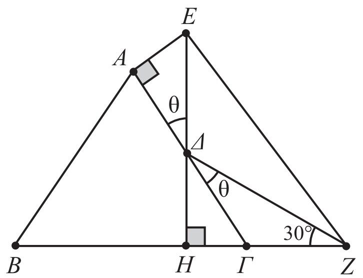
Ι12. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση $ημ^3 Β - ημ^2 ΑημΒ = ημ^2 ΑημΓ - ημ^3 Γ$, να αποδείξετε ότι $\hat{B} + \hat{Γ} = 120^o$.

Ι13. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση: $\frac{1}{α+β} - \frac{1}{α+β+γ} = \frac{2}{α+β+γ} - \frac{1}{β+γ}$, να αποδείξετε ότι $4συν^2 Β + 2συνΒ - 2 = 0$.

Ι14. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι το σημείο $Δ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΑΓ = β$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, $Δ\hat{Α}Ε = 90^o$, η $ΔΕ$ είναι κάθετη προς τη $ΒΓ$, $Α\hat{Δ}Ε = Γ\hat{Δ}Ζ = θ$ και $Γ\hat{Ζ}Δ = 30^o$.



α. Να βρείτε τη γωνία $\hat{θ}$.
β. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΕΖ$ συναρτήσει του $β$.

(*ΕΜΕ, 2010*)

Ι15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Α} = 30^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΓΔ$ με $Α\hat{Δ}Γ = 90^o$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $ΑΓ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο μέσο $Κ$, την $ΑΒ$ στο σημείο $Λ$ και την προέκταση της πλευράς $ΒΓ$ στο σημείο $Μ$. Αν $ΑΔ = α$, να υπολογίσετε συναρτήσει του $α$:
α. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΚΛ$.
β. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΑΜ$ και το μήκος της πλευράς $ΒΓ$.

(*ΕΜΕ, 2014*)

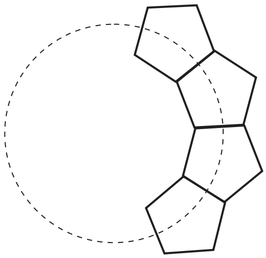
Κ. Μέτρηση Κύκλου

Κ1. Αν $α$ είναι οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού πενταγώνου, $β$ είναι οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού εξαγώνου, $γ$ είναι οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού οκταγώνου και $δ$ είναι οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού επταγώνου και ισχύει η σχέση $αβ + 2p = γδ$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός p είναι πρώτος.

Κ2. Ένα πάτωμα έχει στρωθεί με πλακάκια που έχουν το σχήμα κανονικού πολυγώνου. Αν το πλακάκι βγει από το πάτωμα και περιστραφεί κατά 50^o, τότε μπορεί να τοποθετηθεί ακριβώς ξανά στην αρχική του θέση στο πάτωμα. Να υπολογίσετε το ελάχιστο πλήθος πλευρών που μπορεί να έχει το πολύγωνο.

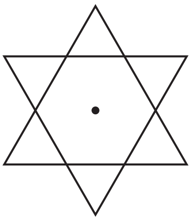
Κ3. Αν το άθροισμα όλων των γωνιών εκτός από μία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 1650^o, πόσο είναι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου;

Κ4. Ο Ευκλείδης κρατά μερικά κανονικά πεντάγωνα, τα οποία είναι όλα ίδια μεταξύ τους. Τα τοποθετεί το ένα δίπλα στο άλλο για να φτιάξει ένα κυκλικό σχήμα. Η παρακάτω εικόνα δείχνει μέρος της κατασκευής του. Πόσα πεντάγωνα θα χρειαστεί για την κατασκευή;



(*Διαγωνισμός Καγκουρό, 2013*)

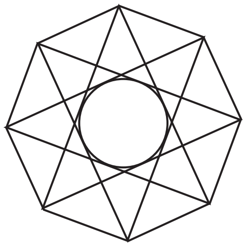
Κ5. Έχουμε δύο ίσα ισόπλευρα τρίγωνα με το ίδιο κέντρο, που σχηματίζουν ένα αστέρι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν η τομή τους είναι ένα κανονικό εξάγωνο με εμβαδόν 60 cm^2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ενός από τα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα.



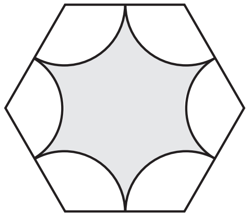
(Υπόδειξη: Κέντρο τριγώνου θεωρείται το κέντρο συμμετρίας του.)

Κ6. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο έχουν ίσες περιμέτρους. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι 5, να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.

Κ7. Έχουμε ένα κανονικό οκτάγωνο πλευράς 12 cm, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του κύκλου ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο μικρό εσωτερικό οκτάγωνο, και του τετραγώνου που είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο.



Κ8. Δίνεται ένα κανονικό εξάγωνο με πλευρά 6 cm. Με κέντρο τις κορυφές του εξαγώνου σχεδιάζουμε τόξα με ακτίνα 3, δημιουργώντας κυκλικούς τομείς, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

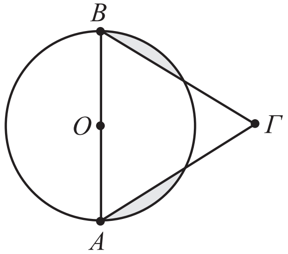


(*American Mathematics Contest, 2014*)

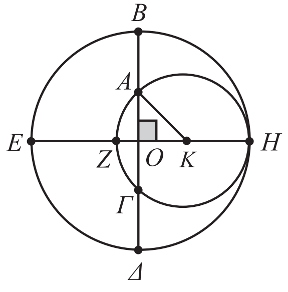
Κ9. Σε έναν κύκλο $(O,12)$ εγγράφουμε έξι ίσους μικρότερους κύκλους έτσι ώστε να εφάπτονται στην περιφέρεια του αρχικού κύκλου. Κάθε μικρός κύκλος εφάπτεται εξωτερικά με δύο άλλους. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας των έξι μικρών κύκλων.

K10. Ένας κύκλος με ακτίνα 4 cm είναι εγγεγραμμένος στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου. Το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ του κύκλου και του τριγώνου είναι $\sqrt{3}\alpha - \pi\beta$ cm^2. Να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha + \beta$.

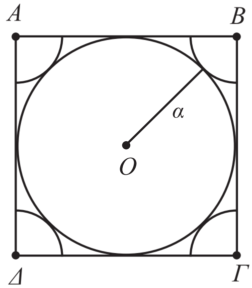
K11. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και διάμετρο 10 cm και ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



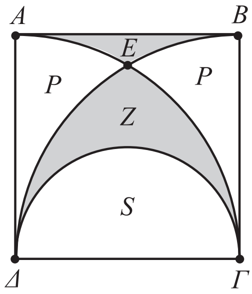
K12. Δύο κύκλοι (O, R) και (K, r) εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο H, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με $AB = 6$, $EZ = 8$ και $\Gamma\Delta = 6$. Αν $B\Delta$ είναι η διάμετρος του μεγάλου κύκλου, να υπολογίσετε το μήκος του καμπυλόγραμμου σχήματος $HBE\Delta H\Gamma ZAH$.



K13. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 4 και τα τεταρτοκύκλια στο εσωτερικό του με κέντρα τις κορυφές του και ίσες ακτίνες $\rho = 1$. Θεωρούμε τον κύκλο (O, α), όπου O είναι το κέντρο του τετραγώνου, ο οποίος εφάπτεται στα τεταρτοκύκλια. Να συγκρίνετε τα μήκη του μεικτόγραμμου σχήματος και του κύκλου.

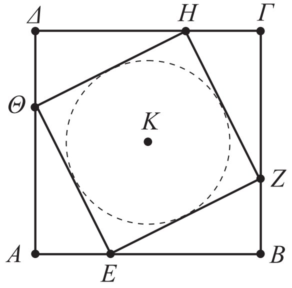


K14. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 2 cm. Τα τεταρτοκύκλια $A\Gamma$ και $B\Delta$ έχουν κέντρα τις κορυφές Δ και Γ αντίστοιχα και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$, το οποίο είναι επίσης διάμετρος του ημικυκλίου $\Gamma\Delta$. Να βρείτε ποια από τις επιφάνειες E και Z έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.



K15. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και μέσα σε αυτό εγγεγραμμένο άλλο τετράγωνο $EZH\Theta$ πλευράς 5 cm. Αν γνωρίζετε ότι
$AE = BZ = \Gamma H = \Delta\Theta = \Theta E - 2$, να υπολογίσετε τον λόγο του εμβαδού του τριγώνου

ΔΘΗ προς το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου (K,ρ).



K16. α. Ένας τετραγωνικός κήπος έχει πλευρά $40\sqrt{2}$ μέτρα. Στις τέσσερις κορυφές των γωνιών του τοποθετούνται περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που έχουν τη δυνατότητα να ποτίζουν κυκλικές περιοχές (κυκλικούς δίσκους) ακτίνας 25 μέτρων. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται, όταν λειτουργούν και οι τέσσερις μηχανισμοί ταυτόχρονα.

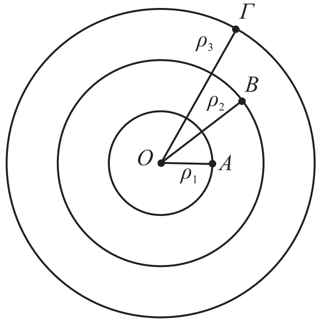
β. Ένας πέμπτος μηχανισμός, που τοποθετείται στο κέντρο του κήπου και ποτίζει μια κυκλική περιοχή του, λειτουργεί ταυτόχρονα με τους άλλους τέσσερις. Ποια είναι η ακτίνα της μεγαλύτερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι ώστε καμία περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς;

γ. Πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση του ερωτήματος β;

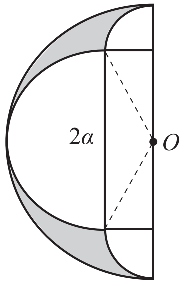
δ. Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι ώστε καμία περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

(*Πανελλήνιες Εξετάσεις, 1999*)

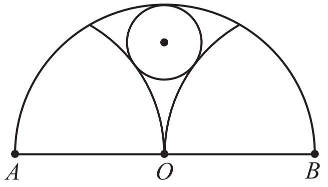
K17. Έχουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους $(O,\rho_1),(O,\rho_2),(O,\rho_3)$ με $\rho_3>\rho_2>\rho_1>0$. Αν ισχύει ότι $\rho_3+\rho_2-\rho_1=\rho_2+\rho_1$ και $2\rho_2=3\rho_1$, να βρείτε τον λόγο των εμβαδών του μεγαλύτερου δακτύλιου που σχηματίζεται προς τον μικρότερο δακτύλιο.



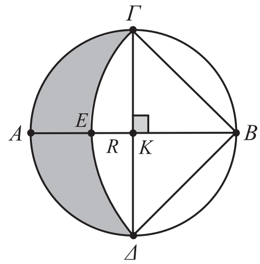
K18. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ημικύκλιο και μέσα σε αυτό ένα ορθογώνιο με μήκος $\frac{\alpha}{2}$ και πλάτος 2α, ένα ημικύκλιο και δύο τεταρτοκύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Να υπολογίσετε συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



K19. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ημικύκλιο διαμέτρου 2 cm. Με κέντρα τα άκρα του ημικυκλίου A, B και ακτίνες ίσες με 1 cm γράφουμε τόξα στο εσωτερικό του ημικυκλίου. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου στο εσωτερικό του ημικυκλίου που εφάπτεται στο ημικύκλιο και στα δύο τόξα.

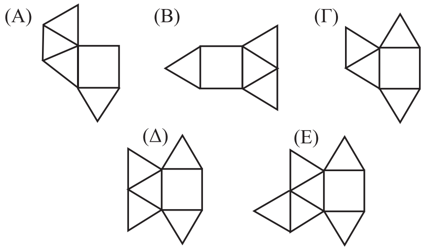


Κ20. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε έναν κύκλο ακτίνας 5 cm. Οι διάμετροι $AB, \Gamma\Delta$ είναι κάθετες. Με κέντρο το B γράφουμε τόξο $\Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.

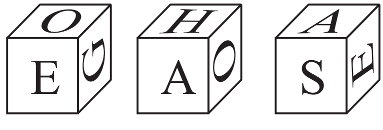


Λ. Γεωμετρικά Στερεά – Μέτρηση Στερεών

Λ1. Ποιο από τα παρακάτω αναπτύγματα αντιστοιχεί σε μια τετραγωνική πυραμίδα;

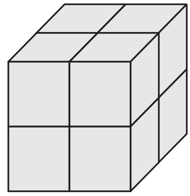


Λ2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τρεις όψεις του ίδιου κύβου. Ποιο γράμμα βρίσκεται στην απέναντι έδρα από αυτήν που βρίσκεται το γράμμα A;



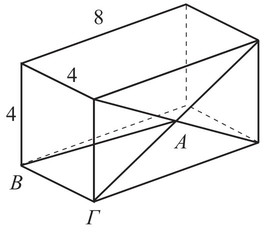
Λ3. Ένα πρίσμα έχει 2015 έδρες. Πόσες ακμές έχει το πρίσμα αυτό;

Λ4. Ο Γιάννης και ο Δημήτρης είχαν από έναν ολόιδιο κύβο. Ο Γιάννης έβαψε το εξωτερικό μέρος του δικού του κύβου. Ο Δημήτρης πρώτα έκοψε με τρεις κοψιές τον δικό του κύβο για να φτιάξει οκτώ μικρότερα κυβάκια, και μετά έβαψε το εξωτερικό μέρος των οκτώ μικρών κύβων. Πόσες φορές περισσότερη μπογιά χρειάστηκε ο Δημήτρης από τον Γιάννη;

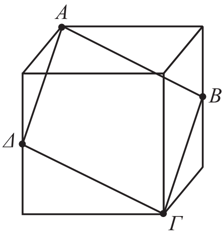


(*Διαγωνισμός Καγκουρό, 2009*)

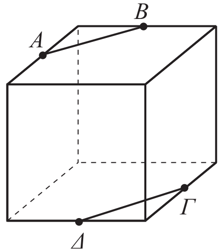
Λ5. Στο σχήμα φαίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 8, 4, 4. Το σημείο A είναι το σημείο τομής των διαγωνίων μιας από τις μη τετράγωνες έδρες. Το σημείο B είναι μία από τις κορυφές της έδρας που βρίσκεται απέναντι από αυτήν που ανήκει το σημείο A. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.



Λ6. Ένα ζευγάρι από απέναντι κορυφές και ένα ζευγάρι μέσων των ακμών ενός κύβου ενώνονται, όπως φαίνεται στο σχήμα, και σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο. Αν ο κύβος έχει ακμή $α$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

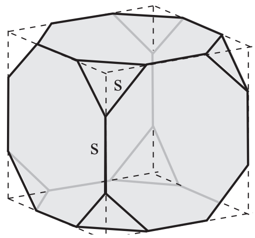


Λ7. Στον παρακάτω κύβο τα σημεία A, B, $Γ$, $Δ$ είναι μέσα των αντίστοιχων ακμών του κύβου. Ένα επίπεδο διέρχεται από τα ευθύγραμμα τμήματα AB, $ΓΔ$ και χωρίζει τον κύβο σε ένα τμήμα του οποίου η επιφάνεια είναι $\sqrt{6}$ cm^2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας ολόκληρου του κύβου.



Λ8. Να υπολογίσετε τον όγκο μιας πυραμίδας που η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά 2 cm.

Λ9. Στον παρακάτω κύβο ακμής 2 cm έχουμε κόψει τις γωνίες του κατά ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Στο σχήμα που δημιουργείται οι μεγάλες έδρες του είναι κανονικά οκτάγωνα.

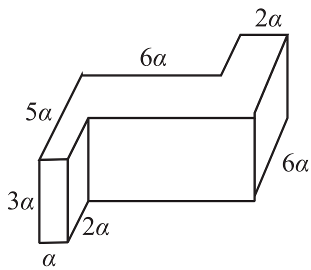


α. Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών του κανονικού οκταγώνου.

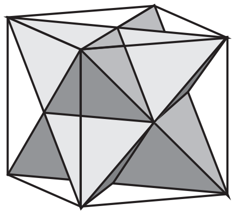
β. Να υπολογίσετε τον όγκο του σχήματος συναρτήσει του ύψους $υ$ κάθε τριγωνικής πυραμίδας.

Λ10. Ένα ημικύκλιο διαμέτρου 12 cm χρησιμοποιείται για τη δημιουργία ενός κώνου έτσι ώστε τα άκρα του ημικυκλίου να ενωθούν κατά τη δίπλωση. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

Λ11. Να υπολογίσετε τον όγκο του παρακάτω στερεού.

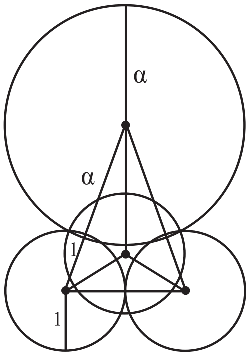


Λ12. Δύο ξεχωριστά κανονικά τετράεδρα έχουν τις κορυφές τους πάνω στις κορυφές ενός κύβου με ακμή 1. Να υπολογίσετε τον όγκο του σχήματος που δημιουργείται από την τομή των τετράεδρων.



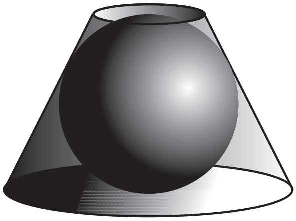
(*American Mathematics Contest, 2011*)

Λ13. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τέσσερις σφαίρες. Οι τρεις σφαίρες της βάσης εφάπτονται ανά δύο και έχουν ακτίνα 1 cm. Αν το ύψος της πυραμίδας που δημιουργείται εσωτερικά είναι $\frac{\sqrt{69}}{3}$ cm, να υπολογίσετε τον όγκο της μεγάλης σφαίρας.



Λ14. Ένας κύλινδρος με διάμετρο βάσης ίση με το ύψος του είναι εγγεγραμμένος μέσα σε έναν κώνο. Ο κώνος έχει διάμετρο βάσης 10 cm και ύψος 12 cm. Ο άξονας των δύο στερεών συμπίπτει. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

Λ15. Μια σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε έναν κόλουρο κώνο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο όγκος του κόλουρου κώνου είναι διπλάσιος από τον όγκο της σφαίρας. Ποιος είναι ο λόγος της ακτίνας της κάτω βάσης του κόλουρου κώνου προς την ακτίνα της πάνω βάσης του κόλουρου κώνου; (Δίνεται ότι $O_{\text{κόλουρου κώνου}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \upsilon \cdot \left(R^2 + r^2 + Rr\right)$.)



(*American Mathematics Contest, 2014*)