).

Β΄ Ομάδα

1.39. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α(2, 1) και Β(–1, 2). Στη συνέχεια να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες.

1.40. Να λυθούν οι εξισώσεις:

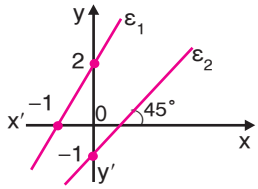
α) $|x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0$

β) $(\alpha + 2\beta + 3)^2 + (-2\alpha + \beta - 1)^2 = 0$

1.41. Να βρεθούν οι τιμές των x, y, ώστε η εξίσωση $x - 2y + 1 + \lambda(x - y) = 0$ να αληθεύει για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

1.42. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 15. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων, παίρνουμε αριθμό κατά 27 μονάδες μεγαλύτερο. Ποιος είναι ο αριθμός;

1.43. Να βρεθεί το σύστημα των εξισώσεων που έχουν γραφικές παραστάσεις τις ευθείες ε_1, ε_2 του διπλανού σχήματος. Μετά να βρεθεί το κοινό σημείο των ε_1, ε_2.



1.44. Μια ομάδα μαθητών έγραψε διαγώνισμα στην τάξη απαντώντας σε 10 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση ο κάθε μαθητής έπαιρνε 5 μονάδες, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση έχανε 3 μονάδες. Ο Βαγγέλης έγραψε 26 μονάδες. Να βρείτε πόσες απαντήσεις του Βαγγέλη ήταν σωστές.

1.45. Να βρείτε τις τιμές των x, y για τις οποίες η εξίσωση $(x - 2y - 3) + \kappa(2x - 3y - 5) = 0$ είναι αληθής για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

1.46. Τα ψηφία ενός τριψήφιου αριθμού έχουν άθροισμα 15. Αν γράψουμε τα ψηφία του με αντίθετη σειρά, προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 198. Αν εναλλάξουμε τη θέση του πρώτου και του δεύτερου ψηφίου, προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 90. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.