Σωτήρης Ε. Λουρίδας,
Κώστας Σάλαρης, Ανδρέας Τριανταφύλλου

Μαθηματικά για διαγωνισμούς

(Ε.Μ.Ε., Β.Μ.Ο., J.B.M.O., M.M.C., I.M.O.)

- Θεωρία
- Μεθοδολογία
- Υποδειγματικές ασκήσεις

για απαιτητικούς διαγωνισμούς

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr

Σωτήρης Ε. Λουρίδας,
Κώστας Σάλαρης, Ανδρέας Τριανταφύλλου.

Μαθηματικά
για Διαγωνισμούς

(Ε.Μ.Ε., Β.Μ.Ο., J.B.M.O., M.M.C., I.M.O.)

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΑΤΑΚΗ

Θέση υπογραφής δικαιούχου/ων δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας,
εφόσον η υπογραφή προβλέπεται από τη σύμβαση.

Εκδόσεις Πατάκη – Βιβλία για την εκπαίδευση / Μαθηματικά
Σωτήρης Ε. Λουρίδας, Κώστας Σάλαρης, Ανδρέας Τριανταφύλλου. *Μαθηματικά για Διαγωνισμούς (Ε.Μ.Ε., Β.Μ.Ο., J.B.M.O., M.M.C., I.M.O.)*
Υπεύθυνος έκδοσης: Νίκος Κύρος
Διορθώσεις: Κώστας Σίμος
Σελιδοποίηση: Σπύρος Ρένεσης
Φιλμ, μοντάζ: Μαρία Ποινιού-Ρένεση

Πρώτη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Φεβρουάριος 2018
Κ.Ε.Τ. 9823 – Κ.Ε.Π. 1006/17
ISBN 978-960-16-6236-7

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665, ΦΑΞ: 210.36.50.069
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078
ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ ΒΟΡΕΙΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ: ΚΟΡΥΤΣΑΣ (ΤΕΡΜΑ ΠΟΝΤΟΥ – ΠΕΡΙΟΧΗ Β΄ ΚΤΕΟ),
570 09 ΚΑΛΟΧΩΡΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, Τ.Θ. 1213, ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15, ΦΑΞ: 2310.70.63.55
Web site: http://www.patakis.gr • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

Γράμμα προς μαθητές, γονείς και εκπαιδευτικούς

Αγαπητές φίλες, αγαπητοί φίλοι

Η λογική είναι το χαρακτηριστικό όπλο του ανθρώπου που τον κάνει κυρίαρχο πάνω στον γαλάζιο πλανήτη Γη. Με τη λογική ο άνθρωπος αξιοποιεί τα δεδομένα της ζωής και παράγει πρόοδο και πολιτισμό. Σε αυτό το περιβάλλον αναπτύσσεται και η μαθηματική νοημοσύνη μέσω πλέον της μαθηματικής λογικής, της διαίσθησης και της αφαιρετικής ικανότητας. Η μαθηματική νοημοσύνη είναι η ιδιαίτερη ικανότητα κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και θεωριών, και ως εκ τούτου, εκτός των άλλων, με αυτήν επιτυγχάνεται η επίλυση δύσκολων μαθηματικών προβλημάτων. Ξεκινώντας τη συγκεκριμένη συγγραφή, που τη θεωρήσαμε απολύτως αναγκαία, βασιστήκαμε στο βαθύ μας πιστεύω ότι η ιδιαίτερη αυτή ικανότητα μπορεί να καλλιεργηθεί ακόμα περισσότερο με συστηματική διδασκαλία και εξάσκηση σε ένα μαθηματικό περιβάλλον που ελκύει. Αποτελεί πιστεύω μας ότι αυτή η ικανότητα ενυπάρχει στο άτομο, και με κατάλληλη προσπάθεια θα έρθει τελικά στην επιφάνεια και θα λειτουργήσει. Πρέπει να λάβουμε σοβαρά υπόψη ότι είναι κορυφαία η κάθε στιγμή επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, αφού είναι η στιγμή που ενθουσιάζει, πείθει για τη διαίσθηση και την επιλογή των ορθών λογικών συνδυασμών, και καταξιώνει τον λύτη κυρίως στον ίδιο του τον εαυτό. Ένα σημαντικά πολύ ελκυστικό περιβάλλον για τα μαθηματικά είναι εκείνο των μαθηματικών διαγωνισμών, τόσο των εγχώριων που διοργανώνει θεσμικά η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία στις φάσεις «Θαλής», «Ευκλείδης», «Αρχιμήδης», «Προκριματικός Διαγωνισμός», αλλά και ο διαγωνισμός Καγκουρό που διοργανώνεται από τον καθηγητή κ. Μιχάλη Λάμπρου, όσο και των διεθνών BMO (Balkan Mathematical Olympiads), JBMO (Junior Balkan Mathematical Olympiads), MMC (Mediterranean Mathematics Competition), IMO (International Mathematical Olympiads). Θεωρήσαμε λοιπόν αναγκαία για το περιβάλλον των μαθηματικών διαγωνισμών τη συγγραφή αυτή, που στόχο έχει την ενδυνάμωση ενός μαθηματικού όντος ως λύτη προβλημάτων (Τέχνη επίλυσης προβλημάτων, που διεθνώς αποδίδεται ως art of problem solving). Για τον σκοπό αυτό κρίναμε ως λίαν απαραίτητη την αναφορά σε θέματα θεωρίας, που συμπληρώνει ουσιαστικά τη σχολική γνώση, βοηθώντας έτσι τους μαθητές στην κατανόηση της λειτουργίας λεπτών μαθηματικών εννοιών, που όμως βοηθούν καθοριστικά στην επίλυση ακόμη περισσότερων προβλημάτων. Στη θεωρία, αλλά και μέσω των προβλημάτων, εντάχθηκαν και οι μαθηματικές μέθοδοι επίλυσης. Η επιλογή των προβλημάτων έγινε με επιδίωξη να γίνει πιο κατανοητή η θεωρία μέσω της επίλυσής τους, αλλά και να προπονηθεί σε ευρύτερη θεματολογία ο διαγωνιζόμενος ως λύτης. Για την επίλυση των προβλημάτων λάβαμε απόλυτα υπόψη τον απαραίτητο ρόλο της Αναλυτικής Μεθόδου, ως μεθόδου σκέψης που οδηγεί στη Σύνθεση.

Μέσω των διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, συγκροτούνται οι Εθνικές Ομάδες των νέων (έως 15,5 ετών) και των μεγάλων (15,5 ετών και άνω) που εκπροσωπούν την πατρίδα μας στους διεθνείς διαγωνισμούς, ***η οποία το έτος 2017 κατέκτησε στην IMO τη 12η θέση παγκοσμίως, που ήταν ταυτόχρονα και η πρώτη θέση από τις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης***. Στην πατρίδα μας πλέον αυξάνονται ραγδαία οι σχολικές μονάδες που, καθ' υπέρβαση των ωρών διδασκαλίας της υποχρεωτικής ύλης, δημιουργούν με μεγάλη επιτυχία διδακτικούς θύ-

λακες στο πνεύμα της θεματολογίας των μαθηματικών διαγωνισμών. Ταυτόχρονα έχουμε και τη δημιουργία κατασκηνωτικών εγκαταστάσεων, όπου εκεί διδάσκονται μαθηματικά υπό την αιγίδα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Θα ήταν παράλειψή μας, τέλος, αν δεν αναφέραμε τους ορίζοντες που ανοίγονται μέσω των διαγωνισμών αυτών. Αν ένας διαγωνιζόμενος πάρει διεθνές μετάλλιο από BMO ή IMO (χρυσό ή χάλκινο ή αργυρό), ανοίγονται αυτόματα οι δρόμοι για κορυφαία διεθνή πανεπιστήμια, αλλά και εδώ στην πατρίδα μας εισάγεται χωρίς εξετάσεις «καθ' υπέρβαση» στις αντίστοιχες σχολές της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης όπου τα μαθηματικά είναι μάθημα κατεύθυνσης. Ας επισημάνουμε εδώ ότι τα μετάλλια δεν είναι όπως στον κλασικό αθλητισμό. Δηλαδή το διεθνές χρυσό ή ασημένιο ή αργυρό μαθηματικό μετάλλιο δεν είναι μοναδικό, κάτι που θα καθιστούσε τη στόχευση απρόσιτη. Στους διαγωνισμούς αυτούς έχουμε ποσοστό χρυσών μεταλλίων, ένα μεγαλύτερο ποσοστό αργυρών μεταλλίων, και ένα ακόμα μεγαλύτερο ποσοστό χάλκινων μεταλλίων.

Η συγγραφή αυτή έχει στόχο να είναι όσο το δυνατόν ουσιαστικά χρήσιμη ως λειτουργικό εργαλείο κυρίως στους μαθητές του Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου. Όμως είναι χρήσιμη και για μαθητές των τάξεων Β΄ και Γ΄ Λυκείου, για την ουσιαστική συμπλήρωση γνώσεων προς την κατεύθυνση αυτή, τη βελτίωση δηλαδή ακόμα περισσότερο της μαθηματικής τους απόδοσης. Ταυτόχρονα είναι χρήσιμη για τους καθηγητές και γενικότερα τους διδάσκοντες, που προσπαθούν να προωθήσουν τη μαθηματική σκέψη, καλλιεργώντας τη στον όμορφο κόσμο των νέων, ώστε να βελτιωθεί η μαθηματική τους απόδοση. Η συγγραφή αυτή ενδιαφέρει επίσης τους γονείς που θέλουν να συμπορευτούν με τα παιδιά τους στον αγώνα αυτό, αλλά και κάθε θετικό επιστήμονα που μέσα του δεν έχει ακόμα «σβήσει» η φλόγα του λύτη.

Από τη θέση αυτή θα θέλαμε να αναφερθούμε στον θετικό ρόλο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και των παραρτημάτων της, ως θεματοφυλάκων των μαθηματικών διαγωνισμών, που ως γεγονός αποτελεί μία απάντηση στην πρόκληση της εποχής. Σίγουρα ευχαριστούμε τους προέδρους της διαχρονικά. Ιδιαιτέρως ευχαριστούμε τους προέδρους της Καθηγητές κ. Αλεξανδρή Νικόλαο, κ. Εξαρχάκο Θεόδωρο, κ. Δημάκο Γιώργο, κ. Καλογερόπουλο Γρηγόρη, κ. Μπόλη Θεόδωρο, κ. Φελλούρη Ανάργυρο, οι οποίοι ως πρόεδροι της ΕΜΕ, κατά τη θητεία τους, προσέφεραν τα κατά το δυνατόν μέγιστα επί των μαθηματικών διαγωνισμών. Επίσης ευχαριστούμε τον Καθηγητή κ. Λάμπρου Μιχάλη, τον άνθρωπο που μέσω του διαγωνισμού Καγκουρό προσφέρει ουσιαστικά στον θεσμό των διαγωνιστικών μαθηματικών.

Ευχαριστούμε ιδιαιτέρως τον κ. Στέργιο Αντωνακούδη, που από πολύ νέος διέπρεψε ως μαθηματικό ταλέντο υψηλών προδιαγραφών –με διεθνή Ολυμπιακά Μαθηματικά μετάλλια (BMO και IMO) και συνεχίζοντας τώρα να διαπρέπει ως καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Cambridge– και ο οποίος επεξεργάστηκε θέματα του βιβλίου αυτού, κάνοντας χρήσιμες παρατηρήσεις.

Τέλος ευχαριστούμε όλους εκείνους τους συναδέλφους ανά την επικράτεια που είναι θιασώτες των διαγωνιστικών μαθηματικών και αφιερώνουν ατέλειωτες ώρες για να εμπνεύσουν με ουσιαστικά δείγματα γραφής τους νέους της πατρίδας μας, ώστε να εισέλθουν στον μαγευτικό κόσμο των μαθηματικών διαγωνισμών.

Με εκτίμηση,
οι συγγραφείς

Υ.Γ.: Ιδιαίτερα ευτυχής είναι για εμάς η συγκυρία το βιβλίο μας να εκδίδεται το έτος 2018, που έχει ανακηρυχθεί έτος Μαθηματικών ενώ συμπληρώνονται και 100 χρόνια από την ίδρυση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ
ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εισαγωγή

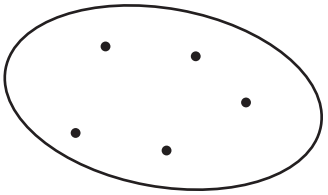
Μπορούμε να καταλάβουμε, χρησιμοποιώντας τις αισθήσεις μας, ότι δύο όμοια αντικείμενα δεν είναι πάντα ίδιου μεγέθους. Οδηγούμαστε έτσι στην έννοια της *διάταξης*, ότι δηλαδή το ένα αντικείμενο είναι μεγαλύτερο από ένα άλλο. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι κάποια διαφορετικά αντικείμενα έχουν κοινά χαρακτηριστικά, τα οποία μας οδηγούν στη δημιουργία κοινής ονοματολογίας για αυτά: *δέντρο, πρόβατο, άνθρωπος, λιοντάρι, ποτάμι,* κτλ. Έτσι δημιουργείται διαισθητικά η έννοια που αργότερα ονομάστηκε σύνολο.

Επόμενη είναι η έννοια της ισότητας, ότι δηλαδή μια ομάδα ομοειδών αντικειμένων έχει ίδιο αριθμό αντικειμένων με μια άλλη ομάδα. Έτσι βλέπουμε ότι τρία δέντρα και τρία πρόβατα έχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι εκφράζονται, ως προς τον αριθμό, ή το πλήθος τους, με τον αριθμό 3. Το πλήθος δηλαδή των τριών δέντρων είναι ίδιο με το πλήθος των τριών προβάτων, ή το πλήθος των τριών πορτοκαλιών, κτλ. Έτσι η έννοια της ισότητας προκύπτει ως αποτέλεσμα μέτρησης που δίνει το ίδιο πλήθος. Στη φύση, ο κανόνας είναι η διάταξη (**Hilbert**).

1.1 ΣΥΝΟΛΑ

1.1.1 Η έννοια του συνόλου

Διάγραμμα Venn



Η έννοια του συνόλου είναι «πρωταρχική», την κατανοούμε δηλαδή διαισθητικά. Σύμφωνα με τον θεμελιωτή της θεωρίας συνόλων **G. Candor**, **σύνολο** ονομάζεται μια «συλλογή» αντικειμένων διαφορετικών ανα δύο μεταξύ τους, τα οποία όμως έχουν μία κοινή ιδιότητα, η οποία καθορίζει αν ένα τυχαίο αντικείμενο είναι ή όχι στοιχείο της συλλογής αυτής. Με άλλα λόγια, η εν λόγω ιδιότητα καθορίζει αν ένα τυχαίο αντικείμενο περιέχεται ή δεν περιέχεται στη συλλογή αυτή. Θεωρούμε ότι τα στοιχεία μιας τέτοιας συλλογής σαν να βρίσκονται εντός μιας περιοχής (μέσα σε ένα «κουτί»), την οποία συμβολίζουμε με άγκιστρα $\{\quad\}$ ή με διάγραμμα Venn.

Συνήθως συμβολίζουμε ένα σύνολο με κεφαλαίο γράμμα. Αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο x είναι στοιχείο ενός συνόλου A, δηλαδή ότι το x **ανήκει** στο σύνολο A, ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε είναι $x \in A$. Αντίθετα, αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι το στοιχείο α **δεν ανήκει** στο σύνολο A, τότε ο συμβολισμός είναι $\alpha \notin A$.

Παράδειγμα 1

Το σύνολο $A = \{1, 2, 5, 7, 9\}$ είναι το σύνολο των περιττών (μονών) μονοψήφιων αριθμών. Κατά συνέπεια, $5 \in A$, ενώ $12 \notin A$.

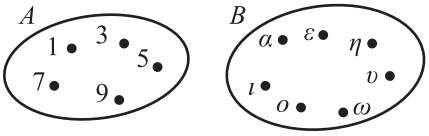
Παράδειγμα 2

Το σύνολο των φωνηέντων της αλφαβήτου είναι το $B = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$. Κατά συνέπεια, $\alpha \in B$, $\rho \notin B$.

1.1.2 Τρόποι που καθορίζουν ένα σύνολο

Οι τρόποι καθορισμού ενός συνόλου είναι δύο: ο αναγραφικός και ο περιγραφικός.

- **Αναγραφικός:** Εδώ **φαίνονται τα στοιχεία που αποτελούν το σύνολο** και ο χώρος μέσα στον οποίο βρίσκονται.
  Για παράδειγμα, είδαμε ότι $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$, **ή, με *διαγράμματα Venn*,**



- **Περιγραφικός:** Εδώ αναφέρεται, με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, **η κοινή ιδιότητα των στοιχείων του συνόλου**, χωρίς αυτά να «φαίνονται»: Λέμε π.χ. ότι το σύνολο αποτελείται και από τα στοιχεία x που έχουν την ιδιότητα ... Συμβολικά: x / … (που σημαίνει «x τέτοιο, ώστε…»). Π.χ.:
  $A = \{x / x \text{ μονοψήφιος περιττός αριθμός}\}$,
  $B = \{x / x \text{ φωνήεν της ελληνικής αλφαβήτου}\}$.

Ο αναγραφικός (αναγραφή των στοιχείων του συνόλου) και ο περιγραφικός τρόπος (περιγραφή της ιδιότητας που έχουν τα στοιχεία αυτά) καθορισμού συνόλου είναι **ισοδύναμοι**, δηλαδή καθένας από αυτούς συνεπάγεται αυτόματα τον άλλο.

1.1.3 Το κενό («άδειο») σύνολο

Το σύνολο $\{x / x \text{ διψήφιος αριθμός μικρότερος του } 8\}$ (περιγραφικός τρόπος) συνεπάγεται το σύνολο $\{\ \}$ (αναγραφικός τρόπος), αφού δεν υπάρχει διψήφιος αριθμός μικρότερος του 8. Πρόκειται για το λεγόμενο κενό σύνολο, που συμβολίζεται $\varnothing$. Άρα γράφουμε $\varnothing = \{\ \}$. **Παρατηρούμε ότι** $\varnothing \neq \{0\}$, $\varnothing \neq 0$.

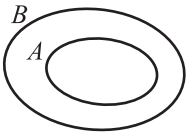
1.1.4 Υποσύνολο συνόλου

Έστω τα σύνολα $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Βλέπουμε ότι όλα τα στοιχεία του συνόλου A είναι ταυτόχρονα και στοιχεία του συνόλου B.

Καταλήγουμε έτσι στον εξής ορισμό: Έστω σύνολα A, B. **Το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B**, αν, και μόνο αν, τα στοιχεία του A είναι και στοιχεία του B (συμβολίζουμε $A \subseteq B$).

Συνοψίζοντας, έχουμε:

Αν για κάθε $x \in A$ έχουμε $(\Rightarrow)$ $x \in B$, τότε $A \subseteq B$, και αντίστροφα. Με βάση τα διαγράμματα Venn, παίρνουμε:

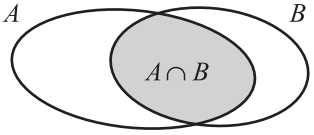


Βασικές προτάσεις

1. Δύο σύνολα είναι ίσα, όταν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία (χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά που είναι γραμμένα), π.χ. $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$.
2. Δύο σύνολα A, B είναι ίσα, αν, και μόνο αν, $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.
   Από πλευράς μαθηματικού συμβολισμού, έχουμε: $A = B$, όταν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Αντίστροφα, αν ισχύει $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε ισχύει και $A = B$. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **αντισυμμετρική.** Η πρόταση «δύο σύνολα A, B είναι ίσα, αν, και μόνο αν, $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$» αποτελεί την κύρια μέθοδο απόδειξης ότι δύο σύνολα είναι ίσα.
3. Κάθε σύνολο A είναι υποσύνολο του εαυτού του. Πράγματι, κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του A. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **ανακλαστική** ή **αυτοπαθής**.
4. Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.
5. Αν το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B $(A \subseteq B)$, και το σύνολο B είναι υποσύνολο του συνόλου Γ $(B \subseteq \Gamma)$, τότε το σύνολο A θα είναι και υποσύνολο του συνόλου Γ $(A \subseteq \Gamma)$. Δηλαδή αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **μεταβατική**. Π.χ., αν $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ και $\Gamma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, παρατηρούμε ότι $A \subseteq B$, $B \subseteq \Gamma$, και τελικά ότι $A \subseteq \Gamma$.

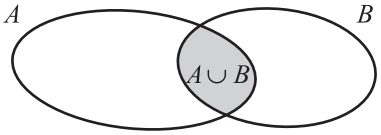
1.1.5 Τρεις βασικές πράξεις μεταξύ συνόλων

i. **Τομή** δύο συνόλων A, B ονομάζεται το σύνολο των κοινών τους στοιχείων. Συγκεκριμένα ορίζουμε $A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$. Με βάση τα διαγράμματα του Venn, έχουμε:



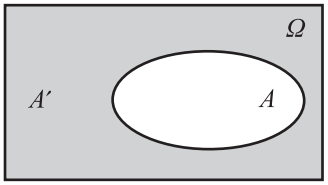
Π.χ. $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{\alpha, 3, 5, \beta, \gamma\} \Rightarrow A \cap B=\{3, 5\}$. Αν η τομή δύο συνόλων είναι το κενό σύνολο, τότε τα σύνολα ονομάζονται **ξένα μεταξύ τους**.

ii. Ένωση δύο συνόλων A, B ονομάζεται το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία και των δύο συνόλων.
Συγκεκριμένα, ορίζουμε $A \cup B=\{x : x \in A$ ή $x \in B\}$. Με βάση τα διαγράμματα του Venn, η ένωση είναι το σκιασμένο μέρος:



Π.χ. $A=\{1, 3, 5, 7\}$ και $B=\{\alpha, 3, 5, \beta, \gamma\} \Rightarrow A \cup B=\{1, \alpha, 3, 5, 7, \beta, \gamma\}$.

iii. Συμπληρωματικό συνόλου *A*. Έστω σύνολο Ω τέτοιο, ώστε το σύνολο A να είναι υποσύνολό του, δηλαδή να έχουμε $A \subseteq \Omega$. Τότε συμπληρωματικό του συνόλου A ως προς το σύνολο Ω καλείται το σύνολο A', που αποτελείται από τα στοιχεία του Ω που δεν είναι στοιχεία του A, δηλαδή $A'=\{x : x \in \Omega$ και $x \notin A\}$. Με βάση τα διαγράμματα του Venn, έχουμε:



Π.χ., $\Omega=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, 1, 2\}$, $A=\{\alpha, \beta, \gamma, 2\} \Rightarrow A'=\{1, \delta\}$.
Δύο βασικοί τύποι που ισχύουν είναι οι εξής:
$A \cap A'=\varnothing$ και $A \cup A'=\Omega$.

1.1.6 Ισοδύναμα σύνολα

Δύο σύνολα A, B λέγονται ισοδύναμα όταν τα στοιχεία τους A αντιστοιχίζονται επακριβώς (ένα προς ένα) με τα στοιχεία του B, χωρίς δηλαδή να «περισσεύει» κανένα. Έτσι, τα σύνολα $A=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B=\{\chi, \psi, \zeta, \omega\}$ είναι ισοδύναμα, αφού $\alpha \leftrightarrow \chi$, $\beta \leftrightarrow \psi$, $\gamma \leftrightarrow \zeta$, $\delta \leftrightarrow \omega$. Ο συμβολισμός τότε είναι $A \sim B$. Προφανώς δύο σύνολα με το ίδιο πλήθος στοιχείων είναι ισοδύναμα.
Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:
Αν $A=\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B=\{\chi, \gamma, \zeta\}$, $\Gamma=\{\kappa, \lambda, \mu\}, \ldots$, τότε τα σύνολα $A, B, \Gamma, \ldots$ είναι ισοδύναμα, αφού:
$\alpha \leftrightarrow \chi \leftrightarrow \kappa \leftrightarrow \ldots$, $\beta \leftrightarrow \gamma \leftrightarrow \lambda \leftrightarrow \ldots$, $\gamma \leftrightarrow \zeta \leftrightarrow \mu \leftrightarrow \ldots$

Παρατήρηση 1: Η παραπάνω πρόταση είναι πολύ σημαντική για τη θεμελίωση των φυσικών αριθμών.

Παρατήρηση 2: Για κάθε σύνολο που δεν είναι κενό, υπάρχουν άπειρα σύνολα ισοδύναμα προς αυτό.

Παρατήρηση 3: Για τα ισοδύναμα σύνολα, ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
1. $A \sim A$ (ανακλαστική).
2. Αν $A \sim B$, τότε $B \sim A$ (συμμετρική).
3. Αν $A \sim B$, και $B \sim \Gamma$, τότε $A \sim \Gamma$ (μεταβατική).

1.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

- ***Λογική*** είναι η επιστήμη η εξετάζουσα τους θεμελιώδεις νόμους της νοήσεως και τους θεμελιώδεις νόμους του ορθώς νοείν και ερευνάν την αλήθειαν» (Νικόλαος Σούλιας, *ΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΝΩΣΙΟΛΟΓΙΑΣ*, ΟΕΔΒ, εν Αθήναις, 1956).

- ***Μαθηματική πρόταση:*** Στα μαθηματικά, οι προτάσεις χαρακτηρίζονται ***αποκλειστικά*** και μόνο από το γεγονός ότι καθεμία από αυτές μπορεί να είναι μόνο ***αληθής*** ή ***ψευδής***. Έτσι, στη μαθηματική λογική λέμε ότι κάθε πρόταση παίρνει τιμή αληθείας είτε ***«αληθή»*** είτε ***«ψευδή»***, χωρίς να μας ενδιαφέρει άλλο γνώρισμά της. Από εδώ και στο εξής λοιπόν, ο όρος ***πρόταση*** σημαίνει ***μαθηματική πρόταση***. Η τιμή αληθείας ***«αληθής»*** μιας πρότασης συμβολίζεται ***α***, ενώ η τιμή αληθείας ***«ψευδής»*** συμβολίζεται ***ψ***.

Παραδείγματα

1. Η πρόταση «Ο αριθμός 4 είναι ζυγός» είναι ***αληθής***.
2. Η πρόταση «Ο αριθμός $\sqrt{3}$ είναι ρητός» είναι ***ψευδής***.
3. Η φράση «Αύριο θα βρέξει» **δεν** είναι πρόταση στα μαθηματικά του προτασιακού λογισμού, αφού **δεν** μπορεί να χαρακτηριστεί ως ***αληθής*** ή ***ψευδής.***

- ***Βασικά είδη προτάσεων:***
  Έχουμε δύο είδη προτάσεων, τις ***απλές*** και τις ***σύνθετες***.
  Απλή θεωρείται κάθε πρόταση που χαρακτηρίζεται άμεσα ως ***αληθής*** ή ***ψευδής***.
  Σύνθετη θεωρείται κάθε πρόταση που αποτελεί σύνδεση ***απλών προτάσεων*** μέσω των λεγόμενων ***λογικών συνδέσμων***, οι οποίοι μπορούν να χαρακτηριστούν και ως ***λογικές πράξεις*** για τις προτάσεις που συνδέουν, καθώς παράγουν νέες προτάσεις. Έτσι, το σύνολο των προτάσεων, εφοδιασμένο με τις πράξεις των λογικών συνδέσμων, αποτελεί την ***άλγεβρα των προτάσεων***. Η τιμή αληθείας μίας σύνθετης πρότασης εξαρτάται από την τιμή αληθείας των λογικών προτάσεων που την αποτελούν, καθώς και από τον τρόπο διάταξής τους μέσα στη σύνθετη πρόταση. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να γνωρίζουμε τη «συμπεριφορά» των λογικών συνδέσμων (ή πράξεων), που συνδέουν τις προτάσεις και οι οποίοι είναι οι: **«και»** *(συμβ. $\wedge$)*, **«ή»** *(συμβ. $\vee$)*, **«εάν…, τότε»** *(συμβ. $\Rightarrow$)*, **«ισοδυναμεί»** *(συμβ. $\Leftrightarrow$)*, **«άρνηση»** *(συμβ. $-$)*.

1.2.1 Οι λογικοί σύνδεσμοι

Οι λεγόμενοι ***πίνακες αληθείας, ή αληθοπίνακες,*** παρουσιάζουν τη «συμπεριφορά» των λογικών συνδέσμων (πράξεων).

i. ***«και» (συμβ. $\wedge$):***

Έστω δύο προτάσεις p, q. Τότε «παράγεται» η πρόταση $p \wedge q$. Για την τιμή αληθείας της πρότασης αυτής, έχουμε:

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

Συμπεραίνουμε επομένως ότι **η πρόταση** $p \wedge q$ **είναι αληθής** μόνο όταν ***και οι δύο*** προτάσεις p, q είναι αληθείς.

ii. ***«ή» (συμβ. $\vee$):***

Έστω δύο προτάσεις p, q. Τότε «παράγεται» η πρόταση $p \vee q$. Για την τιμή αληθείας της πρότασης αυτής, έχουμε:

p	q	$p \vee q$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

Συμπεραίνουμε επομένως ότι **η πρόταση** $p \vee q$ **είναι αληθής**, εκτός της περίπτωσης που ***και*** οι δύο προτάσεις p, q είναι ψευδείς, οπότε και η $p \vee q$ είναι ψευδής.

iii. «εάν …, τότε» ***(συμβ. $\Rightarrow$):***

Έστω δύο προτάσεις p, q. Τότε «παράγεται» η πρόταση $p \Rightarrow q$. Στην περίπτωση αυτή η p ονομάζεται ***υπόθεση*** ή ***ικανή συνθήκη,*** και η q ***συμπέρασμα*** ή ***αναγκαία συνθήκη.*** Για την τιμή αληθείας της πρότασης αυτής, έχουμε:

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

Συμπεραίνουμε επομένως ότι η πρόταση $p \Rightarrow q$ είναι αληθής, εκτός της περίπτωσης που η υπόθεση p είναι πρόταση ***αληθής,*** και το συμπέρασμα q πρόταση ***ψευδής***.

Παρατήρηση: Αντίθετα από τη δεύτερη γραμμή του παραπάνω πίνακα, κατανοούμε διαισθητικά ότι από μία «αλήθεια» δεν είναι δυνατόν να προκύπτει «ψέμα». Εμάς όμως μας ενδιαφέρει, συνολικά, η τιμή αληθείας του «λογικού πακέτου» $p \Rightarrow q$, δηλαδή η ορθότητα των λογικών βημάτων από την υπόθεση p στο συμπέρασμα q, και μόνο αυτή. Άρα ο συλλογισμός $\left(1 = 1 \Rightarrow 1 = -1\right)$ είναι ψευδής πρόταση $\left(\alpha \Rightarrow \psi\right)$, ενώ οι προτάσεις που ακολουθούν είναι αληθείς:

$\left(1 = 1 \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1\right)$ αφού $\left(\alpha \Rightarrow \alpha\right)$,

$\left(1 = -1 \Rightarrow 1^2 = \left(-1\right)^2 \Rightarrow 1 = 1\right)$ αφού $\left(\psi \Rightarrow \alpha\right)$,

$\left(1 = -1 \Rightarrow 1^3 = \left(-1\right)^3 \Rightarrow 1 = -1\right)$ αφού $\left(\psi \Rightarrow \psi\right)$.

iv. «*ισοδυναμεί*» *(συμβ. $\Leftrightarrow$):*

Έστω δύο προτάσεις p, q. Τότε «παράγεται» η πρόταση $p \Leftrightarrow q$. Δύο προτάσεις p, q θεωρούνται ισοδύναμες όταν έχουν την ίδια τιμή αληθείας, δηλαδή όταν και οι δύο είναι αληθείς, ή και οι δύο είναι ψευδείς. Αυτό αποδίδεται ως εξής: «η πρόταση p είναι ισοδύναμη με την πρόταση q», ή «η p είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την q», ή «p αν, και μόνο αν, q». Για την τιμή αληθείας της πρότασης $p \Leftrightarrow q$, έχουμε:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

v. «*άρνηση*» *(συμβ. $-$)*:

Η άρνηση της πρότασης p συμβολίζεται $\overline{p}$, και ισχύει:

p	$\overline{p}$
α	ψ
ψ	α

Παρατήρηση: Για οποιαδήποτε πρόταση p, ισχύει πάντοτε $p = \overline{\overline{p}}$.

vi. *Ταυτολογίες – Αντιφάσεις*

- Αν μια πρόταση p παίρνει τιμές από ένα σύνολο $A = \left\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\right\}$, όπου τα στοιχεία α, β, γ, … είναι προτάσεις, τότε η p λέγεται **προτασιακή μεταβλητή**.

- Κάθε έκφραση που αποτελείται από προτασιακές μεταβλητές και λογικούς συνδέσμους, ή από προτασιακές μεταβλητές, σταθερές προτάσεις και λογικούς συνδέσμους, και γίνεται μια (σύνθετη) πρόταση, τότε, όταν οι προτασιακές μεταβλητές αντικατασταθούν από συγκεκριμένες σταθερές προτάσεις, λέγεται **λογικός τύπος**. Δηλαδή ένας λογικός τύπος θα είναι της μορφής

$p(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu)$ όταν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu$ οι αρχικές προτάσεις που περιλαμβάνονται στον τύπο και συνδέονται με λογικούς συνδέσμους.

- **Ταυτολογία** ονομάζεται ο λογικός τύπος που παίρνει τη σταθερή τιμή «**αληθής**» σε οποιονδήποτε συνδυασμό τιμών αληθείας των λογικών μεταβλητών του.
  Π.χ. ο λογικός τύπος $p \vee \overline{p}$ είναι ταυτολογία, γιατί, όπως φαίνεται από τον πίνακα αληθείας του, παίρνει πάντοτε τη σταθερή τιμή «αληθής».

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
α	ψ	α
ψ	α	α

- **Αντίφαση** ονομάζεται ο λογικός τύπος που παίρνει τη σταθερή τιμή «**ψευδής**», σε οποιονδήποτε συνδυασμό τιμών αληθείας των λογικών μεταβλητών του.
  Π.χ. ο λογικός τύπος $p \wedge \overline{p}$ είναι αντίφαση, διότι, όπως φαίνεται από τον πίνακα αληθείας του, παίρνει πάντοτε τη σταθερή τιμή «ψευδής».

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ

vii. ***Ισοδύναμοι λογικοί τύποι***

Δύο λογικοί τύποι $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu)$, $Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu)$, όπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ οι αρχικές προτάσεις των τύπων, είναι ισοδύναμοι, όταν για όλες τις τιμές των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ οι τύποι P, Q παίρνουν την ίδια τιμή (***«αληθής»*** ή ***«ψευδής»***). Η παραπάνω σχέση συμβολίζεται $P \sim Q$. Για παράδειγμα, έστω
i) $\left(\overline{p \Rightarrow q}\right) \sim \left(p \wedge \overline{q}\right)$, ii) $\left(\overline{p \wedge q}\right) \sim \left(\overline{p} \vee \overline{q}\right)$, iii) $\left(\overline{p \vee q}\right) \sim \left(\overline{p} \wedge \overline{q}\right)$. Η ισοδυναμία **(*i*)** δείχνει τον τρόπο εφαρμογής της μεθόδου της «***απαγωγής σε άτοπο***», στην απόδειξη της αλήθειας μίας πρότασης. Οι τύποι **(*ii*), (*iii*)** οδηγούν στην απόδειξη των τύπων του ***De Morgan*** $\left(A \cap B\right)' = A' \cup B'$, $\left(A \cup B\right)' = A' \cap B'$.

Βασικές συμπεριφορές λογικών τύπων:

Πίνακας 1

p	q	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$p \wedge \overline{q}$
α	α	ψ	α	ψ	ψ
α	ψ	α	ψ	α	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ

Πίνακας 2

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \wedge q}$
α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α	α
ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α	α
ψ	ψ	α	α	α	α	α	α

Πίνακας 3

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
α	α	ψ	ψ	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	α

1.3 ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Στο κενό σύνολο $\varnothing = \{\ \}$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 0 (μηδέν).

Στο σύνολο $A = \{\alpha\}$ και σε κάθε ισοδύναμό του, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 1.

Στο σύνολο $B = \{\kappa, \lambda\}$ και σε κάθε ισοδύναμό του, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 2.

Στο σύνολο $\Gamma = \{\mu, \nu, \rho\}$ και σε κάθε ισοδύναμό του, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 3, κ.ο.κ.

Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, … κτλ. είναι λοιπόν οι πληθικοί αριθμοί (που δηλώνουν δηλαδή πλήθος στοιχείων) για τα σύνολα $\varnothing$, A, B, Γ, … αντιστοίχως. Ας «επιχειρήσουμε» λοιπόν τον εξής ορισμό:

Ορίζουμε ως **σύνολο των φυσικών αριθμών** το σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \nu, \nu+1, \ldots\}$. Τον αριθμό 0 τον ονομάζουμε μηδέν, τον αριθμό 1 τον ονομάζουμε ένα ή μονάδα, τον αριθμό 2 τον ονομάζουμε δύο, κτλ.

Σύνολο των «καθαρών» φυσικών αριθμών ονομάζεται το σύνολο $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, \nu, \nu+1, \ldots\}$. Δηλαδή ισχύει $N = N^* U \{0\}$.

1.3.1 Η έννοια της διάταξης

Το σύνολο $\varnothing = \{\ \}$ δεν έχει στοιχεία. Όπως είδαμε, σε αυτό αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 0, με την έννοια ότι το κενό σύνολο δεν έχει στοιχεία, άρα έχει 0 στοιχεία. Κατά συνέπεια, το «πλήθος στοιχείων» του κενού συνόλου $\varnothing = \{\ \}$ είναι 0.

Στο σύνολο $\{\alpha\}$ και κάθε ισοδύναμό του, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 1, με την έννοια ότι το πλήθος των στοιχείων είναι 1. Η διαισθητική αντίληψη μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι ο αριθμός 0 εκφράζει μικρότερη ποσότητα από εκείνη που εκφράζει ο

αριθμός 1 (δηλαδή ο αριθμός 0 είναι μικρότερος του αριθμού 1), ή ότι ο 1 είναι μεγαλύτερος του 0 (συμβολίζουμε τότε $0 < 1$).

Στο σύνολο $\{\kappa, \lambda\}$ και σε κάθε ισοδύναμό του, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 2, με την έννοια ότι το πλήθος των στοιχείων είναι 2. Οδηγούμαστε και εδώ στη σχέση $1 < 2$. Άρα, γενικεύοντας, συμπεραίνουμε ότι $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < \nu < \nu + 1 < \ldots$ Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε $2 = 1 + 1$ (το 2 είναι, ουσιαστικά, δύο μονάδες μαζί, 1 συν 1). Ομοίως συμπεραίνουμε ότι $3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1$, κτλ.

Σημαντική ιδιότητα: Παρατηρώντας διάφορα σύνολα και γενικεύοντας τις διαπιστώσεις αυτές, έχουμε:
Αν α, β, γ φυσικοί αριθμοί που έχουν οριστεί ως «πλήθος στοιχείων» αντίστοιχων συνόλων A, B, Γ, με $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε $\alpha < \gamma$ (**μεταβατική ιδιότητα**). Αν το σύνολο A δεν είναι ισοδύναμο με το σύνολο B, και ο φυσικός αριθμός α είναι ο αντίστοιχος πληθικός αριθμός του A, ενώ ο φυσικός αριθμός β είναι ο αντίστοιχος πληθικός αριθμός του B, τότε $\alpha < \beta$ ή $\beta < \alpha$.

Σημαντική παρατήρηση: Αν α, β φυσικοί αριθμοί, και πληθικοί αντίστοιχα αριθμοί δύο συνόλων A, B, τότε είναι δυνατό να έχουμε: $\alpha = \beta$ ή $\alpha < \beta$ ή $\alpha > \beta$, αποκλειόμενης της περίπτωσης να ισχύουν δύο από αυτές τις σχέσεις ταυτόχρονα.

1.3.2 Το σύνολο των φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}^*)$

Το σύνολο αυτό, δηλαδή το $\mathbb{N}^*$, έχει ελάχιστο στοιχείο το 1, δηλαδή τη μονάδα. Έχει επίσης την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο του $\nu > 1$ είναι άθροισμα ακέραιων μονάδων. Π.χ. ο αριθμός 5 είναι άθροισμα πέντε μονάδων, δηλαδή $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Γενικά έχουμε $\nu = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\nu \text{ φορές}}$, με το 1 (μονάδα) να επαναλαμβάνεται ως προσθετέος ν φορές.

Το $\mathbb{N}^*$ έχει επίσης την εξής ιδιότητα: για κάθε στοιχείο του ν, ο αριθμός $\nu + 1$ είναι επίσης στοιχείο του. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν έχει μέγιστο στοιχείο, δηλαδή δεν έχει στοιχείο μεγαλύτερο από όλα τα άλλα στοιχεία του (που σημαίνει ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ).

1.3.3 Αρχικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$

- Ονομάζουμε αρχικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$ κάθε υποσύνολό του της μορφής $\mathbb{N}_{\nu_0} = \{1, 2, \ldots, \nu_0\}$, που περιλαμβάνει δηλαδή τους φυσικούς αριθμούς μέχρι και τον ν_0, στον οποίο τερματίζει.
  Π.χ. $\mathbb{N}_1 = \{1\}$, $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$, $\mathbb{N}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ κτλ.

  Συμπέρασμα: Κάθε φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός ορίζει ένα αντίστοιχο, αρχικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$, και αντίστροφα.

- **Σχέση ισότητας στους φυσικούς αριθμούς**
  Δύο φυσικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός είναι ίσοι, αν, και μόνο αν, ορίζουν το ίδιο αρχικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$.

- **Πληθικός αριθμός συνόλου**
  Έστω σύνολο A. Αν $A = \varnothing$, τότε ο **πληθικός αριθμός** του $A = \varnothing$ είναι το 0. Αν $A \neq \varnothing$, και το σύνολο A είναι ισοδύναμο με ένα αρχικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$, ορίζουμε ως **πληθικό αριθμό** του συνόλου A εκείνον ακριβώς τον αριθμό που ορίζει το αρχικό αυτό υποσύνολο, εκφράζοντας ταυτόχρονα και το πλήθος των στοιχείων του A.

1.3.4 Ιδιότητες όσον αφορά την ισότητα δύο φυσικών αριθμών

1. $\alpha = \alpha$ (ανακλαστική ή αυτοπαθής).
2. Αν $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$ (συμμετρική).
3. Αν $\alpha = \beta$ και $\beta = \gamma$, τότε $\alpha = \gamma$ (μεταβατική).

Σημαντική παρατήρηση: Ισχύουν τα εξής:

i) $\mathbb{N}_\alpha = \mathbb{N}_\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$, ii) $\left(\mathbb{N}_\alpha \subseteq \mathbb{N}_\beta \text{ και } \mathbb{N}_\alpha \neq \mathbb{N}_\beta\right) \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

1.3.5 Η έννοια της εξίσωσης στο σύνολο των φυσικών αριθμών $(\mathbb{N})$

Αν α, β δεδομένοι φυσικοί αριθμοί, και ζητείται φυσικός αριθμός x τέτοιος, ώστε να αληθεύει η ισότητα $\alpha + x = \beta$ (1), τότε η (1) ονομάζεται **εξίσωση ως προς x στους φυσικούς αριθμούς,** ή **εξίσωση ως προς x, με σύνολο αναφοράς το σύνολο των φυσικών αριθμών $(\mathbb{N})$.**

Λύση ή **ρίζα** της εξίσωσης (1), στους φυσικούς αριθμούς, είναι ένας φυσικός αριθμός x_0 (αν υπάρχει), τέτοιος, ώστε $\alpha + x_0 = \beta$, ενώ για να υπάρχει ο x_0 θα πρέπει $\alpha \leq \beta$. Π.χ. η εξίσωση $5 + x = 12$, στο σύνολο $\mathbb{N}$, έχει ως λύση τον φυσικό αριθμό 7 $(5 + 7 = 12)$.

Μπορεί να έχουμε και εξισώσεις με σύνολο αναφοράς το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, με περισσότερους από έναν αγνώστους.

Π.χ. η εξίσωση $5x = 7 + y$ έχει ως μία λύση, στους φυσικούς αριθμούς, το ζεύγος $x = 2$ και $y = 3$, αφού πράγματι ισχύει $5 \cdot 2 = 7 + 3$. Επίσης μια άλλη λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι το ζεύγος $x = 3$ και $y = 8$, καθότι πράγματι $5 \cdot 3 = 7 + 8$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε περισσότερα από ένα ζεύγη λύσεων.

Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ (3) είναι το σύνολο των ζευγών (x_0, y_0), αν υπάρχουν, που επαληθεύουν την ισότητα (3), δηλαδή όταν ισχύει πράγματι $\alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma$. Εννοείται βέβαια ότι, για την αποδοχή μίας λύσης, καθοριστικό ρόλο παίζει το σύνολο αναφοράς της εξίσωσης.

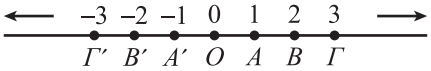
1.3.6 Η έννοια της αφαίρεσης μεταξύ δύο φυσικών αριθμών

Αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς, τότε ορίζουμε ως διαφορά του μεγαλύτερου μείον τον μικρότερο ή ίσο από αυτόν, ως εξής: Έστω δύο φυσικοί α, β με $\alpha \leq \beta$. Τότε ορίζουμε ως διαφορά τους $\beta - \alpha$, στο σύνολο των φυσικών αριθμών, τη λύση x_0 της εξίσωσης $x + \alpha = \beta$. Άρα οι εκφράσεις $x_0 + \alpha = \beta$ και $x_0 = \beta - \alpha$ είναι ισοδύναμες. Αν $\beta < \alpha$, η διαφορά $\beta - \alpha$ δεν ορίζεται στους φυσικούς αριθμούς. Έτσι έχουμε στο

σύνολο των φυσικών αριθμών και τις εξής περιπτώσεις: i) $x - \alpha = \beta \Leftrightarrow x = \alpha + \beta$, ii) $\alpha - x = \beta \Leftrightarrow x = \alpha - \beta \quad (\beta \leq \alpha)$.

1.4 ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μερικές φορές, οι φυσικοί αριθμοί από μόνοι τους δεν επαρκούν για την ακριβή μέτρηση ή περιγραφή ενός φαινομένου. Π.χ., έστω ευθύς δρόμος ε:



Από σημείο εκκίνησης O, θέλουμε να μετρήσουμε 3 βήματα. Κάνοντας λοιπόν κίνηση προς τα δεξιά, το **1ο** «βήμα» μας «πατάει» στο σημείο A όπου αντιστοιχίζουμε το 1, το **2ο** «βήμα» μας (θεωρούμενο ίδιου ανοίγματος) «πατάει» στο σημείο B όπου αντιστοιχίζουμε το 2, και το **3ο** βήμα μας (θεωρούμενο ίδιου ανοίγματος) «πατάει» στο σημείο Γ, όπου αντιστοιχίζουμε τον αριθμό 3. Κάνοντας όμως κίνηση προς τα αριστερά, έχουμε πάλι τοποθέτηση των ίδιων φυσικών αριθμών 1, 2, 3 σε αντίστοιχα, συμμετρικά ως προς το 0 σημεία, A', B', Γ'. Δημιουργείται έτσι η ανάγκη να δηλώσουμε τη **φορά της κίνησης** (δηλαδή προς τα πού κινούμαστε). Εισάγουμε λοιπόν τη διάκριση μέσω των συμβόλων + (συν) και – (πλην). Με άλλα λόγια, κινούμενοι προς τα δεξιά χρησιμοποιούμε το +, ενώ κινούμενοι προς τα αριστερά χρησιμοποιούμε το – . Όταν τοποθετούμε τα «σύμβολα» + και – μπροστά από φυσικό αριθμό, προκύπτει **ακέραιος αριθμός,** και τότε τα σύμβολα αυτά δηλώνουν το ***πρόσημό*** του, δηλαδή αν είναι θετικός ή αρνητικός αντίστοιχα αριθμός.

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να εκφράσουμε πολλά φαινόμενα. Για παράδειγμα, λέμε ότι έχουμε στην Αφρική θερμοκρασία 30°C πάνω από το 0, δηλαδή +30°C, ενώ στη Νορβηγία λέμε ότι έχουμε θερμοκρασία 3°C κάτω από το 0, δηλαδή –3°C.

1.4.1 Ορισμός ακέραιων αριθμών

Ως σύνολο των ακεραίων ορίζουμε το σύνολο:
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -(\nu+1), -\nu, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \nu, \nu+1, \ldots\}$.

Βλέπουμε αμέσως ότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Οι φυσικοί αριθμοί που μπροστά τους είτε δεν έχουν τίποτα είτε έχουν το πρόσημο **+** ονομάζονται **θετικοί ακέραιοι,** ενώ οι φυσικοί αριθμοί που μπροστά τους βρίσκεται το πρόσημο **–** ονομάζονται **αρνητικοί ακέραιοι.**

Η διάταξη των ακεραίων κατά σειρά μεγέθους έχει ως εξής:
$\ldots < -(\nu+1) < -\nu < \ldots -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots < \nu < \nu+1 < \ldots$

Σημαντική παρατήρηση: Για λόγους συντομίας, θεωρούμε γνωστές από το σχολείο τις πράξεις μεταξύ ακεραίων, καθώς επίσης και τη συμπεριφορά των προσήμων κατά τις πράξεις αυτές.

- **Η έννοια της αφαίρεσης μεταξύ δύο ακεραίων.**
  Αν έχουμε δύο ακεραίους, ορίζουμε τη διαφορά τους ως εξής:

Έστω δύο ακέραιοι α, β. Τότε ορίζουμε ως διαφορά τους $\beta - \alpha$ τη λύση x_0 της εξίσωσης $x + \alpha = \beta$. Άρα οι εκφράσεις $x_0 + \alpha = \beta$ και $x_0 = \beta - \alpha$ είναι ισοδύναμες. Έτσι έχουμε στο σύνολο των ακεραίων και τις εξής περιπτώσεις:

i) $x - \alpha = \beta \Leftrightarrow x = \alpha + \beta$ ii) $\alpha - x = \beta \Leftrightarrow x = \alpha - \beta$

Παρατήρηση: Θα θεωρήσουμε γνωστή την πράξη: «Γινόμενο ακέραιων αριθμών», στο πνεύμα των σχολικών βιβλίων.

Σε πολλά θέματα και ασκήσεις, καλούμαστε να εφαρμόσουμε την **επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση ή την αφαίρεση:** $\alpha(\beta \pm \gamma) = \alpha\beta \pm \alpha\gamma$, η οποία εφαρμόζεται και αντίστροφα. Π.χ.:

α) $2x - 2y = 2(x - y)$.

β) Βρείτε το αποτέλεσμα των πράξεων: $y + 2(x + 4) - 3(y - 7)$, αν $x - y = 0$.

Απάντηση

$y + 2(x + 4) - 3(y - 7) = y + 2x + 8 - 3y + 21 =$

$= 2x - 2y + 29 = 2(x - y) + 29 = 29.$

1.4.2 Απόλυτη τιμή (ή μέτρο) ακέραιου αριθμού

Έστω α ακέραιος αριθμός $(\alpha \in \mathbb{Z})$. Τότε ο αντίστοιχος φυσικός του αριθμός ορίζεται ως **απόλυτη τιμή,** ή **μέτρο** του α, και συμβολίζεται $|\alpha|$, δηλαδή έχουμε $|0| = 0$, $|+5| = 5$, $|-5| = 5$, κτλ. Παρατηρούμε ότι, για τυχόντα ακέραιο α, ισχύει $0 \le |\alpha|$, με την ισότητα να ισχύει, αν, και μόνο αν, $\alpha = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δώσουμε τον εξής ορισμό:

$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$. Προφανώς ισχύει $|\alpha| \ge 0$, για κάθε ακέραιο α.

Είναι επίσης σαφές πως, αν γνωρίζουμε ή δίνεται ότι $\alpha \le 0$, τότε μπορούμε να γράψουμε $\alpha = -|\alpha|$.

Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή ενός ακέραιου αριθμού αντιστοιχίζεται στην απόσταση του από το 0 (μηδέν).

Βασική πρόταση

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες, που αποδεικνύονται με διάκριση περιπτώσεων για τη θετικότητα ή αρνητικότητα των αριθμών, ώστε να εξαχθούν τα σύμβολα των απολύτων:

i) $\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow -|\alpha| \le \alpha \le |\alpha|$,

ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow |\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$,

iii) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow |\alpha| - |\beta| \le \big||\alpha| - |\beta|\big| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ ή

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow |\beta| - |\alpha| \le \big||\alpha| - |\beta|\big| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$.

1.4.3 Δυνάμεις ακέραιων αριθμών (με εκθέτες φυσικούς αριθμούς)

Έστω ακέραιος α και φυσικός αριθμός $\nu \geq 2$. Αν γράψουμε το ζεύγος (α, ν) ως α^{ν}, εννοούμε το γινόμενο του α επί τον εαυτό του ν φορές, δηλαδή $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha\alpha\alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$. Το ζεύγος α^{ν} ονομάζεται **δύναμη του α στη ν**. Ορίζουμε $\alpha^0 = 1(\alpha \neq 0)$, $\alpha^1 = 1$. **Η «δύναμη» 0^0 ΔΕΝ ορίζεται**.

Σημαντική παρατήρηση: Ισχύουν οι ιδιότητες:
$\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha^{2\rho} \geq 0$,
$\alpha \in \mathbb{Z}$, και $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow |\alpha^{\nu}| = |\alpha|^{\nu}, |\alpha^{2\nu}| = |\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu} \geq 0$.

1.4.4 Ιδιότητες δυνάμεων στους ακεραίους με εκθέτη φυσικό αριθμό

1. $\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$
2. $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$

1.4.5 Βασικοί τύποι πολλαπλασιασμού – ταυτότητες στους ακέραιους αριθμούς

Αναφέρουμε κάποιους βασικούς τύπους πολλαπλασιασμών, που ονομάζονται **ταυτότητες.** Είναι ισότητες που ισχύουν **οποιαδήποτε τιμή** κι αν έχουν οι μεταβλητές τους. Με τις ταυτότητες, μας δίνεται η δυνατότητα να απλοποιήσουμε τη διαδικασία μελέτης, αλλά και επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

1. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$,
2. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$,
3. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$,
4. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$,
5. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$,
6. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$,
7. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$,
8. (**Euler**) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$, ή
$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2\right]$$

Απόδειξη

1. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha(\alpha+\beta) + \beta(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$,
2. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha(\alpha-\beta) + \beta(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$,
3. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha(\alpha-\beta) + \beta(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$
4. $(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$
$\alpha(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + \beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$
$\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

5. $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=$
$=\alpha(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-\beta(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=$
$\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2-\beta^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
6. $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+\beta(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=$
$\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+\beta^3$
7. $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=$
$\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$
8. (**Euler**) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=$
$=\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+$
$+\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2-\alpha^2\beta-\alpha\beta\gamma-\gamma\alpha^2+$
$+\beta\alpha^2+\beta^3+\beta\gamma^2-\alpha\beta^2-\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma=$
$=\gamma\alpha^2+\gamma\beta^2+\gamma^3-\alpha\beta\gamma-\beta\gamma^2-\gamma^2\alpha=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$
ή $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=$
$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha)=$
$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)=$
$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$

1.4.6 Η διαιρετότητα στους ακέραιους αριθμούς $(\mathbb{Z})$

Έστω δύο ακέραιοι α, β. Λέμε ότι ο β **διαιρεί** τον α, ή ότι ο α **διαιρείται** με τον β (κάτι που συμβολίζεται $\beta \mid \alpha$), αν, και μόνο αν, υπάρχει ακέραιος κ τέτοιος, ώστε $\alpha=\kappa\beta$. Τότε ο β ονομάζεται **διαιρέτης** του α, και βέβαια ισχύει $|\beta|\le|\alpha|$. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\kappa$ ή $\frac{\alpha}{\kappa}=\beta$.

Π.χ. $2 \mid 6$, αφού $2\cdot 3=6$, οπότε έχουμε $\frac{6}{2}=3$ ή $\frac{6}{3}=2$.

Παρατήρηση: Ο αριθμός κ ορίζεται μονοσήμαντα, δηλαδή είναι μοναδικός.
Έστω δύο ακέραιοι α, β. **Λέμε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του β, αν, και μόνο αν, υπάρχει ακέραιος $\kappa\,(\kappa\in\mathbb{Z})$ τέτοιος, ώστε $\alpha=\kappa\beta$.**

1.4.7 Βασικές προτάσεις

1. Ο αριθμός 0 διαιρείται από όλους τους ακέραιους αριθμούς, αφού $0=\beta 0$ για κάθε ακέραιο β. Άρα ο αριθμός 0 είναι πολλαπλάσιο οποιουδήποτε ακεραίου.

2. Ο αριθμός 0 είναι διαιρέτης μόνο του εαυτού του. Πράγματι, αν $0 \mid x$, για ακέραιο αριθμό x θα υπάρχει ακέραιος κ τέτοιος, ώστε $x = \kappa 0 \Rightarrow x = 0$.

   Μεθοδολογικό σχόλιο: Αν καταλήξουμε σε σχέση $\beta \mid \alpha$, με α, β ακεραίους τέτοιους, ώστε $|\alpha| < |\beta|$, τότε πρέπει να ισχύει $\alpha = 0$.

3. Κάθε ακέραιος α διαιρείται από τους αριθμούς -1, 1, $-\alpha$, α.
4. Οι ακέραιοι $-\alpha$, α έχουν τους ίδιους διαιρέτες.
5. Αν $\beta \mid \alpha$, τότε ισχύει επίσης $\beta \mid \kappa\alpha$, όπου κ ακέραιος αριθμός.
6. Αν α, $\beta \neq 0$, με $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \alpha$, τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

Απόδειξη

Με βάση το $\alpha \mid \beta$, παίρνουμε $\beta = \kappa\alpha$, ενώ με βάση το $\beta \mid \alpha$, παίρνουμε $\alpha = \lambda\beta$. Άρα έχουμε $\kappa\lambda\beta = \beta \Rightarrow \kappa\lambda = 1$. Επομένως ισχύει $\kappa = \lambda = 1$, ή $\kappa = \lambda = -1$. Αν $\kappa = \lambda = 1$, έχουμε $\alpha = \beta$,αν $\kappa = \lambda = -1$, παίρνουμε $\alpha = -\beta$.

7. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \neq 0$, τότε ισχύει $|\alpha| \leq |\beta|$.
8. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid \kappa\beta + \lambda\gamma$ για κάθε κ, $\lambda \in \mathbb{Z}$.
9. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \kappa\beta + \gamma$, τότε $\alpha \mid \gamma$.

Απόδειξη

Επειδή $\alpha \mid \beta$, θα υπάρχει ακέραιος λ τέτοιος, ώστε $\beta = \alpha\lambda$. Αφού ισχύει η $\alpha \mid \kappa\beta + \gamma$, θα υπάρχει ακέραιος μ τέτοιος, ώστε $\kappa\beta + \gamma = \alpha\mu$.
Από την τελευταία αυτή σχέση, και βασιζόμενοι στη $\beta = \alpha\lambda$, παίρνουμε:
$\kappa\alpha\lambda + \gamma = \alpha\mu \Rightarrow \gamma = \alpha\mu - \kappa\alpha\lambda \Rightarrow \gamma = \alpha(\mu - \kappa\lambda) \Rightarrow \alpha \mid \gamma$.

1.5 ΠΡΩΤΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- **Πρώτος** ονομάζεται κάθε ακέραιος α που έχει δύο μόνο θετικούς διαιρέτες. Λέμε λοιπόν ότι ένας φυσικός αριθμός είναι πρώτος, αν έχει ως διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και τη μονάδα.
  Άμεση συνέπεια: Αν ο αριθμός α είναι πρώτος, και ο ακέραιος β διαιρεί τον α, τότε $\beta = -1$ ή $\beta = 1$ ή $\beta = -\alpha$ ή $\beta = \alpha$.
  Παραδείγματα πρώτων αριθμών: $-3, -2, 2, 3, 5, 11, 13, 17, \ldots$

- **Σύνθετος** ονομάζεται κάθε ακέραιος με περισσότερους από δύο θετικούς διαιρέτες. Προφανώς οι αριθμοί -1, 1, δεν είναι ούτε πρώτοι ούτε σύνθετοι, αφού έχουν έναν μόνο θετικό διαιρέτη, τον 1.
  Παραδείγματα σύνθετων αριθμών: $-9, -6, -4, 4, 6, 8, 21$.

1.5.1 Θεώρημα

«Οι θετικοί ακέραιοι που είναι πρώτοι αριθμοί, είναι άπειροι. Δηλαδή για κάθε πρώτο αριθμό, υπάρχει πάντα ένας πρώτος μεγαλύτερός του».

Την απόδειξη θα τη δούμε σε επόμενη παράγραφο, όταν αναφερθούμε στη μέθοδο της **«απαγωγής σε άτοπο»**.

1.6 ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ Ή ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Έστω οι αριθμοί $\alpha = 243$, $\beta = 12$. Παρατηρούμε αρχικά ότι $12 < 243$. Διαιρούμε τον 243 με τον 12. Παρατηρούμε ότι $243 = 12 \cdot 20 + 3$.

Γενικεύοντας, έχουμε:

Για κάθε ζεύγος ακεραίων α, β με $\beta \neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικοί ακέραιοι π, υ τέτοιοι, ώστε $\alpha = \beta\pi + \upsilon$ και $0 \leq \upsilon < |\beta| \Leftrightarrow 0 \leq \upsilon \leq |\beta| - 1$, δηλαδή ο υ παίρνει μία από τις τιμές $1, 2, 3, \ldots, |\beta| - 1$. Η ισότητα που προκύπτει ονομάζεται **ισότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης του *α* διά του *β***. Ο α ονομάζεται **διαιρετέος**, ο β **διαιρέτης**, ο π **πηλίκο,** και ο υ **υπόλοιπο**. Χωρίς χρήση μαθηματικών συμβολισμών, λέμε ότι ο **διαιρετέος της αλγοριθμικής διαίρεσης ισούται με τον διαιρέτη επί το πηλίκο, συν το υπόλοιπο.**

Σημαντική παρατήρηση 1: Όταν επιλέξουμε έναν αριθμό, έστω $\beta \in \mathbb{Z}^*$, λέμε ότι κάθε αριθμός μπορεί να διαιρεθεί με αυτόν, αφήνοντας υπόλοιπο ή όχι. Τα δυνατά υπόλοιπα που αφήνει είναι $0, 1, 2, \ldots, |\beta| - 1$.

Έτσι έχουμε $|\beta|$ το πλήθος σύνολα, το 1ο από τα οποία αποτελείται από τους αριθμούς εκείνους που διαιρούμενοι με τον β δίνουν υπόλοιπο που συμβολίζεται $[0]$, δηλαδή έχουμε $[0] = \{x / x = \beta\pi\}$. Το 2ο σύνολο αποτελείται από τους αριθμούς εκείνους που διαιρούμενοι με τον β δίνουν υπόλοιπο 1. Αυτό το σύνολο συμβολίζεται $[1]$, δηλαδή έχουμε $[1] = \{x / x = \beta\pi + 1\}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, φτάνουμε στο σύνολο $[|\beta| - 1] = \{x / x = \beta\pi + |\beta| - 1\}$.

Ας δούμε, ως παράδειγμα, τη δημιουργία των άρτιων (ζυγών) και περιττών (μονών) αριθμών. Θεωρώντας την ένωση των συνόλων αυτών, καλύπτουμε, με βάση τον ακέραιο β, το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$. Οπότε παίρνουμε μία διαμέριση, όπως λέμε, του $\mathbb{Z}$. Έτσι έχουμε: $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup \ldots \cup [|\beta| - 1]$.

Το 0 είναι πολλαπλάσιο κάθε ακεραίου α, αφού $0 = \alpha 0$.

Σημαντική παρατήρηση 2: Είναι σαφές ότι ο αριθμός 1 δεν είναι πολλαπλάσιο του 2, αλλά μπορεί να γραφτεί $1 = 2 \cdot 0 + 1$.

Αν τώρα πάρουμε τυχόντα ακέραιο α, τότε η διαίρεσή του με το 2 δίνει πηλίκο π και υπόλοιπο 0 ή 1.

Έτσι δημιουργούνται τα εξής σύνολα: $[0] = \{x / x = 2\pi\}$, $[1] = \{x / x = 2\pi + 1\}$.
Με αναγραφή των στοιχείων του συνόλου, παίρνουμε:
$[0] = \{\ldots -2\nu, -2\nu + 2, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, 2\nu - 2, 2\nu, \ldots\}$ και
$[1] = \{\ldots, -2\nu + 1, -2\nu + 3, \ldots, -1, 1, \ldots, 2\nu + 1, 2\nu + 3, \ldots\}$.
Είναι σαφές πως ισχύει: $[0] \cup [1] = \mathbb{Z}$.
Το πρώτο σύνολο είναι το σύνολο των **ζυγών αριθμών**, δηλαδή ακεραίων της μορφής $x = 2\rho$ με ρ ακέραιο. Το δεύτερο σύνολο είναι το σύνολο των **περιττών αριθμών**, δηλαδή ακεραίων της μορφής $x = 2\rho + 1$ ή $x = 2\rho - 1$, με ρ ακέραιο.

Σημαντική παρατήρηση 3: Είδαμε ότι το σύνολο των πρώτων θετικών αριθμών, διαταγμένων με σειρά μεγέθους, είναι το σύνολο $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$. Παρατηρούμε ότι ο **1ος** αριθμός του συνόλου αυτού είναι ο **ζυγός 2,** ενώ όλοι οι υπόλοιποι πρώτοι είναι **περιττοί** αριθμοί. Όταν λοιπόν ασχολούμαστε με ακέραιους πρώτους, δε θα πρέπει να ξεχνάμε και τον μοναδικό θετικό ζυγό πρώτο, που είναι ο 2.

1.6.1 Βασικές προτάσεις

Έστω πηλίκο π και υπόλοιπο υ, από τη διαίρεση του α διά του β. Τότε ισχύει $\alpha = \beta\pi + \upsilon$, με $\upsilon = 0, 1, 2, \ldots, |\beta| - 1$.

1. **Όταν ισχύει $\alpha = \beta\pi + \upsilon$, με $\upsilon = 0, 1, 2, \ldots, |\beta| - 1$, και υπάρχει ακέραιος δ τέτοιος, ώστε $\delta \mid \alpha$ και $\delta \mid \beta$, τότε $\delta \mid \upsilon$. (Με άλλα λόγια, κάθε αριθμός που διαιρεί τους α και β στην ισότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης, θα είναι και διαιρέτης του υπολοίπου υ.)**

   Απόδειξη

   Με βάση την ισχύ του $\delta \mid \alpha$, συμπεραίνουμε την ύπαρξη ακεραίου κ τέτοιου, ώστε $\alpha = \kappa\delta$. Από το ότι ισχύει $\delta \mid \beta$, συμπεραίνουμε την ύπαρξη ακεραίου λ τέτοιου, ώστε $\beta = \lambda\delta$. Έτσι, από τη σχέση $\alpha = \beta\pi + \upsilon$, προκύπτει ότι:
   $\kappa\delta = \lambda\pi\delta + \upsilon \Rightarrow \kappa\delta - \lambda\pi\delta = \upsilon \Leftrightarrow (\kappa - \lambda\pi)\delta = \upsilon$, από όπου παίρνουμε $\delta \mid \upsilon$.

2. **Όταν ισχύει $\alpha = \beta\pi + \upsilon$, με $\upsilon = 0, 1, 2, \ldots, |\beta| - 1$, και υπάρχει ακέραιος δ τέτοιος, ώστε $\delta \mid \upsilon$ και $\delta \mid \beta$, τότε $\delta \mid \alpha$** (αποδεικνύεται όπως και η **1**).

3. **Αν έχουμε ακέραιο $\nu \neq 0$, με τον οποίο διαιρούμενοι οι ακέραιοι α, β δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, τότε η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι πολλαπλάσιο του ν. Αντίστροφα, αν η διαφορά δύο ακεραίων α, β είναι πολλαπλάσιο ενός ακεραίου ν, τότε οι αριθμοί αυτοί διαιρούμενοι με τον ν δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.**

   Απόδειξη

   Αν $\alpha = \beta$, προφανής. Θεωρούμε ότι $\alpha \neq \beta$. Τότε, από την ισότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης, έχουμε $\alpha = \nu\pi_2 + \upsilon$ και $\beta = \nu\pi_2 + \upsilon$.
   Αν αφαιρέσουμε τις σχέσεις αυτές κατά μέλη, παίρνουμε
   $\alpha - \beta = \nu\pi_1 - \nu\pi_2 \Rightarrow \alpha - \beta = (\pi_1 - \pi_2)\nu$, από όπου προκύπτει ότι $\nu \mid \alpha - \beta$.

Ακολουθεί παράδειγμα για το αντίστροφο, και στη συνέχεια η απόδειξη, που μπορεί να παραλειφθεί κατά την πρώτη ανάγνωση. Παρατηρούμε ότι $2 \mid 10 \Rightarrow 2 \mid 35-25$. Αν διαιρέσουμε τον 35 με τον 2, παίρνουμε ως πηλίκο τον 17 και ως υπόλοιπο τον αριθμό 1 (δηλαδή $35 = 2 \cdot 17 + 1$). Αν διαιρέσουμε τον 25 με τον 2, παίρνουμε ως πηλίκο τον 12 και ως υπόλοιπο τον αριθμό 1 (δηλαδή $25 = 2 \cdot 12 + 1$). Εδώ διαπιστώνουμε την ισότητα μεταξύ των υπολοίπων από τις διαιρέσεις του 35 με τον 2, και του 25 με τον 2.

Ας δούμε εδώ την απόδειξη: Έστω ότι η διαφορά $\alpha - \beta$ δύο ακεραίων α, β είναι πολλαπλάσιο ακεραίου ν. Τότε, θα υπάρχει ακέραιος λ τέτοιος, ώστε $\alpha - \beta = \lambda\nu$. Θεωρούμε τις ευκλείδειες διαιρέσεις των α, β με τον αριθμό ν, και έτσι παίρνουμε τις σχέσεις $\alpha = \nu\pi_1 + \upsilon_1$, $\beta = \nu\pi_2 + \upsilon_2$, με $0 \le \upsilon_1, \upsilon_2 < |\nu|$.

Από τις σχέσεις αυτές, έχουμε:

$\alpha - \beta = (\pi_1 - \pi_2)\nu + \upsilon_1 - \upsilon_2 \Rightarrow \lambda\nu = (\pi_1 - \pi_2)\nu + \upsilon_1 - \upsilon_2 \Rightarrow \nu \mid \upsilon_1 - \upsilon_2$,

με $0 \le \upsilon_1, \upsilon_2 < |\nu|$.

Παρατηρούμε ότι, αν υποθέσουμε $0 \le \upsilon_1 \le \upsilon_2 < |\nu|$, τότε παίρνουμε:

$0 \le |\upsilon_2 - \upsilon_1| \le \upsilon_2 - \upsilon_1 \le \upsilon_2 < |\nu|$. Οπότε έχουμε $\nu \mid \upsilon_1 - \upsilon_2$ και $|\upsilon_2 - \upsilon_1| \le |\nu|$, άρα (σύμφωνα με το μεθοδολογικό σχόλιο της ενότητας 1.4.7., «Βασικές προτάσεις»), ισχύει $\upsilon_1 - \upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2$.

4. Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει $(\alpha, \beta) = \delta$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι α_1, β_1 τέτοιοι, ώστε $\alpha = \alpha_1\delta$ και $\beta = \beta_1\delta$, με $(\alpha_1, \beta_1) = 1$.

Απόδειξη

Θεωρούμε $(\alpha, \beta) = \delta$, οπότε υπάρχουν ακέραιοι α_1, β_1 τέτοιοι, ώστε $\alpha = \alpha_1\delta$ και $\beta = \beta_1\delta$. Με βάση τα προηγούμενα, οι ακέραιοι α_1, β_1 είναι μοναδικοί, με έναν μέγιστο κοινό διαιρέτη, έστω τον δ', δηλαδή έχουμε $(\alpha_1, \beta_1) = \delta'$. Τότε παίρνουμε $\alpha_1 = \alpha_2\delta'$ και $\beta_1 = \beta_2\delta'$, άρα ισχύουν οι σχέσεις $\alpha = \alpha_2\delta\delta'$ και $\beta = \beta_2\delta\delta'$, κάτι που μας οδηγεί στη σχέση $0 < \delta\delta' \le \delta$, αφού ο δ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) των α, β. Τελικά έχουμε $0 < \delta\delta' \le \delta \Rightarrow 0 < \delta' \le 1 \Rightarrow \delta' = 1$. Επομένως, πράγματι ισχύει ο τύπος.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι η πρόταση: **Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει $(|\alpha|, |\beta|) = (\alpha, \beta) = \delta$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι α_1, β_1 τέτοιοι, ώστε $|\alpha| = |\alpha_1|\delta$, $|\beta| = |\beta_1|\delta$, με $(|\alpha_1|, |\beta_1|) = 1$.**

1.7 ΙΣΟΫΠΟΛΟΙΠΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (MODULAR ARITHMETIC)

1.7.1 Η σχέση $\alpha = \beta \pmod{\nu}$ ή $\alpha \equiv \beta \bmod \nu$

Το γεγονός ότι δύο αριθμοί α, β, διαιρούμενοι με τον αριθμό ν, αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο $(\alpha = \kappa\nu + \upsilon$ και $\beta = \lambda\nu + \upsilon$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z})$ –άρα η διαφορά τους είναι πολλαπλάσιο

του ν, δηλαδή $\alpha - \beta = (\kappa - \lambda)\nu = \pi o \lambda \nu$, και αντίστροφα–, αποδίδεται με τον συμβολισμό $\alpha = \beta \pmod{\nu}$ ή $\alpha \equiv \beta \bmod \nu$. Επίσης λέμε ότι ο ακέραιος β είναι **ισοϋπόλοιπος** προς τον ακέραιο α, όταν οι ευκλείδειες διαιρέσεις των α, β με τον ακέραιο ν έχουν το ίδιο υπόλοιπο υ.

Ισχύει το παρακάτω βασικό θεώρημα:

1.7.2 Βασικό θεώρημα

Έστω α, $\beta \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$. Τότε $\alpha = \beta \pmod{\nu} \Leftrightarrow \nu \mid \alpha - \beta$.

Απόδειξη

- Έστω $\alpha = \beta \pmod{\nu}$. Τότε οι α και β διαιρούμενοι με τον ν δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, έστω υ. Σύμφωνα με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης των α και β με τον ν, έχουμε: $\alpha = \kappa\nu + \upsilon$ και $\beta = \lambda\nu + \upsilon$, με κ, $\lambda \in \mathbb{Z}$, καθώς και $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $0 \le \upsilon < \nu$.
  Με αφαίρεση, οι σχέσεις αυτές δίνουν: $\alpha - \beta = \kappa\nu - \lambda\nu = (\kappa - \lambda)\nu$ με κ, $\lambda \in \mathbb{Z}$, που είναι ισοδύναμο με $\nu \mid \alpha - \beta$. Άρα αν $\alpha = \beta \pmod{\nu}$, τότε $\nu \mid \alpha - \beta$.

- Έστω ότι $\nu \mid \alpha - \beta$, και ότι ο β, διαιρούμενος με τον φυσικό αριθμό ν, δίνει υπόλοιπο υ. Θα δείξουμε ότι και ο α, διαιρούμενος με τον ν, δίνει το ίδιο υπόλοιπο υ. Είναι: $\nu \mid \alpha - \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = \mu\nu$, $\mu \in \mathbb{Z}$. Αν $\beta = \lambda\nu + \upsilon$, με $\lambda \in \mathbb{Z}$ και $0 \le \upsilon < \nu$, είναι η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του β με τον ν, τότε $\alpha = \beta + \mu\nu$, $\mu \in \mathbb{Z}$ ή $\alpha = \lambda\nu + \upsilon + \mu\nu = (\lambda + \mu)\nu + \upsilon$, με μ, $\lambda \in \mathbb{Z}$ και $0 \le \upsilon < \nu$.
  Άρα $\alpha = (\lambda + \mu)\nu + \upsilon$, με μ, $\lambda \in \mathbb{Z}$ και $0 \le \upsilon < \nu$. Άρα οι α και β, διαιρούμενοι με τον ν, δίνουν το ίδιο υπόλοιπο $\Leftrightarrow \alpha = \beta \pmod{\nu}$.

Παρατήρηση: Μπορούμε να δούμε και τη βασική πρόταση 3 της 1.6.1.

1.7.3 Βασικές ιδιότητες της σχέσης $\alpha = \beta \pmod{\nu}$

Έστω α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Από το βασικό θεώρημα 1.7.2, έχουμε: $\alpha = \beta \pmod{\nu} \Leftrightarrow \nu \mid \alpha - \beta$, οπότε:

- $\alpha = \alpha \pmod{\nu} \Leftrightarrow \nu \mid \alpha - \alpha$, που είναι αληθές, αφού $\nu \mid 0$.

- $\alpha = \beta \pmod{\nu} \Leftrightarrow \beta = \alpha \pmod{\nu}$.
  Πράγματι ισχύει, αφού $\nu \mid \alpha - \beta \Leftrightarrow \nu \mid \beta - \alpha$.

- Αν $\alpha = \beta \pmod{\nu}$ και $\beta = \gamma \pmod{\nu}$, τότε $\alpha = \gamma \pmod{\nu}$.
  Πράγματι, $\alpha = \beta \pmod{\nu} \Leftrightarrow \nu \mid \alpha - \beta$ και $\beta = \gamma \pmod{\nu} \Leftrightarrow \nu \mid \beta - \gamma$, οπότε $\nu \mid (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \Leftrightarrow \nu \mid \alpha - \gamma \Leftrightarrow \alpha = \gamma \pmod{\nu}$.

1.7.4 Βασικό θεώρημα

Αν $\alpha = \beta \pmod{\nu}$ και $\gamma = \delta \pmod{\nu}$, τότε:
$\alpha + \gamma = \beta + \delta \pmod{\nu}$, $\alpha - \gamma = \beta - \delta \pmod{\nu}$ και $\alpha\gamma = \beta\delta \pmod{\nu}$.

Απόδειξη

$\alpha = \beta \pmod{\nu}$ **και** $\gamma = \delta \pmod{\nu} \Leftrightarrow \nu \mid \alpha - \beta$ **και** $\nu \mid \gamma - \delta \Leftrightarrow \alpha - \beta = \kappa\nu$ **και** $\gamma - \delta = \lambda\nu$, **με** $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$. Οπότε:

$(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) = \kappa\nu + \lambda\nu = (\kappa + \lambda)\nu$, με $\kappa + \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta \pmod{\nu}$.

$(\alpha - \beta) - (\gamma - \delta) = \kappa\nu - \lambda\nu = (\kappa - \lambda)\nu$, με $\kappa - \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$(\alpha - \gamma) - (\beta - \delta) = \kappa\nu - \lambda\nu = (\kappa - \lambda)\nu$, με $\kappa - \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta \pmod{\nu}$.

Για να αποδείξουμε ότι $\alpha\gamma = \beta\delta \pmod{\nu}$, δημιουργούμε τα γινόμενα $\alpha\gamma$ και $\beta\delta$, πολλαπλασιάζοντας τις ισότητες $\alpha - \beta = \kappa\nu$ και $\gamma - \delta = \lambda\nu$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$, με τους αριθμούς γ και β αντίστοιχα, και έχουμε: $\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma\kappa\nu$ και $\beta\gamma - \beta\delta = \beta\lambda\nu$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$. Οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε $\alpha\gamma - \beta\delta = \gamma\kappa\nu + \beta\lambda\nu = (\gamma\kappa + \beta\lambda)\nu$, με $\gamma\kappa + \beta\lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\delta \pmod{\nu}$.

Παρατήρηση 1: Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ισοδυναμίας με τον ίδιο ακέραιο, χωρίς να μεταβληθεί η ισοδυναμία. Προσοχή όμως: **δεν ισχύει το ίδιο για τη διαίρεση**.

Παράδειγμα

Ισχύει $15 = 10 \pmod{5}$, αλλά δεν ισχύει $3 = 2 \pmod{5}$ αφού $3 - 2 \neq$ πολ5.

Παρατήρηση 2: Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, αν θεωρήσουμε κ το πλήθος ισοδυναμίες $\alpha = \beta \pmod{\nu}$, τότε $\alpha^{\kappa} = \beta^{\kappa} \pmod{\nu}$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση 3: Αν $N = \alpha_{\nu}10^{\nu} + \alpha_{\nu-1}10^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 10^1 + \alpha_0 10^0$ είναι ένας φυσικός αριθμός γραμμένος στο δεκαδικό του ανάπτυγμα, τότε

$N - \alpha_0 = \alpha_{\nu}10^{\nu} + \alpha_{\nu-1}10^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 10 = (\alpha_{\nu}10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-1}10^{\nu-2} + \ldots + \alpha_1)10 =$ πολ10.

Οπότε $N = \alpha_0 \pmod{10}$.

Άρα, για να βρούμε το τελευταίο ψηφίο ενός αριθμού N, αρκεί να βρούμε ακέραιο $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ τέτοιον, ώστε $N = x \pmod{10}$.

Και γενικά, για να βρούμε τα ν τελευταία ψηφία ενός αριθμού N, αρκεί να βρούμε $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 10^{\nu} - 1\}$ τέτοιον, ώστε $N = x \pmod{10^{\nu}}$.

Παρατήρηση 4: Αν $\nu \in \mathbb{N}$ και Σ το άθροισμα των ψηφίων του, τότε ισχύει $\nu = \Sigma \pmod{9}$.

Πράγματι αν $\nu = \alpha_{\nu}10^{\nu} + \alpha_{\nu-1}10^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 10^1 + \alpha_0 10^0$ φυσικός αριθμός, γραμμένος στο δεκαδικό του ανάπτυγμα, τότε ο 9 διαιρεί τον $\nu \in \mathbb{N}$, όταν ο 9 διαιρεί το άθροισμα των ψηφίων του, δηλαδή όταν $9 \mid \Sigma = \alpha_{\nu} + \alpha_{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 + \alpha_0$.

1.7.5 Θεώρημα

Αποδείξτε ότι $\alpha\nu = \beta\nu \pmod{\mu} \Leftrightarrow \alpha = \beta\left(\bmod \dfrac{\mu}{(\nu, \mu)}\right)$, αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{Z}^*$.

Απόδειξη

$\alpha\nu = \beta\nu \pmod{\mu} \Leftrightarrow \mu \mid (\alpha - \beta)\nu$.

Ισχύει ότι $\mu = \mu_1(\nu, \mu)$ και $\nu = \nu_1(\nu, \mu)$, με $(\nu_1, \mu_1) = 1$.

Έχουμε ότι $\mu \mid (\alpha - \beta)\nu$, οπότε παίρνουμε

$$\mu_1(\nu, \mu) \mid (\alpha - \beta)\nu_1(\nu, \mu) \Rightarrow \mu_1 \mid (\alpha - \beta)\nu_1 \Rightarrow \mu_1 \mid \alpha - \beta \Rightarrow \frac{\mu}{(\nu, \mu)} \mid \alpha - \beta.$$

Αντίστροφα έχουμε:

$$\alpha = \beta\left(\bmod \frac{\mu}{(\nu, \mu)}\right) \Rightarrow \frac{\mu}{(\nu, \mu)} \mid \alpha - \beta \Rightarrow \mu \mid (\alpha - \beta)(\nu, \mu) \Rightarrow \mu \mid (\alpha - \beta)(\nu, \mu),$$

οπότε ισχύει $\mu \mid (\alpha - \beta)(\nu, \mu)\, \nu_1 \Rightarrow \nu\alpha = \nu\beta \pmod{\mu}$.

1.7.6 Γραμμική ισοδυναμία

Γραμμική ισοδυναμία ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x = \beta \pmod{\nu}$ (1), όπου α, β, ν ακέραιοι, με $\nu \neq 0$. **Λύση** της (1) είναι κάθε ακέραιος x_0 που την ικανοποιεί.

Δεχόμαστε την ισχύ της εξής βασικής πρότασης: **Αν ο ακέραιος x_0 είναι λύση της (1), τότε κάθε ακέραιος x ισοϋπόλοιπος με τον x_0 ως προς ν, είναι επίσης λύση της (1).**

«Φραστικά», χωρίς μαθηματικό συμβολισμό, έχουμε την εξής απόδοση: «x ισοϋπόλοιπος x_0 κατά μέτρο ν», δηλαδή κάθε αριθμός ισοϋπόλοιπος με τον x_0, κατά τη διαίρεσή του με τον ν, αποτελεί λύση της (1) κατά μέτρο ν.

Από όλους αυτούς τους ακεραίους που αποτελούν λύσεις της (1) κατά μέτρο ν, **μόνο ένας** είναι στοιχείο του συνόλου $\{1, 2, \ldots, \nu - 1\}$. Πράγματι αν ο $x = \nu\rho + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < \nu$ (ισοδύναμα ισχύει $x - \upsilon = \nu\rho$, $0 \leq \upsilon < \nu$), είναι ένας τέτοιος αριθμός, θα είναι μοναδικός, αφού δύο διαφορετικοί αριθμοί από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, \nu - 1\}$ είναι ανισοϋπόλοιποι κατά μέτρο ν.

Μία γραμμική ισοδυναμία (ή ισοτιμία) της μορφής $\alpha x = \beta \pmod{\nu}$ έχει λύση, **αν, και μόνο αν,** ο Μ.Κ.Δ. των α, ν, διαιρεί τον β (δηλ. $(\alpha, \nu) \mid \beta$). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το πλήθος των λύσεών της είναι (α, ν), ενώ οι λύσεις της δίνονται από τον τύπο $\tau = x_0 + \kappa\dfrac{\nu}{(\alpha, \nu)}$, $\kappa = 0, 1, \ldots, ((\alpha, \nu) - 1)$. Για να βρούμε τον x_0, χρησιμοποιούμε τον τύπο: $x_0 = \alpha^{\varphi(\nu)-1}\beta \pmod{\nu}$. Ως $\varphi(\nu)$, θεωρούμε το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του ν και πρώτοι με τον ν.

Ασκήσεις

1. Επιλύστε τη γραμμική ισοδυναμία $3x = 5(\bmod 9)$.

Λύση

Η ισοδυναμία $3x = 5(\bmod 9)$ δεν έχει λύση, καθότι $(3, 9) = 3$, και ο 3 δε διαιρεί τον 5.

2. Προσδιορίστε τις λύσεις της $15x = 6(\bmod 21)$.

Λύση

Κίνηση 1η: Εξετάζουμε την ύπαρξη λύσης.
Παρατηρούμε ότι $(15, 21) = 3 \Rightarrow 3 \mid 6$, άρα έχει λύση.
Κίνηση 2η: Προσδιορίζουμε το πλήθος των λύσεων.
Αφού ισχύει $(15, 21) = 3$, έχουμε τρεις λύσεις.
Κίνηση 3η: Προσδιορίζουμε αρχικά τις λύσεις.
Αυτές είναι οι $\tau = x_0 + \kappa\dfrac{21}{3} = x_0 + 7\kappa$, με $\kappa = 0, 1, 2$.
Κίνηση 4η: Προσδιορίζουμε τον x_0. Η ισοτιμία $15x = 6(\bmod 21)$ είναι ισοδύναμη με την $5x = 2(\bmod 7)$, επομένως παίρνουμε:
$x_0 = 5^{\varphi(7)-1}2(\bmod 7) = 5^5 2(\bmod 7) = 6(\bmod 7)$, αφού $5^5 \cdot 2 = 7 \cdot 892 + 6$.
Συνεπώς έχουμε $x_0 = 6(\bmod 21)$. Τελικά, οι λύσεις είναι οι:
$\tau_1 = 6(\bmod 21) + 7 \cdot 0 = 6(\bmod 21)$, $\tau_2 = 6(\bmod 21) + 7 \cdot 1 = 13(\bmod 21)$,
$\tau_3 = 6(\bmod 21) + 7 \cdot 2 = 20(\bmod 21)$.

1.7.7 Θεώρημα Fermat

Αν α, ρ θετικοί ακέραιοι, και ρ πρώτος, με $(\alpha, \rho) = 1$, τότε $\alpha^{\rho-1} = 1(\bmod \rho)$.

Άσκηση

Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $3^{2015} : 7$.

Λύση

1ος τρόπος

Ανάλυση ή σκέψη

Ψάχνω να βρω ποια δύναμη του 3 είναι ισοϋπόλοιπη με το 1 ή $-1(\bmod 7)$.
Είναι $3^6 = 729 = 1(\bmod 7)$. Βρίσκω το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $2015 : 6$, $2015 = 335 \cdot 6 + 5$.

Έχουμε $3^6 = 729 = 1(\bmod 7) \overset{\text{παρατ.2}}{\Rightarrow} (3^6)^{335} = 1^{335}(\bmod 7) \Rightarrow$

$3^{2010} = 1(\bmod 7) \overset{\text{παρατ.1}}{\Rightarrow} 3^{2010} \cdot 3^5 = 3^5 \cdot 1(\bmod 7)$.

$3^{2010} \cdot 3^5 = 3^5 \cdot 1 \pmod 7 \Rightarrow 3^{2015} = 243 \pmod 7 \Rightarrow 3^{2015} = 5 \pmod 7$, αφού $243 = 34 \cdot 7 + 5$. Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $3^{2015} : 7$ είναι $\upsilon = 5$.

2ος τρόπος
Για $\alpha = 3$ και $\rho = 7$, όπου ρ πρώτος και $(\alpha, \rho) = (3, 7) = 1$, λόγω θεωρήματος Fermat έχουμε $\alpha^{\rho-1} = 1 \pmod \rho$, δηλαδή $3^{7-1} = 1 \pmod 7 \Rightarrow 3^6 = 1 \pmod 7$…

1.8 ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ (Μ.Κ.Δ.) ΔΥΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Έστω δύο ακέραιοι α, β. Κοινός διαιρέτης των αριθμών αυτών είναι κάθε ακέραιος που διαιρεί τον α και τον β. Π.χ. ο αριθμός 2 είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών 16 και 12. Έστω λοιπόν γ ένας κοινός διαιρέτης των α, β. Τότε πιθανόν να υπάρχουν και άλλοι κοινοί διαιρέτες τους. Π.χ. ο 4 είναι επίσης κοινός διαιρέτης των 16 και 12.
Έτσι έχουμε τον εξής ορισμό:

1. **Μέγιστος κοινός διαιρέτης** (Μ.Κ.Δ.) δύο ακεραίων, έστω α, β, ονομάζεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών αυτών. Τον μέγιστο αυτό κοινό διαιρέτη των ακεραίων α, β συμβολίζουμε (α, β) ή Μ.Κ.Δ. (α, β).
2. Αν ο Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων είναι ο 1, τότε οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **σχετικά πρώτοι** ή **πρώτοι μεταξύ τους. Δηλαδή, αν για τους ακεραίους α, β έχουμε $(\alpha, \beta) = 1$, τότε οι α, β είναι σχετικά πρώτοι.**

Προσοχή!
Δεν πρέπει να συγχέουμε την έννοια «πρώτος αριθμός» με την έννοια «σχετικά πρώτοι αριθμοί ή πρώτοι μεταξύ τους».

Παρατήρηση: Επειδή οι θετικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από οποιονδήποτε αρνητικό κοινό διαιρέτη, αναζητούμε τον Μ.Κ.Δ. μεταξύ των **θετικών** αριθμών.

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 6, 9.
Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, ενώ του 9 οι 1, 3, 9. Οι **κοινοί θετικοί** διαιρέτες των 6, 9 είναι οι 1, 3, ενώ μεγαλύτερος ανάμεσά τους είναι ο 3. Άρα Μ.Κ.Δ. των 6 και 9 είναι ο 3. Οπότε γράφουμε $(6, 9) = 3$.

2. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 8, 9.
Οι θετικοί διαιρέτες του 8 είναι οι 1, 2, 4, 8, ενώ του 9 οι 1, 3, 9.
Ο μοναδικός κοινός διαιρέτης τους είναι ο 1. Άρα ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 8, 9 είναι ο 1.
Οι αριθμοί λοιπόν αυτοί είναι **σχετικά πρώτοι**, ή **πρώτοι μεταξύ τους**.

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ωστόσο ότι τόσο ο 8 όσο και ο 9 δεν είναι πρώτοι αριθμοί.

1.8.1 Βασικές προτάσεις

1. Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει $(\alpha, \beta) = \delta$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι α_1, β_1 τέτοιοι, ώστε $\alpha = \alpha_1\delta$ και $\beta = \beta_1\delta$ με $(\alpha_1, \beta_1) = 1$.
2. Αν διατάξουμε τους θετικούς διαιρέτες αριθμού α κατά σειρά μεγέθους, από τον 1 έως τον μεγαλύτερο (δηλαδή την απόλυτη τιμή του α), τότε ο δεύτερος θετικός διαιρέτης είναι πρώτος αριθμός.
   Π.χ. οι διαιρέτες του 21, κατά σειρά μεγέθους από τον 1 έως τον μεγαλύτερο, είναι οι 1, 3, 7, 21. Παρατηρούμε ότι ο 3 είναι πρώτος.
3. Αν δύο αριθμοί διαιρεθούν με τον Μ.Κ.Δ. τους, προκύπτουν αριθμοί **σχετικά πρώτοι**. Κατά συνέπεια, αν για τους ακεραίους α, β ισχύει $(\alpha, \beta) = \delta$, τότε $\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right) = 1$.

Παράδειγμα

Έστω αριθμοί 24, 27.

Παρατηρούμε ότι $(24, 27) = 3 \Rightarrow \left(\frac{24}{3}, \frac{27}{3}\right) = (8, 9) = 1$.

1.8.2 Εύρεση του Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων

Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τον Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων α, β, με $\beta \leq \alpha$. Τότε κάνουμε τις εξής κινήσεις:

Διαιρούμε, όπως ξέρουμε, τον α με τον β. Έτσι βρίσκουμε $\alpha = \beta\pi + \upsilon$. Αν $\upsilon = 0$, τότε $(\alpha, \beta) = 1$. Αν $\upsilon \neq 0$, διαιρούμε τον β με το υ. Έτσι βρίσκουμε $\beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1$. Αν $\upsilon_1 = 0$, τότε $(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon) = \upsilon$. Αν $\upsilon_1 \neq 0$, τότε διαιρούμε το υ με το υ_1. Έτσι βρίσκουμε $\upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2$. Αν $\upsilon_2 = 0$, τότε $(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon) = (\upsilon, \upsilon_1) = \upsilon_1$. Αν $\upsilon_2 \neq 0$, διαιρούμε το υ_1 με το υ_2 και συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο, οπότε τελικά ο Μ.Κ.Δ. θα είναι το **τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο** που προκύπτει.

Ασκήσεις

1. Βρείτε τον Μ.Κ.Δ. των αριθμών 108, 306.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $108 < 306$. Διαιρούμε, κατά τα γνωστά, τον 306 με τον 108, και παίρνουμε την ισότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης $306 = 108 \cdot 2 + 90$, $90 \neq 0$. Διαιρούμε τον 108 με τον 90, και παίρνουμε $108 = 90 \cdot 1 + 18$, $18 \neq 0$. Διαιρούμε τον 90 με τον 18, και έχουμε $90 = 18 \cdot 5$, δηλαδή υπόλοιπο 0. Επειδή το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο από τη διαδοχή των παραπάνω ισοτήτων είναι ο 18, καταλήγουμε ότι $(108, 306) = 18$. Πρακτικά:

108	306
108	90
18	90
18	0

2. Έστω δύο ακέραιοι α, β, με ιδιότητα $\beta \mid \alpha(\alpha-1)$.
Υπολογίστε τον $(2\alpha-1,\ \beta)$.

Λύση

Έστω $(2\alpha-1,\ \beta)=\delta$. Παρατηρούμε ότι:
$\alpha(\alpha-1)=\alpha^2-\alpha \Rightarrow \beta \mid \alpha(\alpha-1) \Rightarrow \beta \mid 4\alpha^2-4\alpha+1-1 \Rightarrow \beta \mid (2\alpha-1)^2+1$ με $\delta \mid 2\alpha-1$ και $\delta \mid \beta$, άρα $\delta \mid 1 \Rightarrow \delta=1$.

Παρατήρηση: Ισχύει $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=((\alpha,\ \beta),\ \gamma)=(\alpha,\ (\beta,\ \gamma))=((\alpha,\ \gamma),\ \beta)$.

1.8.3 Βασικό θεώρημα

Αν $(\alpha,\ \beta)=\delta$, τότε θα υπάρχουν πάντα ακέραιοι κ, λ, χωρίς να είναι αναγκαστικά μοναδικοί, με ιδιότητα $\delta=\kappa\alpha+\lambda\beta$.

Παρατήρηση: Το $\kappa\alpha+\lambda\beta$ ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των α, β.

Άμεση συνέπεια: $\kappa\alpha+\lambda\beta=\delta \Rightarrow \kappa\dfrac{\alpha}{\delta}+\lambda\dfrac{\beta}{\delta}=1$.

Ας δούμε μέσα από ένα παράδειγμα πώς προσδιορίζονται οι ακέραιοι κ, λ όταν μας δίνονται οι ακέραιοι α, β:

Άσκηση

Έστω αριθμοί 15, 36. Να βρείτε δύο αριθμούς κ, λ, ώστε $15\kappa+36\lambda=(15,\ 36)$.

Λύση

Διαιρούμε τον 36 με τον 15, και παίρνουμε $36=15\cdot 2+6$. Απομονώνουμε το υπόλοιπο 6, και έτσι έχουμε $6=36-15\cdot 2$ (1).

Προσοχή!
Κατά τη μέθοδο αυτή δεν εκτελούμε τα γινόμενα, δηλαδή δε λέμε $15\cdot 2=30$.

Συνεχίζουμε διαιρώντας τον 15 με τον 6, και παίρνουμε $15=6\cdot 2+3 \Leftrightarrow 3=15-6\cdot 2$, οπότε, με βάση τη σχέση (1), έχουμε:
$3=15-(36-15\cdot 2)2 \Leftrightarrow 3=15-(36\cdot 2-15\cdot 4) \Leftrightarrow$
$3=15-36\cdot 2+15\cdot 4 \Leftrightarrow 3=5\cdot 15+(-2)36$ (2).

Συνεχίζουμε με τη διαίρεση του 6 διά 3, και παίρνουμε $6=3\cdot 2$, δηλαδή υπόλοιπο 0. Τελικά $(15,\ 36)=3$, οπότε, βασιζόμενοι στη σχέση (2), προσδιορίζουμε $\kappa=5$, $\lambda=-2$.

Παρατήρηση: Οι τιμές 5 για κ, και -2 για λ, ΔΕΝ είναι οι μοναδικές.

1.8.4 Προτάσεις

1. Αν $(\alpha, \beta) = 1$ και $\alpha \mid \beta\gamma$, τότε $\alpha \mid \gamma$.
2. Αν ο γ είναι πρώτος και $\gamma \mid \alpha\beta$, τότε $\gamma \mid \alpha$ ή $\gamma \mid \beta$.
3. Αν $(\alpha, \beta) = 1$, με $\alpha \mid \gamma$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $\alpha\beta \mid \gamma$.

1.8.5 Ανάλυση θετικού ακεραίου σε γινόμενο θετικών πρώτων παραγόντων

Κάθε θετικός ακέραιος α γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\alpha = \alpha_1^{\rho_1}\alpha_2^{\rho_2}\alpha_3^{\rho_3} \ldots \alpha_\kappa^{\rho_\kappa}$, όπου οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\kappa$ είναι ακέραιοι πρώτοι και παράγοντες του α, ενώ οι εκθέτες $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_\kappa$ είναι φυσικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός.

Έστω π.χ. ο αριθμός 180. Με συνεχείς τέλειες διαιρέσεις (δηλαδή διαιρέσεις που δίνουν υπόλοιπο 0), έχουμε:

180	2				
0	90	2			
	0	45	3		
		0	15	3	
			0	5	5
				0	1
					0

Άρα παίρνουμε $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Σημαντική παρατήρηση: Έστω δύο ακέραιοι α, β, αναλυμένοι σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, υψούμενων σε εκθέτες φυσικούς αριθμούς. Τότε ο β θα διαιρεί τον α όταν όλοι οι πρώτοι παράγοντες του β είναι και παράγοντες του α, με εκθέτες παράγοντες του β μικρότερους από ή ίσους με τους αντίστοιχους που υπάρχουν στην ανάλυση του α.

Παραδείγματα

1. Ο $\beta = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^{100} \cdot 13$ διαιρεί τον $\alpha = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^6 \cdot 11^{100} \cdot 13^2 \cdot 23$, αφού οι αντίστοιχοι εκθέτες των πρώτων παραγόντων του β, που είναι όλοι και παράγοντες του α, είναι μικρότεροι από ή ίσοι με τους αντίστοιχους εκθέτες που υπάρχουν στην ανάλυση του α.

Αντίθετα, ο αριθμός $\beta = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ δε διαιρεί τον $\alpha = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 11^{10}$, αφού ο παράγοντας 3^3 του β έχει μεγαλύτερο εκθέτη από τον αντίστοιχο 3^2 του α.

2. Εύρεση του Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων ακεραίων. Να βρεθεί ο $(12, 16, 24)$.

1ος τρόπος

Βρίσκουμε πρώτα τους διαιρέτες καθενός αριθμού:

$\Delta_{12} = 1, 2, 3, 4, 6, 12.$ $\Delta_{16} = 1, 2, 4, 8, 16.$ $\Delta_{24} = 1, 2, 4, 6, 8, 12, 24.$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τους κοινούς διαιρέτες τους: Οι αριθμοί 1, 2, 4 είναι οι κοινοί διαιρέτες των 12, 16, 24.

Τέλος βρίσκουμε τον μεγαλύτερο από τους κοινούς διαιρέτες:
Μ.Κ.Δ.$(12, 16, 24) = 4$.

2ος τρόπος

Παίρνουμε τον μικρότερο από τους αριθμούς (τον 12) και εξετάζουμε αν είναι αυτός ο Μ.Κ.Δ. (δεν είναι, αφού δε διαιρεί τον 16). Αν δεν είναι, παίρνουμε διαδοχικά τον μικρότερο διά 2 ή διά 3 ή διά 4 κτλ. και εξετάζουμε αν είναι αυτός ο Μ.Κ.Δ., δηλαδή αν διαιρεί τους άλλους:

Ο $12 : 2 = 6$ δεν είναι ο Μ.Κ.Δ., αφού δε διαιρεί τον 16.

Ο $12 : 3 = 4$ διαιρεί τον 16 και τον 24. Άρα Μ.Κ.Δ.$(12, 16, 24) = 4$.

3ος τρόπος

Αναλύουμε καθέναν από τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

12	2	16	2	24	2
6	2	8	2	12	2
3	3	4	2	6	2
1		2	2	3	3
		1		1	

Άρα $12 = 2^2 \cdot 3$, $16 = 2^4$, $24 = 2^3 \cdot 3$.

Παίρνουμε τους κοινούς όρους με τον μικρότερο εκθέτη.

Άρα Μ.Κ.Δ.$(12, 16, 24) = 2^2 = 4$.

4ος τρόπος

Γράφουμε τους αριθμούς σε οριζόντια διάταξη, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

Ξαναγράφουμε αποκάτω τον μικρότερο από αυτούς (τον 12), ενώ δίπλα, κάτω από τους άλλους, γράφουμε το υπόλοιπο της διαίρεσής τους με τον μικρότερο (δηλαδή 4 κάτω από τον 16, και 0 κάτω από τον 24).

Ξαναγράφουμε αποκάτω τον μικρότερο (τώρα τον 4) και διαιρούμε τους άλλους με αυτόν, συμπληρώνοντας στις αντίστοιχες θέσεις το υπόλοιπο της διαίρεσης.

Συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι να μείνει μόνο ένας αριθμός και οι υπόλοιποι να είναι 0. Ο αριθμός που μένει είναι ο Μ.Κ.Δ.

12	16	24
12	4	0
0	4	0

Άρα Μ.Κ.Δ.$(12, 16, 24) = 4$.

1.8.6 Το ν παραγοντικό ($\nu!$)

Το σύμβολο $\nu!$ εκφράζει το γινόμενο όλων των φυσικών αριθμών από τον 1 έως και τον ν, δηλαδή $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \nu$, π.χ. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Ως άμεση συνέπεια, έχουμε:

$(\nu+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \nu \cdot (\nu+1) \Rightarrow (\nu+1)! = \nu!(\nu+1)$.

Ορίζουμε $0! = 1! = 1$.

1.8.6.1 Θεώρημα 1

Ο αριθμός $2! = 1 \cdot 2 = 2$ διαιρεί το γινόμενο δύο διαδοχικών αριθμών. Πράγματι, μεταξύ δύο διαδοχικών ο ένας θα είναι ζυγός, δηλαδή πολλαπλάσιο του 2. Άρα και το γινόμενό τους θα είναι πολλαπλάσιο του 2.

1.8.6.2 Θεώρημα 2

Δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους. Πράγματι, έστω ότι για τους διαδοχικούς ακεραίους α, $\alpha+1$ έχουμε $(\alpha, \alpha+1) = \delta$. Τότε ισχύει $\alpha = \kappa_1\delta$ και $\alpha+1 = \kappa_2\delta$, με $\kappa_1 \neq \kappa_2$ και $(\kappa_1, \kappa_2) = 1$. Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις αυτές, προκύπτει $1 = (\kappa_2 - \kappa_1)\delta \Rightarrow \delta \mid 1 \Rightarrow \delta = 1$.

1.8.6.3 Θεώρημα 3

Ο αριθμός $3!$ $(3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6)$ διαιρεί το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων. Πράγματι: Έστω ότι έχουμε τρεις διαδοχικούς ακεραίους α, $\alpha+1$, $\alpha+2$. Τότε θεωρούμε το γινόμενό τους $\Gamma = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$. Αρχικά, στηριζόμενοι στο παραπάνω θεώρημα 1, ισχύει ότι ο αριθμός 2 διαιρεί το γινόμενο Γ. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

1. Αν $\alpha = 3\lambda$, τότε $\alpha+1 = 3\lambda+1$, $\alpha+2 = 3\lambda+2$, οπότε έχουμε:
   $\Gamma = 3\lambda(3\lambda+1)(3\lambda+2)$, άρα $3 \mid \Gamma$.
2. Αν $\alpha = 3\lambda+1$, τότε $\alpha+1 = 3\lambda+2$, $\alpha+2 = 3\lambda+3 = 3(\lambda+1)$, οπότε έχουμε
   $\Gamma = (3\lambda+1)(3\lambda+2)3(\lambda+1) = 3(3\lambda+1)(3\lambda+2)(\lambda+1)$, άρα $3 \mid \Gamma$.
3. Αν $\alpha = 3\lambda+2$, τότε $\alpha+1 = 3\lambda+3 = 3(\lambda+1)$, $\alpha+2 = 3\lambda+4$, οπότε έχουμε
   $\Gamma = (3\lambda+2)3(\lambda+1)(3\lambda+4) = 3(3\lambda+2)(\lambda+1)(3\lambda+4)$, άρα $3 \mid \Gamma$.
   Επειδή τώρα $(2, 3) = 1$, με $2 \mid \Gamma$ και $3 \mid \Gamma$, σύμφωνα με την πρόταση 3 της παραγράφου 1.8.4, παίρνουμε ότι $2 \cdot 3 \mid \Gamma \Rightarrow 3! \mid \Gamma$.

1.8.6.4 Θεώρημα 4

Θα δεχτούμε, χωρίς απόδειξη, την εξής γενίκευση:
Ο αριθμός $\nu!$ διαιρεί το γινόμενο ν διαδοχικών ακεραίων.

Άσκηση

«Έστω ρ, $8\rho - 1$, δύο πρώτοι θετικοί ακέραιοι. Τότε ο αριθμός $8\rho + 1$ είναι πρώτος». Χαρακτηρίστε ως **αληθή** ή **ψευδή** τον συλλογισμό αυτό.

Λύση

Αν $\rho = 2$, τότε $8\rho - 1 = 15$, δηλαδή άτοπο, αφού ο αριθμός 15 είναι σύνθετος, και η υπόθεση τον «θέλει» ακέραιο πρώτο. Άρα θα πρέπει $\rho \neq 2$. Αν $\rho = 3$, τότε ο $8\rho - 1 = 23$ πρώτος, και ο $8\rho + 1 = 25$ σύνθετος. Έστω τώρα οι πρώτοι ρ, $8\rho - 1$, με $\rho > 3$. Τότε το γινόμενο $\Gamma = (8\rho - 1)8\rho(8\rho + 1)$ διαιρείται με τον 3, αφού είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων. Όμως ο 3 δε διαιρεί τους $8\rho - 1$, 8, ρ, επομένως διαιρεί τον $8\rho + 1$, συνεπώς ο ακέραιος $8\rho + 1$ είναι σύνθετος. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ο συλλογισμός είναι **ψευδής**.

1.8.7 Κριτήρια ή χαρακτήρες διαιρετότητας

1. Ένας αριθμός διαιρείται διά του 10, 100, 1000 …, όταν λήγει αντίστοιχα σε 1, 2, 3, … , τουλάχιστον μηδενικά.
2. Ένας αριθμός διαιρείται διά 2 ή διά 5, αν το τελευταίο ψηφίο διαιρείται διά 2 ή διά 5, αντίστοιχα.
3. Ένας αριθμός διαιρείται διά 4 ή 25, αν τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται διά 4 ή 25, αντίστοιχα.
4. Ένας αριθμός διαιρείται διά 3 ή διά 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται διά 3 ή διά 9, αντίστοιχα.
5. Ένας αριθμός διαιρείται διά 8 ή διά 125, αν τα τρία τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται διά 8 ή διά 125, αντίστοιχα.
6. Ένας αριθμός διαιρείται διά 11, αν το άθροισμα των διψήφιων τμημάτων του από τα δεξιά προς τα αριστερά διαιρείται διά 11. Π.χ. ο αριθμός 1232 διαιρείται διά 11, αφού $12 + 32 = 44$, και ο 44 διαιρείται διά 11.

1.9 ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ (Ε.Κ.Π.) ΔΥΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Θετικό κοινό πολλαπλάσιο δύο ακεραίων α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, ονομάζουμε κάθε φυσικό αριθμό λ τέτοιον, ώστε $\alpha \mid \lambda$ και $\beta \mid \lambda$, δηλαδή κάθε φυσικό αριθμό λ, με $|\alpha| \mid \lambda$ και $|\beta| \mid \lambda$. Προφανώς ο θετικός ακέραιος $|\alpha\beta|$ είναι κοινό θετικό πολλαπλάσιο των ακεραίων α, β. Προκύπτει λοιπόν άμεσα ότι το σύνολο των κοινών θετικών πολλαπλασίων δύο ακεραίων α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, δεν είναι το κενό σύνολο.

Επαναλαμβάνουμε εδώ ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^*$ έχει την ιδιότητα, για κάθε φυσικό αριθμό ν, ο $\nu + 1$ να είναι επίσης φυσικός αριθμός. Θεωρούμε επίσης γνωστό ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^*$ έχει ελάχιστο στοιχείο τη μονάδα (1), ενώ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ακεραίων, έστω α, β, ονομάζεται το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσια των αριθμών αυτών. Το Ε.Κ.Π. συμβολίζεται $[\alpha, \beta]$.

Ακολουθούν έξι θεωρήματα, που είναι βασικά για την έννοια του Ε.Κ.Π. δύο ακεραίων. Αποδείξεις τους θα δοθούν στο Παράρτημα (βλ. σελ. 52 παρακάτω).

1.9.1 Βασικά θεωρήματα για το Ε.Κ.Π.

1ο θεώρημα

Κάθε υποσύνολο A των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^*$ $\left(A \subseteq \mathbb{N}^*\right)$, που δεν είναι κενό, έχει ελάχιστο στοιχείο.

2ο θεώρημα

Το σύνολο των κοινών θετικών πολλαπλασίων δύο ακεραίων α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, ως υποσύνολο των φυσικών αριθμών, έχει ελάχιστο στοιχείο, το οποίο συμβολίζεται $\varepsilon = [\alpha, \beta]$ και ονομάζεται απλά «Ε.Κ.Π. των ακεραίων α, β». Προφανώς ισχύει $\varepsilon = [\alpha, \beta] = [|\alpha|, |\beta|]$.

3ο θεώρημα

Για τους ακεραίους α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, ισχύει ο τύπος $[\alpha, \beta] \leq |\kappa|$, όταν κ τυχόν κοινό πολλαπλάσιο των ακεραίων α, β.

4ο θεώρημα

Για τους ακεραίους α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, ισχύει ότι $[\alpha, \beta] \mid \kappa$, αν ο ακέραιος κ είναι τυχόν πολλαπλάσιό τους.

5ο θεώρημα

Για τους ακεραίους α, β, γ, με ιδιότητα $\alpha\beta\gamma \neq 0$, ισχύει η ισότητα:
$[\gamma\alpha, \gamma\beta] = |\gamma|[\alpha, \beta]$.

6ο θεώρημα

Για τους ακεραίους α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, ισχύουν:

i) $(\alpha, \beta) = \delta \Rightarrow \alpha = \alpha_1\delta$, $\alpha = \beta_1\delta$, με $(\alpha_1, \beta_1) = 1$,

ii) $\varepsilon = [\alpha, \beta] \Rightarrow \varepsilon = |\beta_1\alpha| = |\alpha_1\beta|$.

iii) $(\alpha, \beta)[\alpha, \beta] = |\alpha\beta|$.

7ο θεώρημα

Για τους ακεραίους α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, ισχύει: $(\alpha, \beta)[\alpha, \beta] = \alpha\beta$.

1.10 ΟΙ ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ρητή παράσταση είναι κάθε παράσταση που μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{Z}^*$. Έτσι, κάθε ακέραιος γράφεται ως κλάσμα, με παρονομαστή τη μονάδα. Ας θεωρήσουμε γνωστά τόσο τη σχέση ισότητας μεταξύ δύο ρητών $\left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma\right)$, όσο και τις πράξεις που ορίζονται μεταξύ δύο ρητών. Προφανώς, όλες οι ιδιότητες, ταυτότητες, κτλ., που αναφέρθηκαν ότι ισχύουν στους ακεραίους, ισχύουν και για τα κλάσματα, δηλαδή τους ρητούς. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$. Παρατηρούμε ότι: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Υπενθυμίζουμε εδώ την ύπαρξη των δεκαδικών αριθμών, στους οποίους εντάσσονται και οι ακέραιοι, αφού κάθε ακέραιος α θεωρείται δεκαδικός του τύπου $\alpha = \alpha{,}0$ ή $\alpha = \alpha{,}00$ κτλ. Όλοι λοιπόν οι δεκαδικοί αριθμοί −μαζί με τους ακεραίους−, είτε τα δεκαδικά τους ψηφία «τερματίζουν» είτε επαναλαμβάνονται από ένα σημείο και μετά με περιοδικό τρόπο, αντιστοιχούν σε **κλάσματα (ρητούς)**, και αντίστροφα.

Παρατήρηση: Όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων που μάθαμε για τους ακεραίους, ισχύουν και για τους ρητούς. Επιπλέον έχουμε:

i) $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, $\nu \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$,

ii) $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, $\nu, \mu \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha^{\nu-\mu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}}$,

iii) $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{Q}^*$, $\nu \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$,

iv) $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\alpha^{\mu}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$.

1.10.1 Θεώρημα

Κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^*$, γίνεται **ανάγωγο ή απλό,** δηλαδή της μορφής $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, με $(\alpha_1, \beta_1) = 1$. Τότε λέμε ότι το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^*$, απλοποιείται.

Πράγματι, αν $(\alpha, \beta) = 1$, είναι ήδη γραμμένο σε μορφή ανάγωγου κλάσματος. Αν $(\alpha, \beta) = \delta \neq 1$, τότε έχουμε $\alpha = \alpha_1\delta$, $\beta = \beta_1\delta$, με $(\alpha, \beta) = 1$, οπότε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1\delta}{\beta_1\delta} \Leftrightarrow \alpha\beta_1\delta = \beta\alpha_1\delta \Leftrightarrow \alpha\beta_1\delta - \beta\alpha_1\delta = 0 \Leftrightarrow \delta(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta_1 = \beta\alpha_1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

1.11 ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Όπως ξέρουμε, **περιοδικός** αριθμός είναι ένας δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία, τα οποία από μία θέση και μετά επαναλαμβάνονται «επ' άπειρον». Ο αριθμός αυτός είναι ρητός. Κάθε δεκαδικός που δεν είναι περιοδικός, ενώ τα ψηφία του επεκτείνονται «επ' άπειρον», δεν αντιστοιχεί σε κάποιον ρητό, και κατά συνέπεια ονομάζεται **μη ρητός** ή **άρρητος**.

1.11.1 Τετραγωνική ρίζα

Η **τετραγωνική ρίζα θετικού** ρητού α συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$, και αν «βγαίνει» ακριβώς, είναι ένας **θετικός ρητός β**, που υψούμενος στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό α. Δηλαδή $\sqrt{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha,\ \beta > 0$.

Παράδειγμα

$\sqrt{4} = 2$, αφού $2^2 = 4$. Επίσης $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, αφού $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι $\sqrt{4} \neq -2$, παρόλο που $(-2)^2 = 4$, και αυτό επειδή $-2 < 0$.

Η τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού α (ή η ρίζα του θετικού α τάξης 2) που «δε βγαίνει ακριβώς», είναι μη ρητός αριθμός. Π.χ. οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{26}$, $\sqrt{58}$ κτλ. δεν είναι ρητοί. Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός $\pi = 3{,}14\ldots$ (το μήκος του κύκλου προς το διπλάσιο της ακτίνας του) είναι επίσης μη ρητός. Έτσι έχουμε ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν και αριθμοί που δεν είναι ρητοί. Αναφέρουμε επίσης ότι υπάρχουν και ρίζες ρητών μεγαλύτερης τάξης από 2. Γενικά, ν τάξης ρίζα, ή νιοστή ρίζα, θετικού αριθμού α (συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\alpha}$) είναι θετικός αριθμός β τέτοιος, ώστε $\beta^\nu = \alpha$. Με άλλα λόγια, στο σύνολο των θετικών ακεραίων ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha} = \beta$, αν, και μόνο αν, $\beta^\nu = \alpha$. Έτσι παίρνουμε: $\alpha \in \mathbb{Z}_+^* \Rightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$ και $\alpha \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$. Έστω λοιπόν σύνολο, που τα στοιχεία του είναι μη ρητοί αριθμοί. Το σύνολο αυτό, που δεν είναι κενό (αποδεικνύεται γεωμετρικά π.χ. η ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{2}$), ονομάζεται σύνολο των **άρρητων αριθμών,** και τα στοιχεία του **άρρητοι αριθμοί**. Το σύνολο των αρρήτων δεν έχει κοινά στοιχεία με το σύνολο των ρητών $(\mathbb{Q})$, και επομένως ο 0 δεν είναι άρρητος. Οι πράξεις που ισχύουν στους ρητούς επεκτείνονται και στους άρρητους αριθμούς. Η ένωση των ρητών με τους άρρητους δίνει το σύνολο των πραγματικών αριθμών (συμβολίζεται $\mathbb{R}$), ενώ το σύνολο των αρρήτων συμβολίζεται $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

1.11.2 Θεώρημα

Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη

(Με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο)

Έστω ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε θα γράφεται ως ανάγωγο κλάσμα, δηλαδή θα υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι μ, ν, με $(\mu, \nu) = 1$, τέτοιοι, ώστε $\sqrt{2} = \frac{\mu}{\nu}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει $\mu = \nu\sqrt{2} \Leftrightarrow \mu^2 = 2\nu^2$ (1). Αν ο αριθμός μ είναι περιττός, τότε θα υπάρχει ακέραιος ρ τέτοιος, ώστε $\mu = 2\rho + 1$, οπότε $(1) \Rightarrow (2\rho+1)^2 = 2\nu^2 \Rightarrow 4\rho^2 + 4\rho + 1 = 2\nu^2 \Rightarrow 2 \mid 1$, που είναι άτοπο. Κατά συνέπεια, ο μ πρέπει να είναι ζυγός, δηλαδή της μορφής $\mu = 2\tau$ για ακέραιο τ. Αλλά τότε η (1) δίνει $4\tau^2 = 2\nu^2 \Leftrightarrow 2\tau^2 = \nu^2$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία απόδειξης, καταλήγουμε ότι ο ν είναι ζυγός. Αλλά έχουμε και εδώ άτοπο, αφού δεν μπορεί δύο ζυγοί ακέραιοι να είναι πρώτοι μεταξύ τους. Άρα ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Βασική πρόταση

Μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων, δεν υπάρχει τετράγωνο ακεραίου. Η πρόταση αυτή χρησιμοποιείται για επιλύσεις προβλημάτων όπως το παρακάτω.

Άσκηση

Χαρακτηρίστε την πρόταση που ακολουθεί ως ***αληθή*** ή ***ψευδή:*** «Υπάρχουν τέσσερις διαδοχικοί ακέραιοι που το γινόμενό τους είναι τέλειο τετράγωνο».

Λύση

Έστω τέσσερις διαδοχικοί ακέραιοι $\kappa - 1$, κ, $\kappa + 1$, $\kappa + 2$ τέτοιοι, ώστε να υπάρχει ακέραιος α για τον οποίο να ισχύει $(\kappa - 1)\kappa(\kappa + 1)(\kappa + 2) = \alpha^2$ (1).

Παρατηρούμε ότι (1) $\Leftrightarrow (\kappa^2 - 1)(\kappa^2 + 2\kappa) = \alpha^2 \Leftrightarrow \kappa^4 + 2\kappa^3 - \kappa^2 - 2\kappa = \alpha^2 \Leftrightarrow$ $\kappa^4 + 2\kappa^3 + \kappa^2 - 2\kappa^2 - 2\kappa = \alpha^2 \Leftrightarrow \kappa^2(\kappa+1)^2 - 2\kappa(\kappa+1) + 1 - 1 = \alpha^2 \Leftrightarrow$ $(\kappa^2 + \kappa - 1)^2 - 1 = \alpha^2$, οπότε με απλές πράξεις παίρνουμε:
$(\kappa^2 + \kappa - 2)^2 < (\kappa^2 + \kappa - 1)^2 - 1 = \alpha^2 < (\kappa^2 + \kappa - 1)^2$, που σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση είναι άτοπο. Άρα καταλήγουμε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

1.11.3 Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού

Θεώρημα Αρχιμήδη-Ευδόξου

Για κάθε θετικό πραγματικό κ και για κάθε πραγματικό λ, υπάρχει **μοναδικός ακέραιος** $\boldsymbol{\alpha}$ τέτοιος, ώστε $\alpha\kappa > \lambda$ και $(\alpha - 1)\kappa \le \lambda$.

Βασική πρόταση

Για τυχόντα πραγματικό x, υπάρχει μοναδικός ακέραιος α τέτοιος, ώστε $\alpha \le x < \alpha + 1$.

- **Ορισμός:** Ο μοναδικός αυτός **ακέραιος** α ονομάζεται ***ακέραιο μέρος του*** x και συμβολίζεται $[x]$. Άρα ισχύει $[x] \le x < [x] + 1 \Leftrightarrow x - 1 < [x] \le x$. Ο **πραγματικός** $x - [x]$ ονομάζεται ***κλασματικό μέρος του*** x και συμβολίζεται $\{x\}$. Παρατηρούμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα του ακέραιου και του κλασματικού του μέρους.

Βασική πρόταση

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow [\alpha] + [\beta] \le [\alpha + \beta] \le [\alpha] + [\beta] + 1$.

Ασκήσεις

1. Επιλύστε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left[\frac{3x+1}{3}\right] + 2 = \frac{x+1}{2} \quad (1).$$

Λύση

Η (1) οδηγεί στην $x = 2\kappa + 3$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, με $\kappa = \left[\frac{3x+1}{3}\right]$.

Έχουμε $x + \frac{1}{3} - 1 < \left[x + \frac{1}{3}\right] \le x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} < \frac{x-3}{2} \le \frac{3x+1}{3}$.

Αντικαθιστώντας το x από την $x = 2\kappa + 3$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, παίρνουμε $-\frac{10}{3} \le \kappa < -\frac{7}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \kappa = -3$, οπότε ως λύση έχουμε τη $x = -3$.

2. Αποδείξτε ότι: Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε $[\alpha] - [\beta] \le [\alpha - \beta] \le [\alpha] - [\beta]$.

Λύση

Για τον πραγματικό α έχουμε $[\alpha] = [\alpha - \beta + \beta] \le [\alpha - \beta] + [\beta] + 1$.

Έτσι παίρνουμε $[\alpha] - [\beta] - 1 \le [\alpha - \beta]$. Ομοίως, έχουμε:

$[\alpha] = [\alpha - \beta + \beta] \ge [\alpha - \beta] + [\beta]$, από όπου προκύπτει $[\alpha - \beta] \le [\alpha] - [\beta]$.

1.11.4 Ιδιότητες των ριζών

Αναφορικά με τις ιδιότητες των ριζών, αναφέρουμε το εξής βασικό θεώρημα: Αν οι νιοστές δυνάμεις δύο θετικών αριθμών είναι ίσες, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι.

i) $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, ii) $\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma} = \sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}\sqrt[\nu]{\gamma}$, iii) $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$,

iv) $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$, v) $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\nu} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$, vi) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$.

1.11.5 Βασική πρόταση

Μία παράσταση της μορφής $\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε άθροισμα (ή διαφορά) απλών ριζικών, αν, και μόνο αν, υπάρχει αριθμός γ τέτοιος, ώστε $\alpha^2 - \beta = \gamma^2$.

Τότε παίρνουμε αντίστοιχα $\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha+\gamma}{2}} + \sqrt{\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}$, ή:

$$\sqrt{\alpha - \sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{2}} - \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{2}}.$$

1.11.6 Θεώρημα

Αν εξίσωση της μορφής $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0 = 0$, και με σύνολο αναφοράς τους πραγματικούς αριθμούς, έχει τελικά ακέραιους συντελεστές, και δέχεται ως ρίζα αριθμό $\alpha + \sqrt{\beta}$, με α, β ρητούς και $\sqrt{\beta}$ άρρητο, θα δέχεται επίσης ως ρίζα και τον αριθμό $\alpha - \sqrt{\beta}$.

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού ξεφεύγει από το πλαίσιο του βιβλίου.

Άσκηση

Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, που δέχεται ως ρίζα τον αριθμό $1 + \sqrt{2}$.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντελεστές α, β είναι μοναδικοί. Αφού η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $1 + \sqrt{2}$, θα έχει επίσης ρίζα και τον αριθμό $1 - \sqrt{2}$.

Έτσι παίρνουμε $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \alpha\left(1+\sqrt{2}\right) + \beta = 0$ (1) και $\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \alpha\left(1-\sqrt{2}\right) + \beta = 0$ (2).

Αν αφαιρέσουμε τις (1), (2) κατά μέλη, εύκολα παίρνουμε $\alpha = -2$. Η εξίσωση λοιπόν γίνεται $x^2 - 2x + \beta = 0$, οπότε έχουμε $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1$.

Τελικά η εξίσωση είναι η $x^2 - 2x - 1 = 0$, είναι μοναδική και έχει ως λύσεις τις $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ και $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Παρατήρηση: Το πρόβλημα αυτό επιλύεται και αλλιώς, π.χ. με βάση τους τύπους του **Vietta,** που θα δούμε σε άλλο κεφάλαιο.

- Για τη μετατροπή δύναμης με κλασματικό εκθέτη σε ρίζα, και αντίστροφα, έχουμε τον εξής ορισμό: $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

1.11.7 Βασικές επισημάνσεις

1. Ένας άρρητος αριθμός δεν ισούται με έναν ρητό.
2. Κάθε πράξη μεταξύ ρητών αριθμών δίνει ως αποτέλεσμα ρητό αριθμό, ενώ κάθε πράξη μεταξύ δύο αριθμών που ο ένας είναι ρητός και ο άλλος άρρητος, δίνει ως αποτέλεσμα άρρητο αριθμό.
   i) Πράξη μεταξύ δύο άρρητων αριθμών μπορεί να δίνει ως αποτέλεσμα άρρητο αριθμό ή ρητό αριθμό, π.χ. $\sqrt{5} + \left(2 - \sqrt{5}\right) = 2$, ή $\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, που είναι ρητοί αριθμοί. Γενικά, για ρητό αριθμό α και θετικό ρητό β που δεν είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, έχουμε $\left(\alpha + \sqrt{\beta}\right) + \left(\alpha - \sqrt{\beta}\right) = 2\alpha$, που είναι ρητός. Γενικά, έχουμε επίσης $\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right) = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 - \left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha - \beta$.
   ii) Κάθε ισότητα $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$, όπου β, δ θετικοί ρητοί και όχι τέλεια τετράγωνα ρητών, ισχύει αν, και μόνο αν, $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.
   iii) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ θα αποτελεί πλέον το ευρύτερο σύνολο αναφοράς για μεταβλητές και σύμβολα, εκτός αν το θέμα που μελετάμε μας «υποχρεώνει» από την αρχή να έχουμε ένα συγκεκριμένο σύνολο αναφοράς. Θεωρούμε γνωστές τόσο τη σχέση ισότητας μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών, όσο και τις πράξεις μεταξύ τους, αλλά και τις ιδιότητες που έχουμε μάθει. Οι ταυτότητες που αναφέραμε ήδη στα προηγούμενα σύνολα $\left(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\right)$ ισχύουν και εδώ.

Συμπληρώνουμε και με τις εξής ταυτότητες:

i) $\left(\alpha + \beta + \gamma\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

ii) $\left(\alpha + \beta + \gamma\right)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\left(\alpha + \beta\right)\left(\beta + \gamma\right)\left(\gamma + \alpha\right)$

iii) **(De Moivre):** $\left(\alpha + \beta + \gamma\right)\left(\alpha + \beta - \gamma\right)\left(\alpha - \beta + \gamma\right)\left(-\alpha + \beta + \gamma\right) =$
$= 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4$

iv) $\left(x + \rho_1\right)\left(x + \rho_2\right) = x^2 + \left(\rho_1 + \rho_2\right)x + \rho_1\rho_2$, επίσης έχουμε:
$\left(x + \rho_1\right)\left(x + \rho_2\right)\left(x + \rho_3\right) =$
$= x^3 + \left(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3\right)x^2 + \left(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1\right)x + \rho_1\rho_2\rho_3$ κτλ.

v) $$\nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left(\alpha + \beta\right)^{\nu} = \alpha^{\nu} + \nu\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{\nu\left(\nu-1\right)}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 +$$
$$+ \frac{\nu\left(\nu-1\right)\left(\nu-2\right)}{2\cdot 3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \frac{\nu\left(\nu-1\right)\left(\nu-2\right)\left(\nu-3\right)}{2\cdot 3\cdot 4}\alpha^{\nu-4}\beta^4 +$$
$$+ \ldots + \frac{\nu\left(\nu-1\right)\ldots\left(\nu-\kappa+1\right)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\kappa}\alpha^{\nu-\kappa}\beta^{\kappa} + \ldots + \beta^{\nu}$$

vi) $\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}=(\alpha-\beta)\left(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^{2}+\ldots+\beta^{\nu-1}\right)$, οπότε παίρνουμε:

$\alpha^{\nu}-1=(\alpha-1)\left(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}+\alpha^{\nu-3}+\ldots+1\right)$

vii) $\alpha^{2\rho}-\beta^{2\rho}=(\alpha+\beta)\left(\alpha^{2\rho-1}-\alpha^{2\rho-2}\beta^{2}+\alpha^{2\rho-3}\beta^{3}-\ldots-\beta^{2\rho-1}\right)$

viii) $\alpha^{2\rho-1}+\beta^{2\rho-1}=(\alpha+\beta)\left(\alpha^{2\rho-2}-\alpha^{2\rho-3}\beta+\ldots+\beta^{2\rho-2}\right)$

Παρατήρηση: Ο τύπος (v) γράφεται:

$$\nu\in\mathbb{N}^{*}\Rightarrow(\alpha+\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}+\frac{\nu}{1!}\alpha^{\nu-1}\beta+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}\alpha^{\nu-2}\beta^{2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!}\alpha^{\nu-3}\beta^{3}+$$

$$+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{4!}\alpha^{\nu-4}\beta^{4}+\ldots+\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1)}{\kappa!}\alpha^{\nu-\kappa}\beta^{\kappa}+\ldots+\beta^{\nu}.$$

Ας επισημάνουμε εδώ και την εξής βασική ειδική περίπτωση:

$$(\alpha+1)^{\nu}=\alpha^{\nu}+\nu\alpha^{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}\alpha^{\nu-2}+\ldots+1.$$

1.12 ΟΡΙΖΟΥΣΑ 2ης ΤΑΞΗΣ

Ορίζουσα **2ης** τάξης είναι κάθε αλγεβρική παράσταση της μορφής: $\alpha\delta-\beta\gamma$. Συμβολίζεται ως $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$, δηλαδή ισχύει ο τύπος $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$.

i) **(Lagrange):**

Αφορά τα ζεύγη των ν-άδων $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)$ και $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu)$, που τις τοποθετούμε με τρόπο $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_\nu\\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_\nu\end{pmatrix}$ τέτοιον, ώστε να σχηματίζεται ένα άθροισμα οριζουσών 2×2 σε όλους τους συνδυασμούς, υψωμένων στο τετράγωνο, το οποίο θα αποτελέσει το δεύτερο μέλος της ταυτότητας **Lagrange.** Η ταυτότητα του **Lagrange** στη γενική της μορφή είναι:

$$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2\right)-\left(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu\right)^2=$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\ldots+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_\nu\\ \beta_1 & \beta_\nu\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}^2+$$

$$+\ldots+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_\nu\\ \beta_2 & \beta_\nu\end{vmatrix}^2+\ldots+\begin{vmatrix}\alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu\\ \beta_{\nu-1} & \beta_\nu\end{vmatrix}^2.$$

ii) Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί, με $\alpha+\beta+\gamma=0$, ή $(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)=0$, τότε ισχύει η ισότητα:

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)$, και αντίστροφα.

iii) Αν $x,\ y \in \mathbb{R}$ και $x + y = 1$, τότε $2\left(x + y + xy\right)^2 = x^4 + y^4 + 1$.

iv) Αν $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^*$ και $\dfrac{\alpha^2 - \beta\gamma}{x} = \dfrac{\beta^2 - \alpha\gamma}{y} = \dfrac{\gamma^2 - \alpha\beta}{z} \neq 0$, τότε:

$$\frac{x^2 - yz}{\alpha} = \frac{y^2 - zx}{\beta} = \frac{z^2 - xy}{\gamma}.$$

v) Για λόγους πληρότητας, παραθέτουμε και τους εξής τύπους:

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + \nu = \dfrac{\nu\left(\nu + 1\right)}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}$ (για την απόδειξή του χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\left(x + 1\right)^2 = x^2 + 2x + 1$).
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 = \dfrac{\nu\left(\nu + 1\right)\left(2\nu + 1\right)}{6}$, $\nu \in \mathbb{N}$ (για την απόδειξή του χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\left(x + 1\right)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$).
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \nu^3 = \left[\dfrac{\nu\left(\nu + 1\right)}{2}\right]^2 = \dfrac{\nu^2\left(\nu + 1\right)^2}{4}$, $\nu \in \mathbb{N}$ (για την απόδειξή του χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\left(x + 1\right)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$).

1.13 ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΝΩΣΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

i) Αν για τους θετικούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ισχύει $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu = 1$, τότε θα ισχύει $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu \geq \nu$.
(**Άσκηση:** Αποδείξτε την **(i)** για $\nu = 2$ και $\nu = 3$).

ii) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ θετικοί αριθμοί, τότε:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu} \geq \frac{\nu}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_\nu}}.$$

(Για τους θετικούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, ο αριθμητικός τους μέσος είναι μεγαλύτερος από τον γεωμετρικό τους μέσο και μεγαλύτερος από τον αρμονικό τους μέσο).
(**Άσκηση:** Αποδείξτε την **(ii)** για $\nu = 2$).

iii) Αν $-1 < \alpha$, $\alpha \neq 0$ και $0 < \mu < 1$, τότε $\left(1 + \alpha\right)^\mu < 1 + \mu\alpha$.

iv) (**Buniakowski-Cauchy-Schwarz,** ή συντομογραφικά **B-C-S**):
Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_\nu^2\right) \geq \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu\right)^2.$$

Η ισότητα ισχύει όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $\alpha_i = \lambda\beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, ή αν $\beta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, τότε $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$.
(**Σημείωση:** Μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα αυτή χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του **Lagrange.**)

v) **(Holder):** Έστω τα σύνολα μη ανάλογων θετικών αριθμών: $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ και $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu\}$. Θεωρούμε δύο θετικούς α, β τέτοιους, ώστε $\alpha + \beta = 1$. Τότε ισχύει ότι:
$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)^\alpha (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu)^\beta \le \alpha_1^\alpha \beta_1^\beta + \alpha_2^\alpha \beta_2^\beta + \ldots + \alpha_\nu^\alpha \beta_\nu^\beta$.

vi) **(Chebychev):** Αν $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_\nu$, $\beta_1 \ge \beta_2 \ge \ldots \ge \beta_\nu$, τότε:
$\nu(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu) \ge (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu)$.

vii) **(Shur):** Αν $\kappa > 0$, α, β, $\gamma \ge 0$, τότε:
$\alpha^\kappa(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) + \beta^\kappa(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) + \gamma^\kappa(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \ge 0$.
Η ισότητα ισχύει όταν οι τρεις αριθμοί είναι ίσοι, ή όταν δύο από αυτούς είναι ίσοι και ο τρίτος μηδέν. Αν $\kappa = 0$, α, β, $\gamma \ge 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma =$ $= \alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha)$. Τέλος, αν κ άρτιος θετικός ακέραιος, τότε η $\alpha^\kappa(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) + \beta^\kappa(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) + \gamma^\kappa(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \ge 0$ ισχύει για κάθε τριάδα πραγματικών α, β, γ.

viii) Αν το άθροισμα ν θετικών αριθμών είναι σταθερό, έστω κ, τότε το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο όταν αυτοί είναι ίσοι. Τότε ο καθένας από αυτούς είναι $\frac{\kappa}{\nu}$, ενώ το μέγιστο γινόμενο ισούται με $\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^\nu$.

ix) Αν το γινόμενο ν θετικών αριθμών είναι σταθερό, έστω κ, τότε το άθροισμά τους γίνεται ελάχιστο, όταν αυτοί είναι ίσοι. Τότε ο καθένας από αυτούς είναι $\sqrt[\nu]{\kappa}$, ενώ το ελάχιστο άθροισμα ισούται με $\nu\sqrt[\nu]{\kappa}$.

1.14 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Μερικές φορές μάς δίνεται ένας τρόπος (μηχανισμός) παραγωγής σειράς αριθμών. Π.χ. ο (μαθηματικός) μηχανισμός 2^ν, όπου ο ν παίρνει τιμές 1, 2, … παράγει πολλούς αριθμούς, το σύνολο των οποίων αποτελεί μία **ακολουθία αριθμών**. Δηλαδή ο 2^ν για $\nu = 0$ παράγει τον όρο $2^0 = 1$, για $\nu = 1$ παράγει τον όρο $2^1 = 1$, για $\nu = 2$ παράγει τον όρο $2^2 = 4$, … Αν γενικά συμβολίσουμε τον μηχανισμό αυτό ως $\alpha_\nu = 2^\nu$, τότε η διαδικασία που αναφέραμε παράγει τους όρους:
$\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2^2 = 4$, $\alpha_3 = 2^3 = 8$, … , $\alpha_\nu = 2^\nu$, …

Ο όρος $\alpha_\nu = 2^\nu$ ονομάζεται **γενικός όρος** της ακολουθίας.

Παρατήρηση: Σε πολλές περιπτώσεις οι ακολουθίες δε μας δίνονται άμεσα, όπως προηγουμένως, αλλά μέσα από έναν όρο της ακολουθίας με βάση κάποιον άλλο όρο της, συνήθως διαδοχικό. Στην περίπτωση αυτή, για να δώσουμε μορφή στην ακολουθία, χρειαζόμαστε έναν όρο για να ξεκινήσουμε. Τότε λέμε ότι έχουμε ***αναδρομικό τύπο ορισμού της ακολουθίας,*** ή απλά ότι έχουμε ***αναδρομική ακολουθία.*** Π.χ. η ακολουθία α_ν με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{1 + \alpha_\nu}$, για κάθε φυσικό αριθμό ν, παράγει τους όρους: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\alpha_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, …

i. **Αύξουσα** είναι μια ακολουθία με όρους που αυξάνουν **(μεγαλώνουν)** όταν οι αντίστοιχοι δείκτες των όρων αυτών (οι φυσικοί αριθμοί κάτω και δεξιά του όρου) μεγαλώνουν. Π.χ. η ακολουθία $\alpha_\nu = 2^\nu$ είναι αύξουσα, αφού $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 8, \ldots$

Σχηματικά έχουμε $\left\{\begin{matrix} 1 < 2 < 3 < \ldots \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots \end{matrix}\right\}$.

ii. **Φθίνουσα** είναι μια ακολουθία με όρους που **μικραίνουν** όταν οι αντίστοιχοι δείκτες των όρων αυτών μεγαλώνουν. Π.χ. η ακολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$ είναι φθίνουσα, αφού $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{3}$, $\alpha_4 = \dfrac{1}{4}$, …

1.15 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

- Αν σε μια εξίσωση οι συντελεστές είναι ακέραιοι, και το σύνολο αναφοράς της είναι το $\mathbb{Z}$, δηλαδή ζητάμε ακέραιες λύσεις, τότε λέμε ότι έχουμε μια **διοφαντική εξίσωση**.
- Έστω α, β, γ ακέραιοι, και η διοφαντική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$. Κάθε ζεύγος ακεραίων (χ, y) που την επαληθεύει, είναι **λύση** της.

Ισχύουν τα εξής:

1. Η εξίσωση έχει λύση αν ο Μ.Κ.Δ. των α και β είναι διαιρέτης και του γ.
2. Αν υπάρχει κοινός διαιρέτης των α, β που **δε** διαιρεί τον γ, η εξίσωση αυτή **δεν έχει** λύση, ενώ αν τον διαιρεί, τότε **έχει** τουλάχιστον μία λύση.
3. Αν η διοφαντική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ έχει μία λύση (x_0, y_0), τότε θα έχει άπειρες λύσεις που παράγονται από τους τύπους $x = x_0 + \dfrac{\beta}{(\alpha, \beta)}\tau$, $y = y_0 - \dfrac{\alpha}{(\alpha, \beta)}\tau$, όπου (α, β) ο Μ.Κ.Δ. των α, β, ενώ τ τυχών ακέραιος.
4. Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ και $(\alpha, \beta) = 1$, έχει μια ακέραιη λύση (x_0, y_0) για τυχόντα $y_0 \in A$, με $A = \{0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1\}$.

Άσκηση

Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $12x + 15y = 6$ (1).

Λύση

Παρατηρούμε ότι $(12, 15) = 3$ και $3 \mid 6$. Άρα η εξίσωση έχει λύση. Διαιρούμε όλους τους όρους με το $(12, 15) = 3$ και παίρνουμε την εξίσωση $4x + 5y = 2$, η οποία είναι ισοδύναμη με την αρχική και για την οποία ισχύει $(4, 5) = 1$. Βρίσκουμε μία λύση (x_0, y_0) της $4x + 5y = 2$, αντικαθιστώντας τον y με έναν από τους αριθμούς 0, 1, 2, 3. Έτσι γράφουμε την εξίσωση στη μορφή: $x = \dfrac{2 - 5y}{4}$

και παρατηρούμε ότι για $y = 2$ είναι $x = -2$. Άρα μια λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0, y_0) = (-2, 2)$, και όλες οι ακέραιες λύσεις της (1) δίνονται από τις σχέσεις $x = -2 + 5\tau,\ y = 2 - 4\tau$, με $\tau \in \mathbb{Z}$.

1.15.1 Ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$

Πολλές φορές παρουσιάζεται η ανάγκη να προσδιορίσουμε τις **ακέραιες και θετικές** λύσεις της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ και $(\alpha, \beta) = 1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν (x_0, y_0) είναι ακέραιη λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, τότε οι σχέσεις $x = x_0 + \beta\tau,\ y = y_0 - \alpha\tau,\ \tau \in \mathbb{Z}$ δίνουν όλες τις ακέραιες λύσεις.

Για να βρούμε λοιπόν τις ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ και $(\alpha, \beta) = 1$, πρέπει να προσδιορίσουμε επιπλέον τις τιμές του ακεραίου τ για τις οποίες ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις $x_0 + \beta\tau \geq 0$ και $y_0 - \alpha\tau \geq 0$ ή $\beta\tau \geq -x_0$ και $y_0 \geq \alpha\tau$.

Ισχύουν:

Αν **α και β ομόσημοι αριθμοί,** τότε οι ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ και $(\alpha, \beta) = 1$, είναι συγκεκριμένες και δίνονται από τις σχέσεις $x = x_0 + \beta\tau,\ y = y_0 - \alpha\tau$ και $-\dfrac{x_0}{\beta} \leq \tau \leq \dfrac{y_0}{\alpha}$, $\tau \in \mathbb{Z}$.

Αν **α και β ετερόσημοι αριθμοί,** τότε οι ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ και $(\alpha, \beta) = 1$, είναι άπειρες και δίνονται από τις σχέσεις $x = x_0 + \beta\tau,\ y = y_0 - \alpha\tau$ και $\tau \leq \min\left\{-\dfrac{x_0}{\beta}, \dfrac{y_0}{\alpha}\right\}$, $\tau \in \mathbb{Z}$. Ή, για να το πούμε με λόγια, ο ακέραιος τ μπορεί να πάρει τιμές μικρότερες από τον μικρότερο μεταξύ των αριθμών $-\dfrac{x_0}{\beta}$ και $\dfrac{y_0}{\alpha}$, ή τιμή ίση με τον μικρότερο από τους αριθμούς αυτούς.

Ασκήσεις

1. Με πόσους τρόπους μπορεί να συμπληρωθεί το ποσό των 30 €, με κέρματα των 2 € και χαρτονομίσματα των 5 €;

Λύση

Έστω ότι χρησιμοποιούμε x κέρματα των 2 € και y χαρτονομίσματα των 5 €. Έχουμε δηλαδή να προσδιορίσουμε τις ακέραιες και θετικές ρίζες της εξίσωσης $2x + 5y = 30$. Επειδή $(2, 5) = 1$ και $1 \mid 30$, η εξίσωση έχει λύση. Λύνουμε ως προς x και έχουμε $x = \dfrac{30 - 5y}{2}$. Με $y = 0$, είναι $x = 15$. Επομένως, μια λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0, y_0) = (15, 0)$. Όλες οι λύσεις θα δοθούν από τους τύπους $x = 15 + 5\tau,\ y = 0 - 2\tau$ και $-\dfrac{15}{5} \leq \tau \leq \dfrac{0}{2}$, $\tau \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $x = 15 + 5\tau,\ y = -2\tau$

και $-3 \le \tau \le 0$ $\tau \in \mathbb{Z}$, που δίνει $\tau = -3, -2, -1, 0$.

Άρα έχουμε τις λύσεις $(15, 0)$ $(10, 2)$ $(5, 4)$ $(0, 6)$. Αν δεχτούμε ότι πρέπει να χρησιμοποιηθούν νομίσματα και των δύο κατηγοριών, τότε οι λύσεις $(15, 0)$ και $(0, 6)$ απορρίπτονται, και η εξίσωση δέχεται μόνο τις λύσεις $(10, 2)$ και $(5, 4)$.

2. Να βρεθούν όλοι οι τριψήφιοι αριθμοί $\overline{xyz}$, που το άθροισμα των ψηφίων τους είναι 7, ενώ αν αλλάξουμε θέση το ψηφίο των μονάδων με το ψηφίο των εκατοντάδων, προκύπτει αριθμός ίσος με τον αρχικό.

Λύση

Έστω $\overline{xyz}$ ο αριθμός που ψάχνουμε. Τότε $\overline{xyz} = \overline{zyx}$, και επομένως $x = z$.

Επίσης $x + y + z = 7$, άρα $x + y + x = 7$ ή $2x + y = 7$, που δίνει $y = 7 - 2x$.

Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x_0 = 1$ και $y_0 = 5$. Έτσι όλες οι λύσεις δίνονται από τις σχέσεις $x = 1 + \tau$, $y = 5 - 2\tau$ και $-1 \le \tau \le \frac{5}{2}$, $\tau \in \mathbb{Z}$. Επομένως ο τ μπορεί να πάρει τις τιμές $-1, 0, 1, 2$. Με τις τιμές αυτές για τ, οι σχέσεις $x = 1 + \tau$ και $y = 5 - 2\tau$ δίνουν ως λύσεις (x, y) τα στοιχεία του συνόλου $\{(0, 7), (1, 5), (2, 3), (3, 1)\}$. Με τις τιμές αυτές για x και y, οι τριψήφιοι $\overline{xyz}$ του προβλήματος με $x = z$ είναι οι αριθμοί 151, 232, 313, αφού ο 070 δε θεωρείται γνήσιος τριψήφιος.

3. Αγοράζουμε από το ταχυδρομείο γραμματόσημα των 5 €, των 10 €, των 20 € και των 40 € ως εξής: Τα γραμματόσημα των 10 € είναι ίσα στον αριθμό με τα $\frac{2}{5}$ των γραμματοσήμων των 5 €, ενώ τα γραμματόσημα των 20 € είναι ίσα στον αριθμό με τα $\frac{3}{4}$ των γραμματοσήμων των 10 €. Αγοράζουμε και πέντε γραμματόσημα των 40 €. Πληρώνουμε με ένα χαρτονόμισμα και δεν παίρνουμε ρέστα. Πόσα γραμματόσημα από κάθε είδος αγοράσαμε;

Λύση

Έστω ότι αγοράσαμε x γραμματόσημα των 5 € και πληρώσαμε με ένα χαρτονόμισμα πολλαπλάσιο των 100 €, αφού τα γραμματόσημα των 40 € στοιχίζουν ήδη 200 €.

Τότε έχουμε την εξίσωση $5x + 10 \cdot \frac{2}{5}x + 20 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}x + 5 \cdot 40 = 100y$, η οποία γίνεται $15x - 100y = -200$ ή $3x - 20y = -40$ ή $x = \frac{20y - 40}{3}$.

Μια λύση της εξίσωσης αυτής είναι η $x_0 = 0$, $y_0 = 2$. Άρα όλες οι λύσεις δίνονται από τις σχέσεις $x = -20t$, $y = 2 - 3t$ και $t \le \min\left\{\frac{y_0}{\alpha}, -\frac{x_0}{\beta}\right\} = \min\left\{\frac{2}{3}, 0\right\} = 0$, αφού αναζητούμε μόνο θετικές λύσεις. Έτσι οι λύσεις είναι $x = -20t$, $y = 2 - 3t$ με $t < 0$. Η εξίσωση −και επομένως το πρόβλημα− φαίνεται να έχει άπειρες

λύσεις. Όμως οι λύσεις αυτές περιορίζονται αν λάβουμε υπόψη μας ότι τα γραμματόσημα πληρώθηκαν με ένα χαρτονόμισμα. Επειδή τα χαρτονομίσματα αξίας μεγαλύτερης των 100 € είναι αυτά των 200 € και των 500 €, έπεται ότι $100y = 200$ ή $100y = 500$, και επομένως $y = 2$ ή $y = 5$. Με τις τιμές αυτές για y στην εξίσωση $y = 2 - 3t$, έχουμε $t = 0$ όταν $y = 2$, καθώς και $t = -1$ όταν $y = 5$.

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $3x - 20y = -40$, καθώς και του προβλήματός μας, δίνονται από τις σχέσεις $x = -20t$, $y = 2 - 3t$ για $t = 0$ ή $t = -1$. Έτσι έχουμε ως λύσεις τα ζεύγη (x, y) με $(x, y) = (0, 2)$ και $(x, y) = (0, 2)$ $(x, y) = (20, 5)$.

Αν $(x, y) = (0, 2)$, τότε τα γραμματόσημα που αγοράσαμε είναι ως εξής: μηδέν των 5 €, μηδέν των 10 €, μηδέν των 20 €, και πέντε γραμματόσημα των 40 €, ενώ πληρώσαμε με ένα χαρτονόμισμα των 200 €.

Αν $(x, y) = (20, 5)$, τότε τα γραμματόσημα που αγοράσαμε είναι ως εξής: είκοσι των 5 €, $\frac{2}{5}20 =$ οκτώ των 10 €, $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}20 =$ έξι των 20 € και πέντε γραμματόσημα των 40 €, ενώ πληρώσαμε με ένα χαρτονόμισμα των 500 €.

Παράρτημα

1ο θεώρημα

Κάθε μη κενό υποσύνολο A των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^*$ $(A \subseteq \mathbb{N}^*)$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη

Έστω ότι τα στοιχεία του συνόλου A διατάσσονται με βάση τη σχέση διάταξης των φυσικών αριθμών. Αν ο 1 στοιχείο του A, τότε αποτελεί και το ελάχιστο στοιχείο του A. Υποθέτουμε τώρα ότι ο 1 δεν είναι στοιχείο του A. Τότε το A είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$.

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι για τυχόν σημείο ν του A υπάρχει φυσικός αριθμός μ τέτοιος, ώστε $(\nu - \mu) \in A$ (1). Προφανώς $\nu - \mu > 1 \Rightarrow \mu < \nu - 1$ (2).

Έστω τώρα σύνολο B των φυσικών μ, που προφανώς δεν είναι κενό. Από την ιδιότητα (2), συμπεραίνουμε ότι το B έχει μέγιστο στοιχείο, έστω μ_0. Τότε το $\nu - \mu_0$ είναι στοιχείο του A. Με βάση την υπόθεση ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, καταλήγουμε ότι υπάρχει φυσικός κ τέτοιος, ώστε $(\nu - \kappa) \in A$ και $\nu - \kappa < \nu - \mu_0 \Rightarrow \mu_0 < \kappa$, που είναι άτοπο, αφού ο μ_0 είναι ο μέγιστος φυσικός για τον οποίο ισχύει η σχέση (1). Επομένως, η υπόθεση ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο οδηγεί σε άτοπο· κατά συνέπεια, το A έχει ελάχιστο στοιχείο.

2ο θεώρημα

Το σύνολο των κοινών θετικών πολλαπλασίων δύο ακεραίων α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη

Ο φυσικός αριθμός $|\alpha\beta|$ είναι προφανώς θετικό κοινό πολλαπλάσιο των ακεραίων α, β, οπότε το σύνολο των κοινών θετικών πολλαπλασίων των ακεραίων α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, δεν είναι κενό, και επομένως με βάση το προηγούμενο θεώρημα έχει ελάχιστο στοιχείο, που είναι ο ε, και ο οποίος συμβολίζεται $\varepsilon = [\alpha, \beta]$. Τότε ο $\varepsilon = [\alpha, \beta]$ ονομάζεται απλά **«Ε.Κ.Π. των ακεραίων *α, β*»**. Προφανώς ισχύει $\varepsilon = [\alpha, \beta] = [|\alpha|, |\beta|]$.

3ο θεώρημα

Για ακεραίους α, β, με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, ισχύει ο τύπος $[\alpha, \beta] \leq |\kappa|$, όταν κ τυχόν κοινό πολλαπλάσιο των ακεραίων α, β.

Απόδειξη

Κατά τα γνωστά έχουμε $(\nu \in \mathbb{Z}^*, \lambda \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\nu \mid |\lambda\nu|, -\nu \mid |\lambda\nu|)$. Για τυχόν άρα κοινό πολλαπλάσιο κ των α, β, παίρνουμε ότι ο $|\kappa|$ κοινό θετικό πολλαπλάσιο των α, β, οπότε ανήκει στο σύνολο των κοινών θετικών πολλαπλασίων των α, β, που με βάση τα προηγούμενα έχει ελάχιστο στοιχείο τον $\varepsilon = [\alpha, \beta]$.

4ο θεώρημα

Για ακεραίους α, β, με την ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$, ισχύει ότι $[\alpha, \beta] \mid \kappa$, αν ο ακέραιος κ είναι τυχόν κοινό πολλαπλάσιό τους.

Απόδειξη

Έστω $|\kappa| \geq \varepsilon = [\alpha, \beta]$. Ισχύει τότε ο τύπος της αλγοριθμικής διαίρεσης, δηλαδή έχουμε ακεραίους π, υ τέτοιους, ώστε $|\kappa| = \varepsilon\pi + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < \varepsilon$. Θεωρούμε $0 < \upsilon$. Οι α, β διαιρούν τόσο τον $|\kappa|$ όσο και τον ε, άρα διαιρούν και τον υ. Συνεπώς, ο υ είναι κοινό θετικό πολλαπλάσιο των α, β, επομένως $\varepsilon \leq \upsilon$, που οδηγεί στο άτοπο $\upsilon < \upsilon$. Τελικά παίρνουμε $\upsilon = 0 \Rightarrow |\kappa| = \varepsilon\pi \Rightarrow \varepsilon \mid |\kappa| \Rightarrow \varepsilon \mid \kappa$.

5ο θεώρημα

Για ακεραίους α, β με ιδιότητα $\alpha\beta \neq 0$ ισχύουν:

1. $\varepsilon = [\alpha, \beta] \Rightarrow \varepsilon = |\beta_1\alpha| = |\alpha_1\beta|$.
2. $[\alpha, \beta](\alpha, \beta) = |\alpha\beta|$.

Απόδειξη

1. Γνωρίζουμε ότι $(\alpha, \beta) = (|\alpha|, |\beta|) = \delta \Rightarrow |\alpha| = |\alpha_1|\delta, |\beta| = |\beta_1|\delta$, με $(|\alpha_1|, |\beta_1|) = 1$. Θεωρούμε $[\alpha, \beta] = [|\alpha|, |\beta|] = \varepsilon$, οπότε, κατά τα γνωστά, έχουμε $\varepsilon = \varepsilon_1|\alpha|$ και $\varepsilon = \varepsilon_2|\beta|$. Αν $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon'$, τότε $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1\varepsilon'$, $\varepsilon_2 = \varepsilon'_2\varepsilon'$ με $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2) = 1$.
   Επομένως παίρνουμε $\varepsilon = \varepsilon'\varepsilon'_1|\alpha| \Leftrightarrow \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \varepsilon'_1|\alpha|$, $\varepsilon = \varepsilon'\varepsilon'_2|\beta| \Leftrightarrow \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \varepsilon'_2|\beta|$,

συνεπώς ο $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των $|\alpha|, |\beta|$, δηλαδή μεγαλύτερος ή ίσος του Ε.Κ.Π. τους. Άρα $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \geq \varepsilon \Leftrightarrow 1 \geq \varepsilon'$, που οδηγεί στην $\varepsilon' = 1 \Rightarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$. Τελικά έχουμε $[|\alpha|, |\beta|] = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_1|\alpha| = \varepsilon_1|\alpha_1|\delta = \varepsilon_2|\beta| = \varepsilon_2|\beta_1|\delta$, από όπου προκύπτει: $\varepsilon_1|\alpha_1|\delta = \varepsilon_2|\beta_1|\delta \Rightarrow \varepsilon_1|\alpha_1| = \varepsilon_2|\beta_1|$, δηλαδή παίρνουμε:
$|\beta_1| \mid \varepsilon_1, \varepsilon_1 \mid |\beta_1| \Rightarrow \varepsilon_1 = |\beta_1|$ και $|\alpha_1| \mid \varepsilon_2, \varepsilon_2 \mid |\alpha_1| \Rightarrow \varepsilon_2 = |\alpha_1|$.
Καταλήγουμε λοιπόν στην $\varepsilon = [\alpha, \beta] \Rightarrow \varepsilon = |\beta_1\alpha| = |\alpha_1\beta|$.

2. Έχουμε $[\alpha, \beta] = [|\alpha|, |\beta|] = |\beta_1||\alpha| = |\beta_1||\alpha_1|\delta = \frac{|\beta_1|\delta|\alpha_1|\delta}{\delta}$,
οπότε $[\alpha, \beta]\delta = |\beta||\alpha| \Rightarrow [\alpha, \beta](\alpha, \beta) = |\beta||\alpha|$.

6ο θεώρημα

Για ακεραίους α, β, γ, με ιδιότητα $\alpha\beta\gamma \neq 0$, ισχύει η ισότητα $[\gamma\alpha, \gamma\beta] = |\gamma|\,[|\alpha|, |\beta|]$.

Απόδειξη

Έχουμε: $[\gamma\alpha, \gamma\beta] = [|\gamma\alpha|, |\gamma\beta|] = \frac{|\gamma\alpha||\gamma\beta|}{(|\gamma\alpha|, |\gamma\beta|)} = |\gamma|[|\alpha|, |\beta|]$.

7ο θεώρημα

Το πρόβλημα του ***Euler***: «***Με πόσους τρόπους χωρίζεται ένα κυρτό ν-γωνο σε τρίγωνα με μη τεμνόμενες διαγωνίους του;»***. Το πρόβλημα αυτό έθεσε το έτος ***1751*** ο ***L. Euler*** στον ***C. Goldbach.***

Απάντηση

Οι τρόποι είναι $E(v) = \frac{2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot (4v-10)}{(v-1)!}$ (τύπος του Euler).

Πρόκειται για την αναδρομική ακολουθία $E(v)$, $v \in \mathbb{N}^*$ με $E(2) = E(3) = 1$ και
$E(v) = (E(v-1))(E(2)) + (E(v-2))(E(3)) +$
$+ \ldots + (E(3))(E(v-2)) + (E(2))(E(v-1))$, $v \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$.

Η απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής.

8ο θεώρημα (η εικασία του Catalan) (1844)

Πλέον είναι θεώρημα, αφού αποδείχτηκε το έτος ***2002*** από τον μεγάλο Ρουμάνο μαθηματικό ***Preda Mihăilescu (1955-)***: «***Οι μόνοι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που είναι δυνάμεις φυσικών είναι οι αριθμοί 8 και 9»***. Η απόδειξή του υπερβαίνει το πλαίσιο του βιβλίου αυτού.

Ασκησεις απο την Αριθμητικη στην Αλγεβρα

Α΄ Κατηγορία ασκήσεων

Άσκηση 1.01

Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού παίρνει τη μορφή $8\kappa+1$, όπου κ φυσικός αριθμός.

Άσκηση 1.02

Βρείτε φυσικό μονοψήφιο x τέτοιον, ώστε ο τριψήφιος $\overline{2\times 5}$ να είναι πολλαπλάσιο του 3 και του 9.

Άσκηση 1.03

Δίνεται η σύνθετη πρόταση: «Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες του τις γωνίες, ή τις διαγωνίους του ίσες, και οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα, τότε το τετράπλευρο είναι τετράγωνο». Να βρεθούν οι απλές προτάσεις από τις οποίες αποτελείται η παραπάνω σύνθετη πρόταση, και στη συνέχεια να αναπαρασταθεί μέσω λογικών συνδέσμων.

Άσκηση 1.04

Να αποδείξετε ότι $A\cap\left(B\cup\Gamma\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\Gamma\right)$, όπου A, B, Γ υποσύνολα συνόλου Ω.

Άσκηση 1.05

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι, όταν διαιρεθούν με τον 3, δίνουν πηλίκο 11.

Άσκηση 1.06

Αν τοποθετήσουμε τους μαθητές ενός σχολείου σε σειρές των 2, 3, 4, 5 και 6 μαθητών, τότε περισσεύει πάντα ένας μαθητής. Αν τοποθετήσουμε τους μαθητές σε σειρές των 7, τότε όλες οι σειρές είναι πλήρεις, και δεν περισσεύει κανένας μαθητής. Βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μαθητών που έχει το σχολείο.

Άσκηση 1.07

i) Δείξτε ότι ο αριθμός 27 είναι άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων.
ii) Δείξτε ότι ο 3^5 είναι άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων.
iii) Δείξτε ότι οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του 3 είναι άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων.

Άσκηση 1.08

Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός αριθμός είναι ίσος με τη διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών.

Άσκηση 1.09

Ο αριθμός κ είναι πρώτος, θετικός, ακέραιος και διαιρέτης του Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 12, 30 και 54. Να βρείτε τις δυνατές τιμές των κ και της παράστασης $A = \dfrac{2-\dfrac{\kappa}{2}}{\kappa-\dfrac{1}{2}} : \dfrac{\dfrac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής 2012)

Άσκηση 1.10

Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{x+1}{x^2-2x-3} - \dfrac{1}{x-2} = 0$ (1).

Άσκηση 1.11

Να γίνει γινόμενο παραγόντων η παράσταση $\left(\nu^2+3\nu+1\right)^2-1$.

Άσκηση 1.12

Αν ισχύει η ανισότητα $\dfrac{21}{5} < \dfrac{42}{\alpha} < \dfrac{21}{4}$ για θετικό ακέραιο α, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha + 5\left(4+\alpha\right) + 3\left(\alpha-4\right) + 1925$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής 2008)

Άσκηση 1.13

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τη διπλή ανίσωση $-4 < 1-2\beta < 5$, να λύσετε την ανίσωση $2\left(x+1\right) - \dfrac{3}{2}\left(x+1\right) < \dfrac{x}{\beta}$.

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής 2013)

Άσκηση 1.14

Να αποδείξετε την ισότητα $\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 3$.

Άσκηση 1.15

Δίνεται η ισότητα $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = 1$ (1). Να αποδείξετε ότι $x + y = 0$.

Άσκηση 1.16

Να γίνει γινόμενο η παράσταση $A = \left(\alpha-\beta\right)^3 + \left(\beta-\gamma\right)^3 + \left(\gamma-\alpha\right)^3$.

Β΄ Κατηγορία ασκήσεων

Άσκηση 1.17

Να βρεθεί τετραψήφιος φυσικός αριθμός, αν ισχύουν τα παρακάτω:

i) το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,

ii) το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
iii) το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
iv) το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

Άσκηση 1.18

Αν, για πραγματικούς αριθμούς α, β, γ και δ, ισχύουν $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$ και $\alpha\beta\gamma = 10$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha^2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^2 (\alpha + 2\beta)^2$.

Άσκηση 1.19

Να γίνει γινόμενο η παράσταση $A = (2\alpha - \beta - \gamma)^3 + (2\beta - \gamma - \alpha)^3 + (2\gamma - \alpha - \beta)^3$.

Άσκηση 1.20

Αν α, β, $\gamma \in \mathbb{N}^*$, και ισχύει $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \alpha\beta\gamma$, να αποδείξετε ότι:
$X = \sqrt{(\alpha^2\beta^2 + 1)(\beta^2\gamma^2 + 1)(\gamma^2\alpha^2 + 1)} \in \mathbb{Q}$

Άσκηση 1.21

Δίνεται ορθογώνιο στο A τρίγωνο, με μήκη πλευρών α, β και γ. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

(ΗΠΑ, 2000)

Άσκηση 1.22

Να αποδειχθεί ότι ο $\alpha = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ διαιρείται με τον 7.

Γ΄ Κατηγορία ασκήσεων

Άσκηση 1.23

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A_n = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ διαιρείται με τον 3, για κάθε θετικό ακέραιο n.

Άσκηση 1.24

Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p για τους οποίους υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι, ώστε $p + 1 = 2x^2$ και $p^2 + 1 = 2y^2$.

Άσκηση 1.25

Αν α, β, $\gamma > 0$ και $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} \geq \frac{3}{2}$.

Άσκηση 1.26

Αν α, β, γ θετικοί με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)} + \frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)} + \frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)} \geq \frac{3}{2}$.

(ΙΜΟ 1995, Καναδάς)

Άσκηση 1.27

Σε ένα σχολείο, το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δε μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δε μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Ευκλείδης 2014, Β΄ Γυμνασίου)

Άσκηση 1.28

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε οι αριθμοί $\alpha = \nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu + 1$ και $\beta = 3\nu^2 + 3\nu - 1$ να έχουν το ίδιο άθροισμα ψηφίων.

Άσκηση 1.29

Για τους θετικούς ακεραίους α, β αποδείξτε ότι $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta} \geq \alpha^{\beta}\beta^{\alpha}$ (1).

Άσκηση 1.30

Αναλύστε την παράσταση $3^{4\nu+1} + 1$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, σε άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων.

Λυσεις Ασκησεων

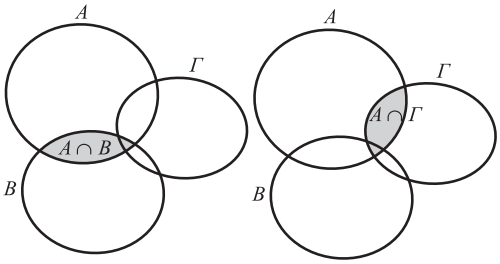
Α΄ Κατηγορία ασκήσεων

1.01 Γνωρίζουμε ότι κάθε περιττός αριθμός έχει τη μορφή $2\nu+1$. Το τετράγωνό του είναι $(2\nu+1)^2 = 4\nu^2+4\nu+1 = 4\nu(\nu+1)+1$. Έχουμε αποδείξει ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 2, δηλαδή $\nu(\nu+1) = 2\kappa$, οπότε
$(2\nu+1)^2 = 4\nu(\nu+1)+1 = 4\cdot 2\kappa+1 = 8\kappa+1$.

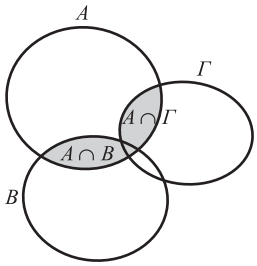
1.02 Για να είναι ένας φυσικός αριθμός πολλαπλάσιο του 3 και του 9, πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του να είναι πολλαπλάσιο του 3 και του 9 αντίστοιχα. Δηλαδή ο αριθμός $2+x+5 = 7+x$ θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 9. Επομένως πρέπει $x = 2$, οπότε ο αριθμός που προκύπτει είναι ο $\overline{225}$, ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 3 και του 9.

1.03 Η σύνθετη αυτή πρόταση περιέχει τις απλές προτάσεις:
p: «Οι γωνίες του τετραπλεύρου είναι όλες ίσες».
q: «Οι διαγώνιοι είναι ίσες».
r: «Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα».
s: «Το τετράπλευρο είναι τετράγωνο».
Με τη βοήθεια των προτάσεων p, q, r, s και των λογικών συνδέσμων $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, γράφουμε την αρχική σύνθετη πρόταση.
Η πρόταση: «Το τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες και οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα» γράφεται $p \wedge r$.
Η πρόταση: «Το τετράπλευρο έχει διαγωνίους ίσες που τέμνονται κάθετα» γράφεται $q \wedge r$.
Η πρόταση: «Το τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες ή τις διαγωνίους του ίσες και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα» είναι η διάζευξη των δύο παραπάνω προτάσεων και γράφεται $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
Η τελευταία πρόταση μπορεί να γραφτεί και ως εξής: $(p \vee q) \wedge r$.
Η τελευταία αυτή πρόταση συνεπάγεται ότι το τετράπλευρο είναι τετράγωνο. Οπότε η αρχική πρόταση γράφεται $(p \vee q) \wedge r \Rightarrow s$.

1.04 Παίρνουμε τρία σύνολα A, B και Γ και σχηματίζουμε σε δύο διαγράμματα τις τομές $A \cap B$ και $A \cap \Gamma$.



Γράφουμε την πρόταση που συμβολίζει την ένωσή τους: $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$



Βλέπουμε ότι το σύνολο που προκύπτει δεν είναι άλλο από το $A \cap (B \cup \Gamma)$.
Το παραπάνω σχήμα μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:
Για κάθε $x \in \Omega$ ισχύει
$x \in (A \cap (B \cup \Gamma)) \Leftrightarrow$
$x \in A$ και $(B \cup \Gamma) \Leftrightarrow$
$x \in A$ και $(x \in B$ ή $x \in \Gamma) \Leftrightarrow$
$(x \in A$ και $x \in B)$ ή $(x \in A$ και $x \in \Gamma) \Leftrightarrow$
$(x \in A \cap B)$ ή $(x \in A \cap \Gamma) \Leftrightarrow$
$(x \in A \cap B)$ ή $(x \in A \cap \Gamma) \Leftrightarrow$
$x \in ((A \cap B) \cup (A \cap \Gamma))$

1.05 Γνωρίζουμε τον τύπο της ευκλείδειας διαίρεσης $\Delta = \delta\pi + \upsilon$, με $0 \le \upsilon < \delta$.
Επομένως, όταν ο διαιρέτης είναι 3, το υπόλοιπο θα είναι 0, 1, 2. Επίσης γνωρίζουμε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση το πηλίκο είναι 11. Έχουμε λοιπόν:

για $\upsilon = 0$ $\quad \Delta = 3\cdot 11 + 0 = 33$
για $\upsilon = 1$ $\quad \Delta = 3\cdot 11 + 1 = 34$
για $\upsilon = 2$ $\quad \Delta = 3\cdot 11 + 2 = 35$
Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 33, 34, 35.

1.06 Αν M το πλήθος των μαθητών, σύμφωνα με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα έχουμε
$M = 2\kappa_1 + 1$, $M = 3\kappa_2 + 1$, $M = 4\kappa_3 + 1$,
$M = 5\kappa_4 + 1$, $M = 6\kappa_5 + 1$, $M = 7\kappa_6$.
Οπότε $M - 1 = \text{πολ}2$, $M - 1 = \text{πολ}3$,
$M - 1 = \text{πολ}4$, $M = \text{πολ}5$, $M = \text{πολ}6$.
Άρα το $M - 1$ θα είναι πολλαπλάσιο του Ε.Κ.Π.$(2, 3, 4, 5, 6)$, δηλαδή
$M - 1 = \text{πολ}60$ ή $M = 60\kappa + 1$.
Ζητείται να βρούμε τον μικρότερο κ, έτσι ώστε ο M να είναι ο ελάχιστος δυνατός αριθμός μαθητών που διαιρείται με τον 7. Εύκολα, με δοκιμές, ανακαλύπτουμε ότι $\kappa = 5$, οπότε $M = 60\cdot 5 + 1 = 301$.
Άρα ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που έχει το σχολείο είναι 301.

1.07

i) Αν οι τρεις διαδοχικοί αριθμοί είναι οι κ, $\kappa + 1$, $\kappa + 2$, τότε το άθροισμά τους είναι $\kappa + \kappa + 1 + \kappa + 2 = 27$, ή $3\kappa + 3 = 27$, ή $3\kappa = 24$, ή $\kappa = 8$.
Οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 8, 9 και 10.

ii) Παρατηρούμε ότι $3^5 = 243$. Αν υπάρχει αριθμός κ, τότε $\kappa + \kappa + 1 + \kappa + 2 = 243$, άρα $3\kappa = 240$ ή $\kappa = 80$. Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 80, 81, 82.

iii) Παρατηρούμε ότι αν $\kappa - 1$, κ, $\kappa + 1$ είναι τρεις διαδοχικοί αριθμοί, τότε
$(\kappa - 1) + \kappa + (\kappa + 1) = 3\kappa$, δηλαδή
$(\kappa - 1) + \kappa + (\kappa + 1) = \text{πολ}3$. Άρα το άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 3.

1.08 Οι αριθμοί ν και $\nu + 1$ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Οπότε έχουμε
$(\nu + 1)^2 - \nu^2 = \nu^2 + 2\nu + 1 - \nu^2 = 2\nu + 1$ περιττός, αφού κάθε περιττός αριθμός έχει τη μορφή $2\nu + 1$, όπου ν φυσικός αριθμός.

1.09 Έχουμε Μ.Κ.Δ.$(12, 30, 54) = 6$. Οι διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, και, από αυτούς, πρώτοι αριθμοί είναι οι 2 και 3.
Για $\kappa = 2$ έχουμε:

$$A = \frac{2 - \frac{2}{2}}{2 - \frac{1}{2}} : \frac{\frac{3-2}{2}}{2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{1} = \frac{8}{3}$$

Για $\kappa = 3$ έχουμε:

$$A = \frac{2 - \frac{3}{2}}{3 - \frac{1}{2}} : \frac{\frac{3-3}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} : \frac{0}{3} = \frac{1}{5} : 0$$

Όταν ο διαιρέτης είναι 0, η πράξη της διαίρεσης δεν ορίζεται. Άρα η μόνη δυνατή τιμή του A είναι $A = \frac{8}{3}$.

1.10 Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Για να αναλύσουμε σε γινόμενο το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$, λύνουμε πρώτα την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$.
Έχουμε
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4\cdot 1(-3) = 4 + 12 = 16$,
οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3, \text{ και}$$

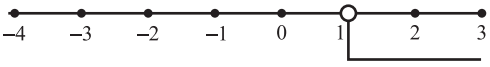
$$x_2 = \frac{-(-2) - 16}{2\cdot 1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Άρα η (1) γίνεται $\frac{x+1}{(x-3)(x+1)} - \frac{1}{x-2} = 0$, που, για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού, πρέπει $(x-3)(x+1) \neq 0$ και $x - 2 \neq 0$.
Δηλαδή αρκεί $x - 3 \neq 0$, και $x + 1 \neq 0$, και $x - 2 \neq 0$, άρα $x \neq 3$, και $x \neq -1$, και $x \neq 2$, δηλαδή $x \neq -1, 2, 3$.
Ε.Κ.Π. παρονομαστών $= (x-3)(x+1)(x-2)$.
Πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. και τα δύο μέλη της (1), και αυτή γίνεται
$(x+1)(x-2) - (x-3)(x+1) = 0$. Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $x + 1$ και έχουμε
$(x+1)[(x-2) - (x-3)] = 0$
$(x+1)(x - 2 - x + 3) = 0$
$x + 1 = 0$, άρα $x = -1$.
Καθώς $x \neq -1, 2, 3$, η $x = -1$ απορρίπτεται. Άρα η εξίσωση (1) δεν έχει καμία λύση, είναι αδύνατη.

1.11 $\left(\nu^2+3\nu+1\right)^2-1=\left(\nu^2+3\nu+1\right)^2-1^2=$
$=\left(\nu^2+3\nu+1+1\right)\left(\nu^2+3\nu\right)$
$=\left(\nu^2+3\nu+2\right)\left(\nu^2+3\nu\right)$
Η παράσταση $\nu^2+3\nu+2$ γίνεται
$\nu^2+3\nu+2=\nu^2+\nu+2\nu+2=$
$=\nu\left(\nu+1\right)+2\left(\nu+1\right)=\left(\nu+1\right)\left(\nu+2\right)$
Άρα $\left(\nu^2+3\nu+1\right)^2-1$
$=\left(\nu+1\right)\left(\nu+2\right)\nu\left(\nu+3\right)=$
$=\nu\left(\nu+1\right)\left(\nu+2\right)\left(\nu+3\right).$

1.12 Παρατηρούμε ότι $\frac{21}{5}<\frac{42}{\alpha}<\frac{21}{4}$ ή $\frac{42}{10}<\frac{42}{\alpha}<\frac{42}{8}$ ή $8<\alpha<10$, γιατί όταν έχουμε κλάσματα με ίσους αριθμητές, μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μικρότερο παρονομαστή. Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9, και η αριθμητική τιμή της παράστασης είναι
$A=9+5\left(4+9\right)+3\left(9-4\right)+1925=2014.$

1.13 Με βάση την $-4<1-2\beta<5$, έχουμε $-5<-2\beta<4$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με -2, η παράσταση γίνεται $\frac{-5}{-2}>\frac{-2\beta}{-2}>\frac{4}{-2}$, άρα $\frac{5}{2}>\beta>-2$. Γνωρίζουμε ότι ο β είναι θετικός και ακέραιος, άρα οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει είναι $\beta=1$ ή $\beta=2$.
Για $\beta=1$ η ανίσωση γίνεται
$2\left(x+1\right)-\frac{3}{2}\left(x+1\right)<x$, οπότε
$2x-\frac{3x}{2}-x<\frac{3}{2}-2$ και τελικά $x>1$.
Για $\beta=2$ η ανίσωση γίνεται
$2\left(x+1\right)-\frac{3}{2}\left(x+1\right)<\frac{x}{2}$, οπότε
$\frac{1}{2}\left(x+1\right)<\frac{x}{2}$, άρα $x+1<x$. Οπότε $x-x<-1$, δηλαδή $0\cdot x<-1$, που είναι άτοπο.
Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x>1$.



1.14 Παρατηρούμε ότι
$17-12\sqrt{2}=\left(3-2\sqrt{2}\right)^2$, $3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ και $3+2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$. Επομένως
$\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=$
$=\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=$
$=3-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=3.$

1.15 Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας (1) με $x-\sqrt{x^2+1}$, και έχουμε
$\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=$
$=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right).$
$\left(x^2-x^2-1\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}$. Άρα
$\left(-1\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}$. Οπότε
$y+\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x$ (2)
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας (1) με $y-\sqrt{y^2+1}$, και έχουμε
$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=$
$=\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y^2-y^2-1\right)=$
$=y-\sqrt{y^2+1}$. Άρα
$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-1\right)=y-\sqrt{y^2+1}$, οπότε
$x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y$ (3).
Από την ισότητα (2) έπεται
$y+\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}+x=0$ (4),
και από την ισότητα (3) έπεται
$x+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}+y=0$ (5).
Προσθέτοντας τις (4) και (5) παίρνουμε
$2x+2y=0$, άρα $2\left(x+y\right)=0$, οπότε $x+y=0$.

1.16 Παρατηρούμε ότι
$\left(\alpha-\beta\right)+\left(\beta-\gamma\right)+\left(\gamma-\alpha\right)=$
$=\alpha-\beta+\beta-\gamma+\gamma-\alpha=0.$
Οπότε $A=\left(\alpha-\beta\right)^3+\left(\beta-\gamma\right)^3+\left(\gamma-\alpha\right)^3=$
$=3\left(\alpha-\beta\right)\left(\beta-\gamma\right)\left(\gamma-\alpha\right).$

Β΄ Κατηγορία ασκήσεων

1.17 Έστω
$\overline{xyzw}=1000x+100y+10z+w$ ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με

το (i) θα είναι $w = 0$ ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το (ii) θα είναι $z = 0$ ή 2 ή 4 αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το (iii) θα είναι $y = 1$ ή 5. Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:
$\overline{x100}$, $\overline{x124}$, $\overline{x148}$, $\overline{x500}$, $\overline{x524}$, $\overline{x548}$
Λαμβάνοντας υπόψη και το (iv), καταλήγουμε στους αριθμούς 4500, 4524, 4548, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

1.18 Αφού $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$, τότε

$\alpha + \frac{\gamma}{2} = -2\beta$, άρα και $\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^2 = 4\beta^2$. Ομοίως

$\alpha + 2\beta = -\frac{\gamma}{2}$, άρα και $(\alpha + 2\beta)^2 = \frac{\gamma^2}{4}$.

Άρα $A = \alpha^2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^2 (\alpha + 2\beta)^2 =$

$\alpha^2 4\beta^2 \frac{\gamma^2}{4} = \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = 100.$

1.19 Σύμφωνα με τη γνωστή ταυτότητα για το άθροισμα κύβων, αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$. Οπότε έχουμε
$(2\alpha - \beta - \gamma) + (2\beta - \gamma - \alpha) + (2\gamma - \alpha - \beta) = 0$, άρα
$A = (2\alpha - \beta - \gamma)^3 + (2\beta - \gamma - \alpha)^3 + (2\gamma - \alpha - \beta)^3 =$
$= 3(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta).$

1.20 Έχουμε:
$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = \alpha^2\beta^2\gamma^2$
Επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε τους παράγοντες $(\alpha^2\beta^2 + 1)(\beta^2\gamma^2 + 1)(\gamma^2\alpha^2 + 1)$ μέσα στη ρίζα, από τη σχέση $\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta$, αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με γ^2, έχουμε:

$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\gamma^2} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\gamma^2} \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\gamma^2} \Leftrightarrow$

$\alpha^2\beta^2 + 1 = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\gamma^2} + 1 \Leftrightarrow$

$\alpha^2\beta^2 + 1 = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta + \gamma^2}{\gamma^2} \Leftrightarrow$

$\alpha^2\beta^2 + 1 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma + \gamma^2}{\gamma^2} =$

$= \frac{\beta(\alpha + \gamma) + \gamma(\alpha + \gamma)}{\gamma^2} = \frac{(\gamma + \alpha)(\gamma + \beta)}{\gamma^2}$

Ομοίως, βρίσκουμε $\beta^2\gamma^2 + 1 = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)}{\alpha^2}$

και $\gamma^2\alpha^2 + 1 = \frac{(\beta + \alpha)(\beta + \gamma)}{\beta^2}$.

Οπότε $X = \sqrt{(\alpha^2\beta^2 + 1)(\beta^2\gamma^2 + 1)(\gamma^2\alpha^2 + 1)} =$

$= \sqrt{\frac{(\gamma + \alpha)(\gamma + \beta)}{\gamma^2}\frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)}{\alpha^2}\frac{(\beta + \alpha)(\beta + \gamma)}{\beta^2}} \Leftrightarrow$

$X = \sqrt{\frac{(\alpha + \beta)^2(\beta + \gamma)^2(\gamma + \alpha)^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}} =$

$= \frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}{\alpha\beta\gamma}$, που είναι ρητός.

1.21 Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με $\angle A = 90°$, λόγω πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Οπότε
$A = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^3 + \beta^2\beta + \gamma^3 =$
$= \alpha^3 + \beta(\alpha^2 - \gamma^2) + \gamma^3 = \alpha^3 + \gamma^3 + \beta(\alpha^2 - \gamma^2)$
$A = \alpha^3 + \gamma^3 + \beta(\alpha^2 - \gamma^2) =$
$= (\alpha + \gamma)(\alpha^2 - \alpha\gamma + \gamma^2) + \beta(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) =$
$= (\alpha + \gamma)[\alpha^2 - \alpha\gamma + \gamma^2 + \beta(\alpha - \gamma)]$
$A = (\alpha + \gamma)(\alpha^2 - \alpha\gamma + \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta - \beta\gamma) =$
$= (\alpha + \gamma)(\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha^2 - \beta^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma)$
$A = (\alpha + \gamma)[\alpha(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - \gamma(\alpha + \beta)] =$
$= (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta)[\alpha + (\alpha - \beta) - \gamma]$, επομένως
$A = (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta)(2\alpha - \beta - \gamma).$

1.22 ***1ος τρόπος***
Για να διαιρείται ο αριθμός α με τον 7, αρκεί να διαιρούνται με τον 7 οι προσθετέοι που τον αποτελούν. Παρατηρούμε ότι $2222 = 7 \cdot 317 + 3$ και $5555 = 7 \cdot 793 + 4$. Επομένως αν στον 2222 προστεθεί ο 4, και από τον 5555 αφαιρεθεί ο 4, θα προκύψουν πολλαπλάσια του 7. Οπότε
$\alpha = 2222^{5555} + 5555^{2222} =$
$= 2222^{5555} + 4^{5555} - 4^{5555} + 5555^{2222} - 4^{2222} + 4^{2222} =$
$2222^{5555} + 5555^{2222} = (2222^{5555} + 4^{5555}) +$
$+ (5555^{2222} - 4^{2222}) - (4^{5555} - 4^{2222}) =$
$= (2222 + 4)(2222^{5554} - \ldots + 4^{5554}) +$
$+ (5555 - 4)(5555^{2221} + \ldots + 4^{2221}) - 4^{2222}(4^{3333} - 1) =$
$= 2226(2222^{5554} - \ldots + 4^{5554}) +$
$+ 5551(5555^{2221} + \ldots + 4^{2221}) - 4^{2222}(4^{3333} - 1)$ (1).

Παρατηρούμε ότι $4^{3333}=\left(4^3\right)^{1111}$, οπότε

$4^{2222}\left(4^{3333}-1\right)=4^{2222}\left[\left(4^3\right)^{1111}-1^{1111}\right]=$

$=4^{2222}\left[\left(4^3\right)-1\right]\left[\left(4^3\right)^{1110}+\ldots+1^{1110}\right]$.

Άρα η (1) γίνεται

$\alpha=7\cdot 318\left(2222^{5554}-\ldots+4^{5554}\right)+$

$+7\cdot 793\left(5555^{2221}+\ldots+4^{2221}\right)-$

$-4^{2222}(63)\left(64^{1110}+\ldots+1\right)$, επομένως

$\alpha=7\cdot 318\left(2222^{5554}-\ldots+4^{5554}\right)+$

$+7\cdot 793\left(5555^{2221}+\ldots+4^{2221}\right)-4^{2222}\cdot 7\cdot 9\left(64^{1110}+\ldots+1\right)$

και $\alpha=7\left[318\left(2222^{5554}-\ldots+4^{5554}\right)+\right.$

$\left.+793\left(5555^{2221}+\ldots+4^{2221}\right)-4^{2222}\cdot 9\left(64^{1110}+\ldots+1\right)\right]=$

$=7\lambda$, με $\lambda\in\mathbb{Z}$, όπου

$\lambda=318\left(2222^{5554}-\ldots+4^{5554}\right)+$

$+793\left(5555^{2221}+\ldots+4^{2221}\right)-4^{2222}\cdot 9\left(64^{1110}+\ldots+1\right)$.

Άρα $7\mid\alpha$.

2ος τρόπος

Σκέψη

Η μορφή του αθροίσματος $2222^{5555}+5555^{2222}$ μας οδηγεί να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους $\alpha^{2\rho}+\beta^{2\rho}=(\alpha+\beta)\lambda$ και $\alpha^{\theta}-\beta^{\theta}=(\alpha-\beta)\mu$.

Λύση

Έχουμε $2222^{5555}+5555^{2222}=2222^{5555}+5555^{5555}-$

$-5555^{5555}+5555^{2222}\Rightarrow 2222^{5555}+5555^{2222}=$

$=7777\kappa-5555^{2222}\left(5555^{3333}-1\right)$ (1).

Επίσης έχουμε

$5555^{3333}-1=5555^{3333}-4^{3333}+4^{3333}-1=$

$=7\lambda+64^{1111}-1=7\lambda+7\mu=7\nu$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει το ζητούμενο.

Γ΄ Κατηγορία ασκήσεων

1.23 ***1ος τρόπος***

Ο αριθμός A_n γράφεται $A_n=n^3+3n^2+5n+3=$

$=n^3-n+3(n+1)^2=n(n-1)(n+1)+3(n+1)^2$.

Επειδή ο όρος $n(n-1)(n+1)$ είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, όπως γνωρίζουμε, διαιρείται με τον 3. Επειδή και ο όρος $3(n+1)^2$ διαιρείται με τον 3, έπεται ότι και $3\mid A_n$.

2ος τρόπος

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να εργαστούμε με επαγωγή. Για $n=1$, έχουμε $A_1=12=$ πολλαπλάσιο του 3. Υποθέτουμε ότι $3\mid A_n$. Τότε έχουμε

$A_{n+1}=(n+1)^3+3(n+1)^2+5(n+1)+3=$

$=A_n+3\left(n^2+3n+3\right)$, οπότε, λόγω της υπόθεσης της επαγωγής, έπεται ότι $3\mid A_{n+1}$.

Άρα ο αριθμός $A_n=n^3+3n^2+5n+3$ διαιρείται με τον 3, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

1.24 Επειδή οι σχέσεις της άσκησης εμφανίζουν τους x, y στο τετράγωνο, θα περιοριστούμε στην αναζήτηση θετικών ακεραίων x, y.

Παρατηρούμε ότι ο $2x^2$ είναι άρτιος, οπότε ο πρώτος αριθμός p πρέπει να είναι περιττός. (Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν αποκλείσουμε την ισότητα μεταξύ αριθμού p και 2.) Με αφαίρεση, κατά μέλη, των δύο σχέσεων, λαμβάνουμε:

$p^2-p=2\left(y^2-x^2\right)\Leftrightarrow$

$p(p-1)=2(y-x)(y+x)$ (1).

Επειδή p περιττός, δεν μπορεί να διαιρεί τον 2.

- Αν $p\mid(y-x)$, τότε $p\le y-x$, οπότε από την ισότητα (1) προκύπτει ότι $p-1\ge 2y+2x$, κάτι που είναι άτοπο.
- Αν $p\mid(y+x)$, τότε $p\le y+x$, οπότε από την ισότητα (1) προκύπτει ότι $p-1\ge 2y-2x$.

  Από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

  $y\le\dfrac{p-1+2x}{2}$, οπότε

  $p\le y+x\le\dfrac{p-1+2x}{2}+x\Rightarrow p+1\le 4x$ (2).

  Επειδή $p+1=2x^2$, από τη σχέση (2) λαμβάνουμε την ανισότητα $2x^2\le 4x\Leftrightarrow x\le 2$.

  Για $x=1\Rightarrow p=1$ (μη πρώτος αριθμός), ενώ για $x=2$ λαμβάνουμε $p=7$.

1.25 Σύμφωνα με την ανισότητα Buniakovski-Cauchy-Schwarz

$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots+\alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\ldots+\beta_\nu^2\right)\ge$

$\ge\left(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu\right)^2$, για τις τριάδες των αριθμών $\left(\sqrt{\beta+\gamma},\sqrt{\gamma+\alpha},\sqrt{\alpha+\beta}\right)$, $\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta+\gamma}},\dfrac{\beta}{\sqrt{\gamma+\alpha}},\dfrac{\gamma}{\sqrt{\alpha+\beta}}\right)$ έχουμε

$\left((\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)+(\alpha+\beta)\right)\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\right)\ge$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta+\gamma)\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\right)\ge$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2\Leftrightarrow\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\ge\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ (1).

Αλλά $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ (2). Επειδή $\alpha\beta\gamma = 1$, η (2) γίνεται $\alpha+\beta+\gamma \geq 3$. Επομένως από την (1) συνεπάγεται $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$.

1.26 Θέτουμε $\alpha = \frac{1}{x}$, $\beta = \frac{1}{y}$, $\gamma = \frac{1}{z}$. Οπότε:

$\alpha\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow xyz = 1$ (1)

Επομένως

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{y^3}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3yz}{y+z}+\frac{xy^3z}{x+z}+\frac{xyz^3}{x+y}+ \geq \frac{3}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}+ \geq \frac{3}{2}$. Χρησιμοποιούμε την ανισότητα Buniakovski-Cauchy-Schwarz για $\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{y+z}}$, $\alpha_2 = \frac{y}{\sqrt{x+z}}$, $\alpha_3 = \frac{z}{\sqrt{x+y}}$ και $\beta_1 = \sqrt{y+z}$, $\beta_2 = \sqrt{x+z}$, $\beta_3 = \sqrt{x+y}$, οπότε έχουμε:

$$\left[\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2\right]$$

$$\left[\left(\sqrt{y+z}\right)^2+\left(\sqrt{x+z}\right)^2+\left(\sqrt{x+y}\right)^2\right] \geq$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{x+z}}\sqrt{x+z}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)$$

$$\left[(y+z)+(x+z)+(x+y)\right] \geq (x+y+z)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)\left[2(x+y+z)\right] \geq$$

$$\geq (x+y+z)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} \quad (2)$$

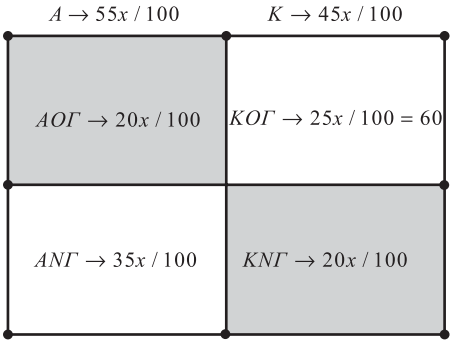
Αλλά $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, και επειδή $xyz = 1$, έχουμε $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow x+y+z \geq 3$.

Άρα η (2) γίνεται $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$.

1.27 ***1ος τρόπος***

Αφού το πλήθος των αγοριών που δε μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά, έπεται ότι το πλήθος των μαθητών που μιλούν γαλλικά ισούται με το 55% του συνόλου των μαθητών. Επομένως το ποσοστό των αγοριών που μιλούν γαλλικά επί του συνόλου των μαθητών του σχολείου είναι $\frac{7}{11}\cdot\frac{55}{100} = \frac{35}{100}$, δηλαδή το 35% επί του συνόλου των μαθητών. Επομένως $(55-35) = 20\%$ είναι το ποσοστό των αγοριών που δε μιλούν γαλλικά επί του συνόλου των μαθητών, αλλά και των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Επομένως το ποσοστό των κοριτσιών που δε μιλούν γαλλικά είναι $(100-55-20) = 25\%$, οπότε το 25% των κοριτσιών που δε μιλούν γαλλικά αντιστοιχεί σε 60 μαθητές. Άρα το πλήθος των μαθητών του σχολείου είναι $60\cdot\frac{100}{25} = 240$. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να περιγραφεί με το σχήμα που ακολουθεί, ως εξής:

x = αριθμός μαθητών



Συμβολικά έχουμε A = σύνολο αγοριών σχολείου με $|A| = \frac{55x}{100}$.

K = σύνολο κοριτσιών σχολείου με $|K| = \frac{45x}{100}$.

$AO\Gamma$ = σύνολο αγοριών που δε μιλούν γαλλικά.

$AN\Gamma$ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.

$KO\Gamma$ = σύνολο κοριτσιών που δε μιλούν γαλλικά.

$KN\Gamma$ = σύνολο κοριτσιών που μιλούν γαλλικά.

Με βάση την υπόθεση, έχουμε ότι το **πλήθος των στοιχείων από τα σύνολα *ΑΟΓ* και *ΚΝΓ***

είναι το ίδιο, δηλαδή: $|AO\Gamma| = |KN\Gamma|$, οπότε έχουμε:
(αριθμός μαθητών που μιλούν γαλλικά)
$|KN\Gamma| + |AN\Gamma| = |AO\Gamma| + |AN\Gamma| =$
$= \frac{55x}{100}$ (αριθμός αγοριών),
$|AN\Gamma| = \frac{7}{11} \cdot \frac{55x}{100} = \frac{35x}{100}$,
$|AO\Gamma| = (55-35)\frac{x}{100} = \frac{20x}{100} = |KN\Gamma|$,
$|KO\Gamma| = (45-20)\frac{x}{100} = \frac{25x}{100} = 60 \Leftrightarrow$
$x = 240$.

2ος τρόπος

Έστω x το πλήθος των αγοριών και y το πλήθος των κοριτσιών. Έστω ακόμη α το πλήθος των αγοριών που γνωρίζουν γαλλικά, και κ το πλήθος των κοριτσιών που γνωρίζουν γαλλικά.
Από τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:
Εφόσον το 55% των μαθητών είναι αγόρια, θα ισχύει: $x = \frac{55}{100}(x+y) \Leftrightarrow 100x = 55x + 55y \Leftrightarrow$
$9x = 11y \Leftrightarrow y = \frac{9}{11}x$ (1).
Εφόσον το πλήθος των αγοριών που δε μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά, θα ισχύει:
$x - \alpha = \kappa \Leftrightarrow x = \kappa + \alpha$ (2)
Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Άρα:
$\frac{7}{11}(\kappa + \alpha) = \alpha \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{7}{11}x = \alpha$ (3)
Επειδή το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά είναι 60, θα ισχύει η ισότητα: $y = \kappa + 60$.
Προσθέτοντας και στα δύο μέλη (της τελευταίας ισότητας) το α, έχουμε:
$y = \kappa + 60 \Leftrightarrow y + \alpha = \kappa + \alpha + 6 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$
$y + \alpha = x + 60 \overset{(1),(3)}{\Longleftrightarrow} \frac{9}{11}x + \frac{7}{11}x = x + 60 \Leftrightarrow$
$\frac{5}{11}x = 60 \Leftrightarrow x = 132$
Άρα το πλήθος των αγοριών είναι 132, το πλήθος των κοριτσιών $y = \frac{9}{11}x = \frac{9}{11} \cdot 132 = 108$, οπότε το συνολικό πλήθος των μαθητών είναι 240.

1.28 Αν δεχτούμε ότι υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε οι αριθμοί $\alpha = \nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu + 1$ και $\beta = 3\nu^2 + 3\nu - 1$ να έχουν το ίδιο άθροισμα ψηφίων, και Σ είναι το άθροισμα των ψηφίων του α, τότε Σ θα είναι και το άθροισμα των ψηφίων του β.
Ισχύει $\alpha = \Sigma \pmod 9$ και $\beta = \Sigma \pmod 9$
Βασικό θεώρημα 1.7.4., σελ. 29 (1) (βλέπε ***παρατήρηση 4***).
Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν
$\alpha - \beta = 0 \pmod 9$
Αλλά $\alpha - \beta = 0 \pmod 9 \Leftrightarrow 9 \mid \alpha - \beta$ (2).
Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε $3 \mid \alpha - \beta$.
Έχουμε όμως $\alpha - \beta = \nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu + 1 -$
$-(3\nu^2 + 3\nu - 1) = \nu^3 - \nu + 2 = \nu(\nu^2 - 1) + 2 \Leftrightarrow$
$\alpha - \beta - (\nu - 1)\nu(\nu + 1) = 2$.
Επειδή $3 \mid \alpha - \beta$ και $3 \mid (\nu - 1)\nu(\nu + 1)$ ως γινόμενο τριών διαδοχικών φυσικών, θα διαιρεί και τη διαφορά, δηλαδή $3 \mid \alpha - \beta - (\nu - 1)\nu(\nu + 1)$.
Οπότε $3 \mid 2$, που είναι άτοπο. Άρα οι αριθμοί α, β, έχουν διαφορετικό άθροισμα ψηφίων.

1.29 Το δεύτερο μέλος της (1), δηλαδή το $\alpha^\beta \beta^\alpha = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\beta \text{ φορές}} \cdot \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \ldots \cdot \beta}_{\alpha \text{ φορές}}$, οδηγεί στην εξής λύση:
Από τη γνωστή ανισότητα του Cauchy, έχουμε
$$\frac{\overbrace{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha}^{\beta \text{ φορές}} + \overbrace{\beta + \beta + \ldots + \beta}^{\alpha \text{ φορές}}}{\alpha + \beta} \geq \sqrt[\alpha+\beta]{\alpha^\beta \beta^\alpha},$$
οπότε παίρνουμε $\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} \geq \sqrt[\alpha+\beta]{\alpha^\beta \beta^\alpha}$ (2),
και επίσης $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Rightarrow$
$\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$ (3).
Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:
$$\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt[\alpha+\beta]{\alpha^\beta \beta^\alpha} \Rightarrow \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\alpha+\beta} \geq \alpha^\beta \beta^\alpha$$

1.30 Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε αναπτύγματα τετραγώνων:
$3^{4\nu+1} + 1 = 3 \cdot 3^{4\nu} + 1 =$
$= 3^{4\nu} + 3^{4\nu} + 3^{4\nu} - 2 \cdot 3^{2\nu} + 1 + 2 \cdot 3^{2\nu} =$
$= 3^{4\nu} - 2 \cdot 3^{2\nu} + 1 + 3^{4\nu} + 3^{4\nu} + 3^{2\nu} + 3^{2\nu} =$
$= (3^{2\nu} - 1)^2 + 3^{4\nu} + 2 \cdot 3^{3\nu} + 3^{2\nu} + 3^{4\nu} - 2 \cdot 3^{3\nu} + 3^{2\nu} =$
$= (3^{2\nu} - 1)^2 + (3^{2\nu} + 3^\nu)^2 + (3^{2\nu} - 3^\nu)^2$