

Αναστάσιος Μπάρλας
Χάρις Γεωργούντζου

Ιωάννα Μπουγά
Δημήτριος Γεωργούντζος



Μαθηματικά

Ε΄ Δημοτικού



Μπάρλας
ΕΚΔΟΣΕΙΣ



2. Οι πράξεις στους φυσικούς αριθμούς

Σε αυτή την ενότητα:

- Εξασφαλίζουμε την ευχέρειά μας στις πράξεις με φυσικούς αριθμούς.
- Ανακαλύπτουμε τα πολλαπλάσια, τους διαιρέτες και τα κριτήρια διαιρετότητας.

- | | |
|-----|---|
| 8 | Η πρόσθεση και η αφαίρεση στους φυσικούς αριθμούς |
| 9 | Ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς |
| 10Α | Πολλαπλάσια και διαιρέτες |
| 10Β | Πολλαπλάσια και διαιρέτες |
| 11 | Κριτήρια διαιρετότητας |
| 12Α | Η διαίρεση στους φυσικούς αριθμούς |
| 12Β | Η διαίρεση στους φυσικούς αριθμούς |

10Α Πολλαπλάσια και διαιρέτες

Μία σοκολάτα με 24 κομμάτια είναι εύκολο να μοιραστεί δίκαια σε 2, 3, 4, 6, 8, 12 παιδιά, αφού:

$$24 = 2 \cdot 12, \quad 24 = 3 \cdot 8, \quad 24 = 4 \cdot 6$$

Το 24 λέμε ότι είναι **πολλαπλάσιο** των αριθμών: 2, 3, 4, 6, 8, 12 και οι αριθμοί αυτοί είναι **διαιρέτες** του 24.



Μαθαίνω

Πολλαπλάσια

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού είναι όλοι οι αριθμοί που σχηματίζονται από τον πολλαπλασιασμό του αριθμού με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Ένας αριθμός είναι **πολλαπλάσιο** ενός αριθμού, όταν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο του αριθμού αυτού επί έναν άλλον.

π.χ. Το 12 είναι πολλαπλάσιο του 3, γιατί $12 = 3 \cdot 4$.

- Όλοι οι άρτιοι αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 2.

$$0 \cdot 3 = 0$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

Τα πολλαπλάσια του 3 είναι οι αριθμοί:
0, 3, 6, 9, 12, ...

Διαιρέτες

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού είναι όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.

Ένας αριθμός είναι **διαιρέτης** ενός αριθμού, όταν η διαίρεση με αυτόν είναι τέλεια.

π.χ. Το 3 είναι διαιρέτης του 12, γιατί $12 : 3 = 4$.

Οι διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού είναι μικρότεροι ή ίσοι του αριθμού.

Μερικοί αριθμοί έχουν πολλούς διαφορετικούς διαιρέτες, άλλοι πολύ λίγους. Κάθε αριθμός είναι πολλαπλάσιο των διαιρετών του.

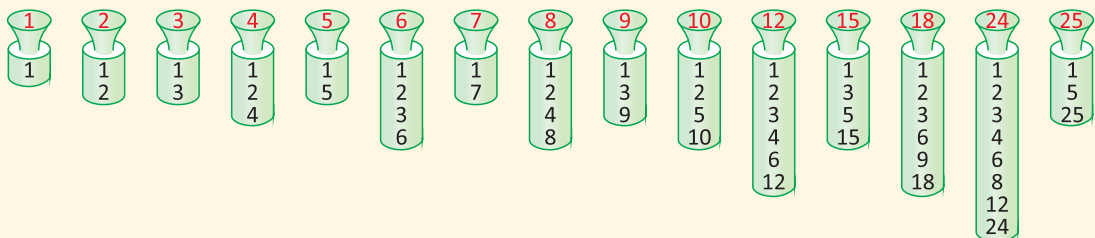
$$6 : 6 = 1$$

$$6 : 3 = 2$$

$$6 : 2 = 3$$

$$6 : 1 = 6$$

Οι διαιρέτες του 6 είναι: 1, 2, 3, 6



Εφαρμογές

1. Να γράψετε τα πολλαπλάσια του 8.

Λύση

Τα πολλαπλάσια του 8 είναι οι αριθμοί: $0 \cdot 8, 1 \cdot 8, 2 \cdot 8, 3 \cdot 8, 4 \cdot 8, 5 \cdot 8, \dots$

Δηλαδή οι αριθμοί: 0, 8, 16, 24, 32, 40, ...

2. α. Είναι το 6 διαιρέτης του 18;
β. Είναι το 7 διαιρέτης του 18;

Λύση

α. Το 6 είναι διαιρέτης του 18, γιατί $18 : 6 = 3$.
(Το 18 είναι πολλαπλάσιο του 6).

β. Το 7 δεν είναι διαιρέτης του 18, γιατί η διαίρεση $18 : 7$ έχει υπόλοιπο 4.

18		
6	6	6

18		
7	7	4

3. Να γράψετε τους διαιρέτες του 24.

Λύση

Γράφουμε τα γινόμενα που κάνουν 24: $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$

Οι παράγοντες των γινομένων είναι οι διαιρέτες του 24, δηλαδή οι αριθμοί:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Ασκήσεις

1. Να γράψεις τα πέντε πρώτα πολλαπλάσια των αριθμών:

α. 3

β. 4

γ. 5

δ. 7

ε. 8

στ. 9

ζ. 12

η. 15

θ. 16

ι. 25

2. Να συμπληρώσεις με ✓ το σωστό.

Ο αριθμός	είναι πολλαπλάσιο του:									
	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15
6										
12										
15										
18										
20										
24										
30										

3. Να συμπληρώσεις τα ζευγάρια των αριθμών που έχουν γινόμενο γνωστό αριθμό και τους διαιρέτες του γινομένου, όπως στο παράδειγμα.

Γινόμενο	Ζευγάρια	Διαιρέτες γινομένου
6	1 · 6, 2 · 3	1, 2, 3, 6
7		
8		
9		
10		
12		
24		

4. Να υπολογίσεις:

α. το διπλάσιο των αριθμών: 250, 345

β. το τριπλάσιο των αριθμών: 80, 1.500

5 Να βάλεις ✓ στο σωστό.

α.

Ο αριθμός	διαίρει τον αριθμό								
	6	10	12	15	18	20	24	30	36
2									
3									
4									
5									
6									
8									
9									

β.

Ο αριθμός	έχει διαιρέτη τον αριθμό									
	2	3	4	5	6	8	9	10	12	
9										
10										
12										
15										
18										
20										
24										

6 α. Να γράψεις τα οκτώ πρώτα πολλαπλάσια του 5.

β. Να βρεις τα πολλαπλάσια του 5 που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 17 και 34.

7 Να βρεις τους διαιρέτες των αριθμών:

α. 5 **β.** 6 **γ.** 12 **δ.** 24 **ε.** 28
στ. 30 **ζ.** 36 **η.** 40 **θ.** 1 **ι.** 100

8 * Ένα ζαχαροπλαστείο στη Βέροια μία ημέρα πούλησε 24 κομμάτια ραβανί σε όμοιες συσκευασίες, που είχαν περισσότερα από 2 κομμάτια και λιγότερα από δέκα. Ποιες είναι οι δυνατές περιπτώσεις;



9 * Η Μυρτώ έχει 48 τουλίπες. Πόσες όμοιες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει, ώστε κάθε μία να έχει τουλάχιστον 3 τουλίπες και το πολύ 8;



Β' ΟΜΑΔΑ

10 Να βρεις:

α. τέσσερις αριθμούς με 3 διαιρέτες **β.** δύο αριθμούς με 5 διαιρέτες.

11 Να συμπληρώσεις τον πίνακα βρίσκοντας δύο φυσικούς αριθμούς, όταν είναι γνωστό το γινόμενο τους και το άθροισμά τους.

Γινόμενο	6	2	8	10	12	15	18	20	30	45	56
Άθροισμα	5	3	6	7	7	8	9	9	11	14	15
Αριθμοί											

12 Τα νούφαρα σε μια λίμνη πολλαπλασιάζονται πολύ γρήγορα. Κάθε χρόνο η περιοχή που καλύπτεται από νούφαρα διπλασιάζεται. Η μισή λίμνη καλύπτεται μετά από 5 χρόνια. Σε πόσα χρόνια θα καλυφθεί ολόκληρη η λίμνη με νούφαρα;



Μαθαίνω

Ομώνυμα κλάσματα – Ετερόνυμα κλάσματα

Τα κλάσματα που έχουν ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα**,
ενώ

τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται **ετερόνυμα**.

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{3} : \text{Ομώνυμα}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5} : \text{Ετερόνυμα}$$

Μετατροπή ετερόνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα

Μετατρέπουμε ετερόνυμα κλάσματα σε ομώνυμα ως εξής:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

$$\text{Ε.Κ.Π.}(2, 3) = 6$$

$$6 : 2 = 3, \quad 6 : 3 = 2$$

- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Διαιρούμε το Ε.Κ.Π. με καθέναν από τους παρονομαστές.
- Πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος επί τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκαμε και τα κλάσματα μετατρέπονται σε ισοδύναμα ομώνυμα.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}, \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$$

Το κλάσμα ως λόγος

Το κλάσμα ως **λόγος** εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων.

Η Ε' τάξη έχει 11 αγόρια και 13 κορίτσια.

Ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια είναι $\frac{11}{13}$.

Εφαρμογές

1. Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα.

α. $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{5}$

β. $\frac{3}{14}$ και $\frac{5}{7}$

γ. $\frac{1}{6}$ και $\frac{3}{8}$

Λύση

α. Ε.Κ.Π.(3, 5) = 15

$$15 : 3 = 5, \quad 15 : 5 = 3$$

$$\bullet \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

$$\bullet \quad \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{15}$$

β. Ε.Κ.Π.(14, 7) = 14

$$14 : 7 = 2$$

$$\frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 7} = \frac{6}{14}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{10}{14}$$

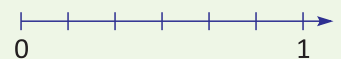
γ. Ε.Κ.Π.(6, 8) = 24

$$24 : 6 = 4, \quad 24 : 8 = 3$$

$$\bullet \quad \frac{1}{6} = \frac{4}{24}$$

$$\bullet \quad \frac{3}{8} = \frac{9}{24}$$

2. Να τοποθετήσετε στην αριθμογραμμή τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ και να τα συγκρίνετε.

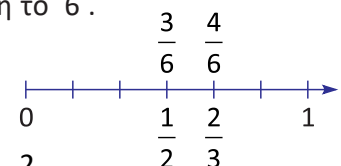


Λύση

Παρατηρούμε ότι η μονάδα είναι χωρισμένη σε 6 ίσα διαστήματα.

Μετατρέπουμε τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 6.

$$\text{Είναι } \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}.$$



Επειδή στην αριθμογραμμή το $\frac{1}{2}$ είναι αριστερά του $\frac{2}{3}$, έχουμε $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.

Ασκήσεις

1 Να μετατρέψεις σε ομώνυμα τα κλάσματα.

α. $\frac{1}{5}, \frac{3}{2}$

β. $\frac{5}{3}, \frac{1}{2}$

γ. $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$

δ. $\frac{5}{4}, \frac{2}{3}$

ε. $\frac{2}{5}, \frac{1}{4}$

στ. $\frac{5}{9}, \frac{1}{2}$

2 Να μετατρέψεις σε ομώνυμα τα κλάσματα.

α. $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}$

β. $\frac{7}{6}, \frac{2}{3}$

γ. $\frac{5}{2}, \frac{1}{8}$

δ. $\frac{11}{12}, \frac{2}{3}$

ε. $\frac{7}{15}, \frac{1}{5}$

στ. $\frac{1}{7}, \frac{1}{21}$

3 Να μετατρέψεις σε ομώνυμα τα κλάσματα.

α. $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$

β. $\frac{5}{6}, \frac{3}{8}$

γ. $\frac{3}{15}, \frac{1}{10}$

δ. $\frac{5}{12}, \frac{1}{8}$

ε. $\frac{3}{14}, \frac{1}{21}$

στ. $\frac{3}{10}, \frac{1}{4}$

4 Να μετατρέψεις σε ομώνυμα τα κλάσματα.

α. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$

β. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$

γ. $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

δ. $\frac{7}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{10}$

ε. $\frac{13}{21}, \frac{5}{7}, \frac{1}{3}$

στ. $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}$

Β' ΟΜΑΔΑ

5 Να τοποθετήσεις τα κλάσματα στις παρακάτω αριθμογραμμές και να τα συγκρίνεις.

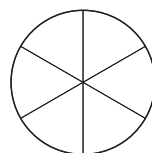


6 Να χρωματίσεις:

- Το $\frac{1}{2}$ του κύκλου κόκκινο.

- Το $\frac{1}{3}$ του κύκλου κίτρινο.

Τι μέρος του κύκλου έμεινε αχρωμάτιστο;



7 Να χρωματίσεις στο διπλανό ορθογώνιο:

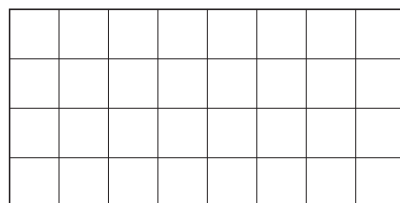
- Το $\frac{1}{2}$ κόκκινο.

- Το $\frac{1}{8}$ κίτρινο.

- Το $\frac{1}{4}$ πράσινο.

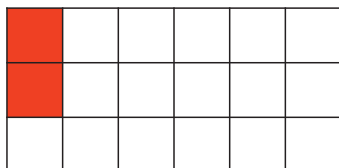
- Το $\frac{1}{16}$ μπλε.

Τι μέρος του ορθογωνίου έμεινε αχρωμάτιστο;



8 Να συμπληρώσεις με τα σωστά χρώματα το ορθογώνιο, χρησιμοποιώντας τον πίνακα.

*



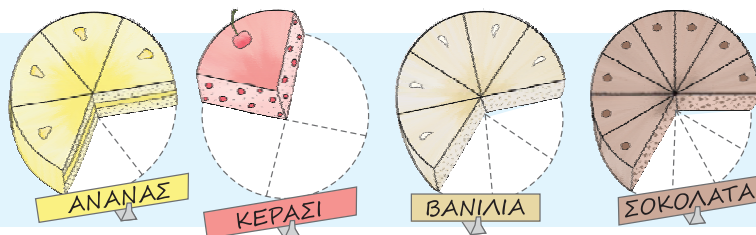
$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$

Να γράψεις τον λόγο του χρωματισμένου με κόκκινο μέρους προς το μοβ.

9 Η Α' τάξη έχει 12 αγόρια και 15 κορίτσια, ενώ η ΣΤ' τάξη 16 αγόρια και 20 κορίτσια. Να εξετάσεις, αν οι λόγοι των αγοριών προς τα κορίτσια σε κάθε τάξη είναι ίσοι.

17 Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων

Η Λία ήθελε να πάρει αρκετό κέικ για τους καλεσμένους των γενεθλίων της. Ποιο κέικ έχει τα μεγαλύτερα κομμάτια και ποιο τα μικρότερα;



Μαθαίνω

Σύγκριση κλασμάτων

Ίδιος παρονομαστής

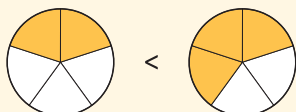
Συγκρίνω $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{5}$.

Χωρίζω σε 5 ίσα μέρη.

Επειδή $2 < 3$, είναι:

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$$

Στα κλάσματα που έχουν **ίσους παρονομαστές**, μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.



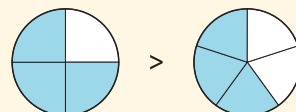
Ίδιος αριθμητής

Συγκρίνω $\frac{3}{4}$ και $\frac{3}{5}$.

Τα τέταρτα είναι μεγαλύτερα από τα πέμπτα.

$$\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$$

Στα κλάσματα που έχουν **ίσους αριθμητές**, μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει μικρότερο παρονομαστή.



Εφαρμογές

1. Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$.

Λύση

Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα. Είναι Ε.Κ.Π.(8, 6) = 24 και $24:8 = 3$, $24:6 = 4$.

Επομένως $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$ και $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$. Άρα $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$.

2. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα: $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{9}$, 1

Λύση

- Συγκρίνουμε αρχικά τα κλάσματα με τη μονάδα. Είναι $\frac{7}{9} < 1$, $\frac{5}{9} < 1$ και $\frac{5}{3} > 1$, $\frac{5}{4} > 1$.
- Συγκρίνουμε μεταξύ τους τα κλάσματα που είναι μικρότερα της μονάδας και στη συνέχεια, μεταξύ τους τα κλάσματα που είναι μεγαλύτερα της μονάδας.

Έχουμε: $\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$ και $\frac{5}{4} < \frac{5}{3}$. Άρα $\frac{5}{9} < \frac{7}{9} < 1 < \frac{5}{4} < \frac{5}{3}$.

3. Να βρείτε ένα κλάσμα ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$.

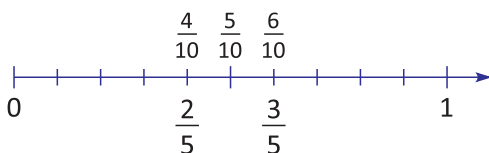
Λύση

Επειδή μεταξύ του 2 και του 3 δεν υπάρχει φυσικός αριθμός, βρίσκουμε ισοδύναμα κλάσματα με διπλάσιους αριθμητές.

Είναι $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10}$, $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$ και $4 < 5 < 6$.

Οπότε $\frac{4}{10} < \frac{5}{10} < \frac{6}{10}$ ή $\frac{2}{5} < \frac{5}{10} < \frac{3}{5}$.

Ανάμεσα στα 2-πλάσια δύο διαδοχικών φυσικών βρίσκεται 1 φυσικός αριθμός. Ανάμεσα στα 3-πλάσια, βρίσκονται 2 φυσικοί αριθμοί, ανάμεσα στα 4-πλάσια, βρίσκονται 3 κ.ο.κ



Ασκήσεις

1 Να συμπληρώσεις τα παρακάτω κενά με το κατάλληλο σύμβολο ($>$ ή $<$ ή $=$).

α. $\frac{7}{5} \dots \frac{6}{5}$

β. $\frac{2}{3} \dots \frac{5}{3}$

γ. $\frac{3}{5} \dots \frac{3}{2}$

δ. $\frac{5}{7} \dots \frac{5}{4}$

ε. $\frac{2}{3} \dots 1$

στ. $\frac{3}{2} \dots 1$

2 Να γράψεις σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς.

α. $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, 1$

β. $\frac{4}{5}, 1, \frac{3}{5}$

γ. $\frac{7}{5}, 1, \frac{7}{4}$

δ. $1, \frac{7}{8}, \frac{13}{14}$

3 Να συγκρίνεις τα κλάσματα.

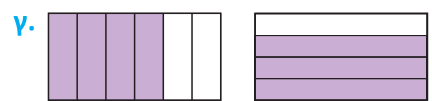
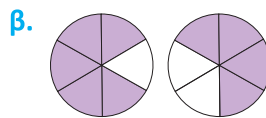
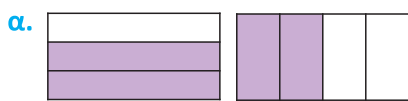
α. $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$

β. $\frac{2}{3}$ και $\frac{5}{6}$

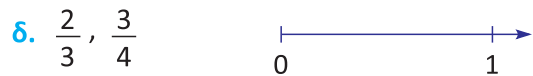
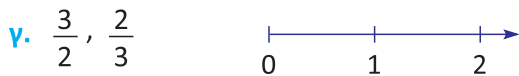
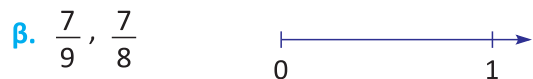
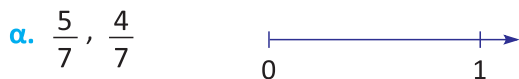
γ. $\frac{3}{4}$ και $\frac{7}{12}$

δ. $\frac{6}{5}$ και $\frac{11}{10}$

4 Να συγκρίνεις τα χρωματισμένα μέρη των σχημάτων με τη βοήθεια της σύγκρισης κλασμάτων.



5 Να τοποθετήσεις πρόχειρα στην αριθμογραμμή τα κλάσματα.



Β' ΟΜΑΔΑ

6 Να γράψεις σε μία σειρά τους κλασματικούς αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

α. $\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}$

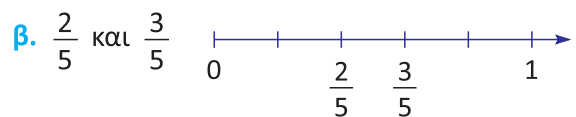
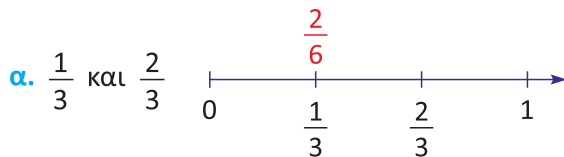
β. $\frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}$

γ. $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

δ. $\frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{5}$

ε. $\frac{4}{7}, \frac{5}{3}, \frac{4}{5}$

7 Να βρεις ένα κλάσμα που βρίσκεται ανάμεσα στα κλάσματα:



8 Να τοποθετήσεις κάθε κλάσμα σε μία από τις τρεις ομάδες:

* $\frac{1}{35}, \frac{51}{100}, \frac{99}{100}, \frac{3}{79}, \frac{29}{28}, \frac{19}{40}, \frac{7}{123}, \frac{26}{50}, \frac{37}{39}$

κοντά στο 0	κοντά στο $\frac{1}{2}$	κοντά στο 1

Αριθμητής	Κλάσμα
μικρότερος και πολύ μακριά από τον παρονομαστή	κοντά στο 0
κοντά στον παρονομαστή	κοντά στο 1
κοντά στο μισό του παρονομαστή	κοντά στο $\frac{1}{2}$

9 Να τοποθετήσεις πρόχειρα στην αριθμογραμμή τα κλάσματα.



18Α Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Η Λία πηγαίνει στον φούρνο.

– Ποιο κλάσμα της τούρτας υπάρχει ακόμα;

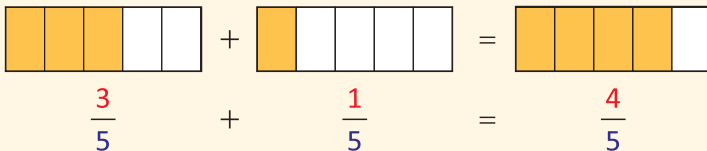
– Η Λία αγοράζει τρία κομμάτια από την τούρτα.

Τι κλάσμα από ολόκληρη την τούρτα θα απομείνει;



Μαθαίνω

Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων

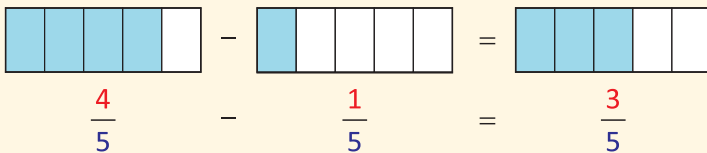


Όλα τα πέμπτα έχουν το ίδιο μέγεθος.

Υπολογίζω: $3 + 1 = 4$

Για να **προσθέσουμε ομώνυμα κλάσματα**, προσθέτουμε τους αριθμητές, ενώ παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο.

Αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων



Υπολογίζω: $4 - 1 = 3$

Για να **αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα**, αφαιρούμε τους αριθμητές, ενώ παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο.

Εφαρμογές

1. Να κάνετε τις πράξεις.

α. $\frac{3}{10} + \frac{1}{10}$

β. $\frac{4}{5} + \frac{6}{5}$

γ. $\frac{7}{4} - \frac{5}{4}$

δ. $\frac{5}{7} + \frac{3}{7} - \frac{8}{7}$

ε. $2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3}$

Λύση

α. $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5}$

β. $\frac{4}{5} + \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 10:5 = 2$

γ. $\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$

δ. $\frac{5}{7} + \frac{3}{7} - \frac{8}{7} = \frac{5+3-8}{7} = \frac{8-8}{7} = \frac{0}{7} = 0$

ε. $2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} = \frac{7}{3} + \frac{5}{3} = \frac{12}{3} = 4$ ή $2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} = 2 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3 + \frac{3}{3} = 3 + 1 = 4$

2. Η Λένα έφαγε τα $\frac{7}{20}$ μίας σοκολάτας και ο Μιχάλης τα $\frac{9}{20}$ της ίδιας σοκολάτας.

α. Πόσο μέρος της σοκολάτας έφαγαν και τα δύο παιδιά μαζί;

β. Πόσο περισσότερο έφαγε ο Μιχάλης από τη Λένα;

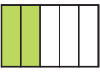
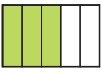
Λύση

α. Η Λένα και ο Μιχάλης έφαγαν από τη σοκολάτα συνολικά τα: $\frac{7}{20} + \frac{9}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ της σοκολάτας.

β. Ο Μιχάλης έφαγε περισσότερο από τη Λένα: $\frac{9}{20} - \frac{7}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ της σοκολάτας.

Ασκήσεις

1 Να συμπληρώσεις τα κλάσματα.

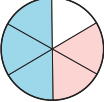
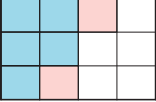
α.  +  β.  + 

..... + +

2 Να υπολογίσεις το αποτέλεσμα.

α. 2 τρίτα + 5 τρίτα β. 3 πέμπτα - 2 πέμπτα

3 Να υπολογίσεις τα αθροίσματα.

α.  β. 

$\frac{3}{6} + \frac{.....}{6} = \frac{.....}{.....}$ $\frac{.....}{.....} + \frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$

4 Να υπολογίσεις τα αθροίσματα.

α. $\frac{4}{7} + \frac{5}{7}$ β. $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}$ γ. $\frac{3}{10} + \frac{8}{10}$

5 Να υπολογίσεις τις διαφορές.

α. $\frac{7}{3} - \frac{5}{3}$ β. $\frac{8}{5} - \frac{6}{5}$ γ. $\frac{9}{10} - \frac{6}{10}$

6 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{4}{3}$ β. $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$

γ. $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{7}{10}$ δ. $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

ε. $\frac{8}{3} + \frac{5}{3} - \frac{2}{3}$ στ. $\frac{7}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

7 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $\frac{3}{6} + \frac{5}{6}$ β. $\frac{5}{4} + \frac{1}{4}$ γ. $\frac{13}{12} - \frac{5}{12}$

δ. $\frac{7}{9} + \frac{4}{9} - \frac{5}{9}$ ε. $\frac{7}{10} - \frac{1}{10} + \frac{9}{10}$

8 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ β. $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$ γ. $\frac{7}{4} - \frac{3}{4}$

δ. $\frac{17}{10} - \frac{7}{10}$ ε. $\frac{7}{2} - \frac{3}{2}$ στ. $\frac{9}{4} - \frac{7}{4}$

9 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ β. $\frac{2}{2} + \frac{5}{2} - \frac{7}{2}$

10 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3}$ β. $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4}$

γ. $\frac{3}{5} + 2\frac{1}{5}$ δ. $3\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5}$

Μετατρέπουμε πρώτα τους μεικτούς σε κλάσματα.

11 Η Ελευθερία αγόρασε από το κυλικείο με τα $\frac{2}{5}$

των χρημάτων της μία σοκολάτα και με το $\frac{1}{5}$

ένα μπουκαλάκι νερό. Ποιο μέρος των χρημάτων της ξόδεψε συνολικά για τη σοκολάτα και το νερό;

12 Η Μαρία ήπια τα $\frac{3}{7}$ του χυμού από ένα ποτήρι και η Έφη τα $\frac{2}{7}$.



α. Ποιο μέρος του χυμού ήπιαν και τα δύο κορίτσια μαζί;

β. Ποιο κορίτσι ήπια περισσότερο χυμό και πόσο περισσότερο;

Β' ΟΜΑΔΑ

13 Να κάνεις τις πράξεις:

α. $\frac{1}{2} + \frac{15}{6}$ β. $\frac{6}{9} + \frac{20}{12}$

γ. $\frac{12}{15} - \frac{14}{35}$ δ. $\frac{3}{4} - \frac{6}{24}$

Μερικές φορές πρώτα κάνουμε απλοποιήσεις και μετά τις πράξεις.

14 Να βρεις το άθροισμα:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{10} + \frac{3}{15} + \frac{4}{20} + \frac{5}{25}$$

15 Να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν.

α. $\frac{2}{3} + \frac{.....}{3} = 1$ β. $\frac{3}{5} + \frac{.....}{5} = 1$

γ. $\frac{7}{3} - \frac{.....}{3} = 1$ δ. $\frac{3}{2} - \frac{.....}{2} = 1$

18B Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Στο πάρτι γενεθλίων της Λίας περίσσεψαν το $\frac{1}{4}$ από το κέικ κεράσι και 7 πάστες. Η Λία τα βάζει όλα μαζί σε ένα ταψί.

- Ποιο κλάσμα του ταψιού είναι καλυμμένο;
- Ποιο κλάσμα του ταψιού είναι κενό;
- Από ποιο από τα δύο γλυκά έχει απομείνει περισσότερο και πόσο περισσότερο;



Μαθαίνω

Πρόσθεση

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Αφαίρεση

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ετερόνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και προσθέτουμε ή αφαιρούμε αυτά.

Εφαρμογή

Να κάνετε τις πράξεις.

α. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

β. $\frac{11}{6} - \frac{1}{3}$

γ. $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

δ. $2 + \frac{3}{5}$

Λύση

α. Είναι Ε.Κ.Π (3, 2) = 6 και $6:3=2$, $6:2=3$.

$$\text{Οπότε } \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$

β. Είναι Ε.Κ.Π (6, 3) = 6 και $6:3=2$. Οπότε

$$\frac{11}{6} - \frac{1}{3} = \frac{11}{6} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{11}{6} - \frac{2}{6} = \frac{9}{6} = \frac{9:3}{6:3} = \frac{3}{2}$$

Δεν ξεχνώ την απλοποίηση.

γ. Είναι Ε.Κ.Π (4, 6) = 12 και $12:4=3$, $12:6=2$.

$$\text{Άρα } \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$$

δ. Είναι

$$2 + \frac{3}{5} = \frac{2}{1} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5} \quad \text{ή} \quad 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

Ασκήσεις

1 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $\frac{1}{5} + \frac{3}{2}$

β. $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}$

γ. $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$

δ. $\frac{3}{2} - \frac{1}{7}$

ε. $\frac{5}{4} + \frac{2}{3}$

στ. $\frac{2}{5} - \frac{1}{4}$

ζ. $\frac{5}{9} - \frac{1}{2}$

η. $\frac{2}{3} - \frac{1}{7}$

θ. $\frac{2}{3} - \frac{1}{8}$

2 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $\frac{5}{4} + \frac{1}{2}$

β. $\frac{7}{6} - \frac{2}{3}$

γ. $\frac{5}{2} - \frac{1}{8}$

δ. $\frac{2}{3} - \frac{1}{9}$

ε. $\frac{11}{12} - \frac{2}{3}$

στ. $\frac{7}{15} + \frac{1}{5}$

ζ. $\frac{1}{7} - \frac{1}{21}$

η. $\frac{8}{45} - \frac{1}{9}$

θ. $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$

3 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

β. $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$

γ. $\frac{5}{9} - \frac{1}{6}$

δ. $\frac{4}{15} - \frac{1}{10}$

ε. $\frac{5}{12} - \frac{1}{8}$

στ. $\frac{3}{14} - \frac{1}{21}$

ζ. $\frac{3}{10} - \frac{1}{4}$

η. $\frac{5}{8} - \frac{1}{10}$

θ. $\frac{7}{12} - \frac{5}{18}$

4 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $2 + \frac{4}{5}$

β. $3 + \frac{2}{5}$

γ. $1 + \frac{2}{3}$

δ. $5 - \frac{3}{2}$

ε. $2 - \frac{4}{3}$

στ. $\frac{3}{2} + 1$

ζ. $\frac{4}{3} - 1$

η. $\frac{13}{5} - 2$

θ. $\frac{9}{2} - 3$

5 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

β. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

γ. $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

δ. $\frac{7}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$

ε. $\frac{13}{21} + \frac{5}{7} - \frac{1}{3}$

στ. $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8}$

ζ. $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$

η. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$

6 Να κάνεις τις πράξεις.

α. $\frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{2}$

β. $1 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}$

γ. $\frac{5}{2} - 2 - \frac{1}{4}$

δ. $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} + 1$

ε. $\frac{7}{6} - \frac{1}{8} - 1$

στ. $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{8}$

7 Η Κατερίνα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων της στο κυλικείο και τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων της στο βιβλιοπωλείο.

α. Τι μέρος των χρημάτων της ξόδεψε συνολικά;

β. Τι μέρος των χρημάτων της έμειναν;

8 Η Άννα, για να λύσει ένα πρόβλημα, χρειάστηκε τα $\frac{2}{9}$ της ώρας και ο Δημήτρης τα $\frac{3}{10}$ της ώρας. Ποιο παιδί χρειάστηκε περισσότερο χρόνο και πόσο περισσότερο;

9 Τα $\frac{2}{5}$ των μαθητών της Ε' τάξης είναι αγόρια. Τι μέρος των μαθητών είναι τα κορίτσια;

Β' ΟΜΑΔΑ

10 Από μία σοκολάτα η Σοφία έφαγε

τα $\frac{2}{5}$ και ο Παναγιώτης το $\frac{1}{2}$.



α. Ποιο παιδί έφαγε περισσότερο;

β. Τι μέρος της σοκολάτας έφαγαν συνολικά και τα δύο παιδιά;

γ. Τι μέρος της σοκολάτας περίσσεψε;

δ. Τι μέρος της σοκολάτας έφαγε περισσότερο το ένα παιδί;

11 Από ένα ποτήρι με χυμό ροδιού και δύο καλαμάκια η Ζωή ήπие το $\frac{1}{3}$ και η Λένα τα $\frac{2}{5}$.



α. Ποιο κορίτσι ήπие τον περισσότερο χυμό;

β. Τι μέρος του χυμού ήπian και τα δύο κορίτσια;

γ. Τι μέρος του χυμού έμεινε στο ποτήρι;

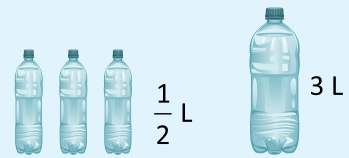
δ. Πόσο περισσότερο ήπие το ένα κορίτσι;

19A

Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού ή κλάσματος με κλάσμα Αντίστροφοι αριθμοί

Η Λία σκέφτεται, αν είναι η ίδια ποσότητα νερού:

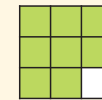
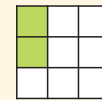
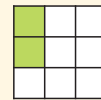
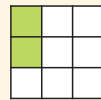
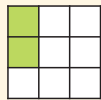
- 3 μπουκαλάκια του $\frac{1}{2}$ του λίτρου
- το $\frac{1}{2}$ ενός μπουκαλιού 3 λίτρων.



Μαθαίνω

Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού με κλάσμα και κλάσματος με φυσικό αριθμό

• $4 \cdot \frac{2}{9}$



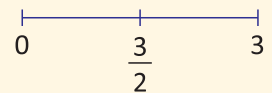
$$4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

Σύντομα:

$$4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4 \cdot 2}{9} = \frac{8}{9}$$

- Το γινόμενο $\frac{1}{2} \cdot 3$, είναι το $\frac{1}{2}$ του 3.

Για να το βρω, χωρίζω την αριθμογραμμή μέχρι το 3
σε 2 ίσα διαστήματα και παίρνω το ένα.



Στο τέλος του 1^{ου} διαστήματος είναι ο αριθμός $\frac{3}{2}$. Άρα $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2}$.

Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με κλάσμα ή κλάσματος με φυσικό αριθμό είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο του φυσικού αριθμού με τον αριθμητή του κλάσματος και παρονομαστή τον παρονομαστή του κλάσματος.

Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τα αποτελέσματα:

α. $5 \cdot \frac{4}{7}$

β. $\frac{6}{5} \cdot 7$

γ. Τα $\frac{2}{3}$ του 9.

Λύση

α. $5 \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7} = \frac{20}{7}$

β. $\frac{6}{5} \cdot 7 = \frac{6 \cdot 7}{5} = \frac{42}{5}$

Όταν ζητάμε ένα μέρος ενός αριθμού, φυσικού ή κλασματικού, κάνουμε πολλαπλασιασμό.

γ. Τα $\frac{2}{3}$ του 9 είναι $\frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{2 \cdot 9}{3} = \frac{18}{3} = 6$ ή $\frac{2}{3} \cdot 9^3 = 2 \cdot 3 = 6$.

2. Στο διπλανό σχήμα είναι το $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας. Πόσα κομματάκια είναι:



α. Τα $\frac{3}{5}$ της σοκολάτας;

β. Όλη η σοκολάτα;

Λύση

α. Το $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας είναι 4 κομματάκια. Είναι $\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$ ή τα $\frac{3}{5}$ είναι 3 φορές το $\frac{1}{5}$.

Οπότε τα $\frac{3}{5}$ της σοκολάτας είναι $3 \cdot 4 = 12$ κομματάκια.

β. Είναι $1 = \frac{5}{5} = 5 \cdot \frac{1}{5}$. Οπότε όλη η σοκολάτα είναι $5 \cdot 4 = 20$ κομματάκια.

Ασκήσεις

1 Να κάνεις τους πολλαπλασιασμούς.

α. $2 \cdot \frac{5}{3}$ β. $4 \cdot \frac{6}{7}$ γ. $9 \cdot \frac{5}{8}$

δ. $3 \cdot \frac{11}{5}$ ε. $\frac{1}{3} \cdot 2$ στ. $\frac{2}{5} \cdot 4$

2 Να υπολογίσεις τα γινόμενα.

α. $4 \cdot \frac{5}{6}$ β. $6 \cdot \frac{3}{4}$ γ. $\frac{5}{8} \cdot 6$

δ. $\frac{5}{12} \cdot 8$ ε. $4 \cdot \frac{3}{2}$ στ. $6 \cdot \frac{5}{3}$

ζ. $4 \cdot \frac{1}{8}$ η. $\frac{6}{15} \cdot 5$ θ. $5 \cdot \frac{7}{5}$

3 Να υπολογίσεις:

α. το $\frac{1}{3}$ του 6 β. το $\frac{1}{5}$ του 30

γ. το $\frac{1}{7}$ του 35 δ. τα $\frac{4}{5}$ του 10

ε. το $\frac{1}{4}$ του 2 στ. το $\frac{1}{9}$ του 3

4 Να υπολογίσεις:

α. τα $\frac{2}{3}$ της ώρας β. τα $\frac{5}{6}$ της ώρας

γ. τα $\frac{3}{5}$ του κιλού δ. τα $\frac{7}{20}$ του κιλού

ε. τα $\frac{3}{4}$ του κιλού στ. τα $\frac{2}{5}$ του κιλού

5 Ο Πέτρος είναι 40 χρονών. Η ηλικία του Στέλιου είναι τα $\frac{3}{8}$ της ηλικίας του Πέτρου. Πόσο χρόνων είναι ο Στέλιος;

6 Η Ε' τάξη έχει 20 μαθητές. Τα $\frac{2}{5}$ των μαθητών είναι αγόρια. Πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια;

7 Η Χαρά είχε 12 €. Ξόδεψε στο κυλικείο τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων της. Πόσα χρήματα ξόδεψε και πόσα της έμειναν;

8 Το $\frac{1}{5}$ ενός σχοινιού είναι 3 μέτρα.



α. Πόσα μέτρα είναι τα $\frac{4}{5}$ του σχοινιού;

β. Πόσο μήκος έχει όλο το σχοινί;

9 Το $\frac{1}{5}$ των μαθητών της Ε' τάξης είναι 4 μαθητές.

α. Πόσοι μαθητές είναι τα $\frac{3}{5}$ της τάξης;

β. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές;

Β' ΟΜΑΔΑ

10 Να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν.

α. $3 \cdot \frac{\dots}{7} = \frac{6}{7}$ β. $\dots \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

γ. $3 \cdot \frac{3}{\dots} = \frac{9}{10}$ δ. $\frac{\dots}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

ε. $\frac{3}{8} \cdot \dots = \frac{3}{4}$ στ. $7 \cdot \frac{2}{\dots} = 2$

11 Να συμπληρώσεις τα παρακάτω κενά με το κατάλληλο σύμβολο ($>$ ή $<$ ή $=$).

α. $1 \cdot \frac{3}{5} \dots 1$ β. $1 \cdot \frac{4}{3} \dots 1$

γ. $2 \cdot \frac{5}{7} \dots 2$ δ. $2 \cdot \frac{5}{3} \dots 2$

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με ένα κλάσμα:

- μικρότερο της μονάδας, ο αριθμός μικραίνει
- μεγαλύτερο της μονάδας, ο αριθμός μεγαλώνει.

12 Η απόσταση Αθήνα – Θεσσαλονίκη είναι 500 χμ.

Η απόσταση Αθήνα – Λαμία είναι τα $\frac{2}{5}$ της απόστασης Αθήνα – Θεσσαλονίκη.

Πόση είναι η απόσταση Λαμία – Θεσσαλονίκη;

13 Ο Νίκος για να πάει από το σπίτι του στο σχολείο, χρειάζεται 7 λεπτά, ενώ η Λία τα $\frac{2}{15}$ της ώρας. Ποιο παιδί χρειάζεται λιγότερο χρόνο;

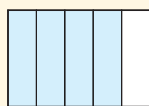
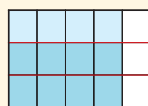
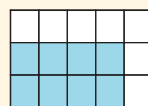
14 Ένα σχολείο έχει 200 μαθητές. Τα $\frac{3}{20}$ των μαθητών φοιτούν στην Ε' τάξη. Από αυτούς τα $\frac{3}{5}$ είναι κορίτσια. Πόσα είναι τα αγόρια στην Ε' τάξη;

Μαθαίνω

Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Το γινόμενο $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ είναι τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{4}{5}$.

Το **γινόμενο δύο κλασμάτων** είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.


 $\frac{4}{5}$
 $\cdot \frac{2}{3}$

 $=$


$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Αντίστροφοι αριθμοί

Αντίστροφοι αριθμοί λέγονται δύο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι 1.

Ο αντίστροφος ενός κλάσματος προκύπτει, αν αντιστρέψουμε τους όρους του.

$$\frac{2}{3} \text{ και } \frac{3}{2}$$

Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τα γινόμενα.

α. $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$

β. $\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{8}$

γ. $\frac{14}{9} \cdot \frac{18}{21}$

Λύση

α. $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$

β. $\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5 \cdot 1}{7 \cdot 8} = \frac{5}{56}$

γ. $\frac{14}{9} \cdot \frac{18}{21} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{4}{3}$

2. Να βρείτε τον αντίστροφο των αριθμών.

α. $\frac{3}{5}$

β. $\frac{1}{3}$

γ. 2

Λύση

α. Ο αντίστροφος του $\frac{3}{5}$ είναι το $\frac{5}{3}$, αφού $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{15}{15} = 1$.

β. Ο αντίστροφος του $\frac{1}{3}$ είναι το 3, αφού $\frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1 \cdot 3}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

γ. Ο αντίστροφος του 2 είναι το $\frac{1}{2}$, αφού $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

- Ο αντίστροφος του 1 είναι το 1.
- Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσεις τα γινόμενα:

α. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$

β. $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3}$

γ. $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8}$

δ. $\frac{0}{7} \cdot \frac{15}{11}$

ε. $1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$

στ. $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{5}$

2. Να υπολογίσεις τα γινόμενα:

α. $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{4}$

β. $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{3}$

γ. $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{7}$

δ. $\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{8}$

ε. $\frac{18}{35} \cdot \frac{25}{24}$

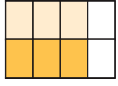
3. Να υπολογίσεις:

α. τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{5}{7}$

β. τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{8}{5}$

γ. τα $\frac{4}{5}$ του $\frac{15}{8}$

4 Να συμπληρώσεις τον πίνακα, όπως στο παράδειγμα.

Λεκτικά	Αναπαράσταση	Πολλαπλασιασμός
α. το $\frac{1}{2}$ του $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$  $\cdot \frac{1}{2}$ 	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$
β. τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{4}{5}$	 $\rightarrow$ 	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} =$
γ. τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{2}{5}$	 $\rightarrow$ 	

5 Να εξετάσεις, αν οι παρακάτω αριθμοί είναι αντίστροφοι.

α. $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{3}$

β. $\frac{1}{2}$ και 2

γ. 3 και $\frac{1}{3}$

δ. $\frac{5}{7}$ και $\frac{7}{4}$

6 Να βρεις τον αντίστροφο καθενός από τους παρακάτω αριθμούς και να κάνεις επαλήθευση.

α. $\frac{2}{5}$

β. $\frac{4}{3}$

γ. $\frac{1}{2}$

δ. 3

ε. $\frac{7}{9}$

στ. 1

ζ. $\frac{1}{7}$

η. 5

7 Η Σταυρούλα ξόδεψε σήμερα τα $\frac{3}{5}$ των χρημάτων της. Από αυτά τα $\frac{2}{3}$ τα ξόδεψε για την αγορά ενός τετραδίου. Τι μέρος των χρημάτων της ξόδεψε για την αγορά του τετραδίου;

8 Τα $\frac{3}{4}$ ενός οικοπέδου είναι κήπος και τα $\frac{2}{3}$ του κήπου είναι γκαζόν. Ποιο μέρος του οικοπέδου είναι γκαζόν;

Β' ΟΜΑΔΑ

9 Η ηλικία της Φιλίως είναι τα $\frac{4}{5}$ της ηλικίας της Ελπίδας. Η ηλικία του Λάμπρου είναι τα $\frac{2}{3}$ της ηλικίας της Φιλίως. Τι μέρος της ηλικίας της Ελπίδας είναι η ηλικία του Λάμπρου;

10 Η Χάρης έφαγε τα $\frac{3}{8}$ μίας πίτσας. Ο Δημήτρης έφαγε τα $\frac{3}{5}$ από την υπόλοιπη πίτσα.

α. Τι μέρος της πίτσας έφαγε ο Δημήτρης;

β. Τα παιδιά έφαγαν την ίδια πίτσα;

γ. Ποιο μέρος της πίτσας απέμεινε;

11 Ένα σπίτι καταλαμβάνει τα $\frac{2}{3}$ ενός οικοπέδου. Μία αποθήκη καταλαμβάνει τα $\frac{2}{5}$ του υπόλοιπου οικοπέδου. Ποιο μέρος του οικοπέδου έμεινε ακάλυπτο;

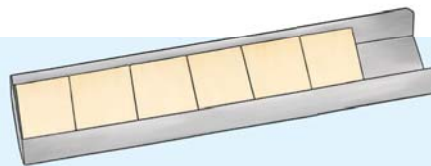
12 Η Ε' τάξη έχει 24 μαθητές. Το $\frac{1}{4}$ συμμετέχει στον όμιλο θεάτρου. Από αυτούς τα $\frac{2}{3}$ είναι κορίτσια.

α. Πόσα είναι τα κορίτσια που συμμετέχουν στον όμιλο θεάτρου;

β. Τι μέρος των μαθητών της Ε' τάξης αποτελούν τα κορίτσια που συμμετέχουν στον όμιλο θεάτρου;

20 Διαίρεση κλασμάτων

- Πόσο μέρος του κέικ έχει μείνει;
- Η Λία και ο Νίκος θέλουν να το μοιραστούν δίκαια.
Ποιο μέρος από όλο το κέικ θα πάρει το κάθε παιδί;



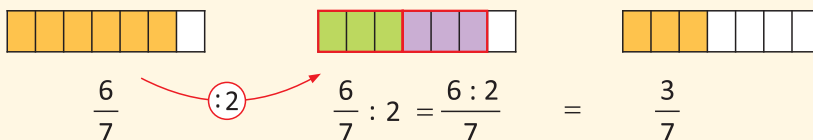
Μαθαίνω

Διαίρεση κλασμάτων

Διαίρεση κλάσματος με φυσικό αριθμό

Αν ο αριθμητής είναι πολλαπλάσιο του φυσικού αριθμού, τότε:

δαιρώ τον αριθμητή με
τον φυσικό αριθμό και
κρατώ τον ίδιο παρονομαστή.

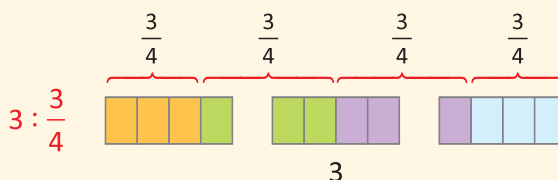


Διαίρεση φυσικού αριθμού με κλάσμα

Το $\frac{3}{4}$ στο 3 χωράει 4 φορές. Οπότε $3 : \frac{3}{4} = 4$.

Είναι $3 \cdot \frac{4}{3} = 4$.

Άρα $3 : \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{4}{3}$.



Δηλαδή προκειμένου να διαιρέσουμε το 3 με το $\frac{3}{4}$, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το 3 με το $\frac{4}{3}$, δηλαδή τον αντίστροφο του $\frac{3}{4}$.

Γενικά

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και αντί για διαίρεση κάνουμε πολλαπλασιασμό.

π.χ. $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}$

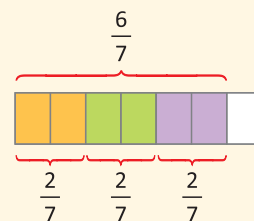
Ειδικές περιπτώσεις:

Διαίρεση ομώνυμων κλασμάτων

Τα $\frac{2}{7}$ στα $\frac{6}{7}$ χωράνε 3 φορές, οπότε $\frac{6}{7} : \frac{2}{7} = 6:2 = 3$.

Είναι $\frac{6}{7} : \frac{2}{7} = 6:2 = 3$.

Για να διαιρέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα, διαιρούμε τους αριθμητές τους.



Οι όροι του διαιρετέου είναι πολλαπλάσια των όρων του διαιρέτη

Είναι $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8}{9} : \frac{6}{9} = 8:6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = \frac{8:2}{9:3}$ ή $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8:2}{9:3} = \frac{4}{3}$.

Αν οι όροι ενός κλάσματος διαιρούνται από τους αντίστοιχους όρους ενός άλλου κλάσματος, τότε διαιρούμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε το πηλίκο των παρακάτω διαιρέσεων.

α. $\frac{8}{5} : 4$

β. $\frac{10}{7} : \frac{9}{7}$

γ. $\frac{9}{4} : \frac{3}{2}$

δ. $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$

ε. $\frac{7}{3} : 4$

στ. $\frac{3}{5} : \frac{1}{2}$

Λύση

α. $\frac{8}{5} : 4 = \frac{8:4}{5} = \frac{2}{5}$

β. $\frac{10}{7} : \frac{9}{7} = 10:9 = \frac{10}{9}$

γ. $\frac{9}{4} : \frac{3}{2} = \frac{9:3}{4:2} = \frac{3}{2}$

δ. $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$

ε. $\frac{7}{3} : 4 = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

στ. $\frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}$

Ασκήσεις

1 Να υπολογίσεις τα πηλίκα:

α. $\frac{6}{5} : 3$

β. $\frac{4}{7} : 2$

γ. $\frac{8}{9} : 4$

δ. $\frac{24}{5} : 8$

ε. $\frac{30}{7} : 10$

στ. $\frac{3}{4} : 3$

2 Να υπολογίσεις τα πηλίκα:

α. $\frac{6}{7} : \frac{2}{7}$

β. $\frac{10}{3} : \frac{5}{3}$

γ. $\frac{15}{4} : \frac{3}{4}$

δ. $\frac{5}{4} : \frac{3}{4}$

ε. $\frac{8}{5} : \frac{7}{5}$

στ. $\frac{6}{7} : \frac{4}{7}$

3 Να υπολογίσεις τα πηλίκα:

α. $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$

β. $\frac{8}{15} : \frac{4}{5}$

γ. $\frac{10}{21} : \frac{5}{7}$

δ. $\frac{24}{25} : \frac{6}{5}$

ε. $\frac{49}{18} : \frac{7}{9}$

στ. $\frac{27}{35} : \frac{9}{7}$

4 Να υπολογίσεις τα πηλίκα:

α. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$

β. $\frac{1}{2} : \frac{9}{5}$

γ. $\frac{5}{8} : \frac{1}{7}$

δ. $\frac{6}{5} : \frac{2}{7}$

ε. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

στ. $\frac{6}{35} : \frac{4}{7}$

5 Να υπολογίσεις τα πηλίκα:

α. $\frac{3}{5} : 2$

β. $\frac{7}{4} : 3$

γ. $\frac{1}{2} : 5$

δ. $1\frac{3}{5} : 6$

ε. $\frac{2}{7} : \frac{1}{3}$

στ. $\frac{2}{9} : \frac{1}{5}$

6 Να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν.

α. $\frac{1}{5} = \frac{2}{5} : \dots$

β. $\frac{1}{7} = \frac{3}{7} : \dots$

γ. $\frac{1}{6} = \frac{5}{6} : \dots$

7 Τα $\frac{3}{7}$ των μαθητών της Ε' τάξης είναι 15 μαθητές. Πόσοι μαθητές είναι:

α. το $\frac{1}{7}$ των μαθητών;

β. τα $\frac{4}{7}$ των μαθητών;

γ. όλοι οι μαθητές;

$$\frac{3}{7} : 3 = \frac{1}{7}$$
$$\frac{4}{7} = 4 \cdot \frac{1}{7}$$

8 Τα $\frac{4}{5}$ ενός σχοινιού είναι 12 μέτρα.

α. Πόσα μέτρα είναι το $\frac{1}{5}$ του σχοινιού;

β. Πόσα μέτρα είναι όλο το σχοινί;

9 Η Αλέκα έφαγε τα $\frac{5}{14}$ μίας σοκολάτας και μοίρασε δίκαια στον Ηλία, στη Λένα και στον Άρη το υπόλοιπο της σοκολάτας. Τι μέρος της σοκολάτας έφαγε κάθε παιδί;

10 Ένα μπουκάλι περιέχει $1\frac{1}{2}$ λίτρα νερό. Πόσα ποτήρια μπορούμε να γεμίσουμε, αν κάθε ποτήρι χωράει $\frac{1}{6}$ του λίτρου νερό;



7. Χώρος και Γεωμετρία

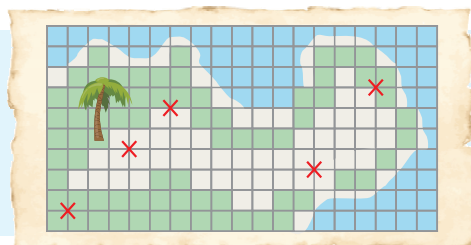
Σε αυτή την ενότητα:

- Σχεδιάζουμε και μετράμε γωνίες.
- Μαθαίνουμε τα είδη τριγώνων, κατασκευάζουμε τα ύψη τους και υπολογίζουμε το μήκος του κύκλου.

- 36 Μετρώ και σχεδιάζω σε κλίμακες
- 37 Προσανατολισμός στον χώρο
- 38 Είδη γωνιών
- 39A Μέτρηση γωνιών
- 39B Μέτρηση γωνιών
- 40 Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες
- 41 Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές
- 42 Καθετότητα – Ύψη τριγώνου
- 43 Συμμετρία
- 44 Κύκλος – Μήκος κύκλου

37 Προσανατολισμός στον χώρο

Τα κόκκινα σημάδια στον χάρτη σηματοδοτούν μέρη στα οποία κρύβονται θησαυροί. Ο Νίκος θα ήθελε να αποκαλύψει σε έναν φίλο του τις τοποθεσίες των θησαυρών. Εξηγήστε πώς μπορεί να το κάνει αυτό.



Μαθαίνω

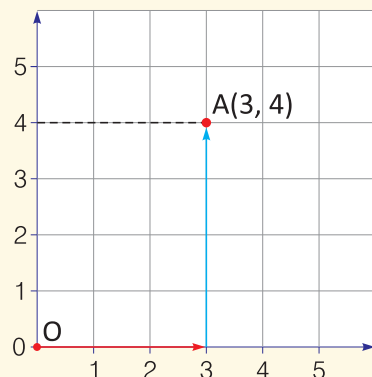
Για τον προσδιορισμό ενός σημείου στο επίπεδο χρησιμοποιούμε δύο κάθετες μεταξύ τους αριθμογραμμές, μία οριζόντια και μία κατακόρυφη.

Το O είναι το κοινό τους σημείο και το θεωρούμε **σημείο αναφοράς**.

Αν ξεκινήσουμε από το σημείο αναφοράς, για να φτάσουμε στο σημείο A , κάνουμε **3** βήματα **δεξιά** και **4** **επάνω**.

Το σημείο A βρίσκεται στη θέση **(3, 4)** και γράφουμε $A(3, 4)$.

Οι αριθμοί 3 και 4 λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου A .



Εφαρμογές

1. Να βρεις τις θέσεις (συντεταγμένες) των σημείων A , B και Γ .

Λύση

- Για να φτάσουμε στο σημείο A από το O , πρέπει να κάνουμε:
 - 2** βήματα **δεξιά** και
 - 4** **πάνω**.

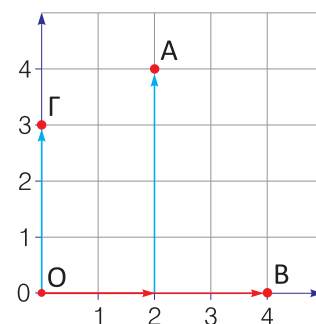
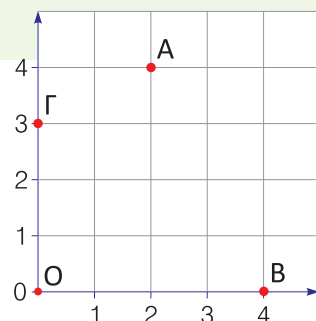
Έτσι η θέση του σημείου A είναι $(2, 4)$ και γράφουμε $A(2, 4)$.

- Για να φτάσουμε στο σημείο B από το O , πρέπει να κάνουμε:
 - 4** βήματα **δεξιά** και
 - κανένα** βήμα **πάνω**.

Έτσι η θέση του σημείου B είναι $(4, 0)$ ή $B(4, 0)$.

- Για να φτάσουμε στο σημείο Γ από το O , πρέπει να κάνουμε:
 - κανένα** βήμα **δεξιά** και
 - 3** βήματα **προς τα πάνω**.

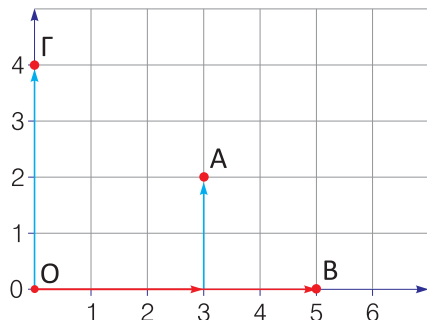
Έτσι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(0, 3)$ και γράφουμε $\Gamma(0, 3)$.



2. Να σημειώσετε σε ένα πλέγμα τα σημεία: $A(3, 2)$, $B(5, 0)$ και $\Gamma(0, 4)$.

Λύση

- Για να σημειώσουμε τη θέση του σημείου $A(3, 2)$, ξεκινάμε από το O και κάνουμε:
 - 3** βήματα **δεξιά** και **2** **πάνω**.
- Για το σημείο $B(5, 0)$ πηγαίνουμε:
 - 5** βήματα **δεξιά** και **κανένα** **πάνω**.
- Για το σημείο $\Gamma(0, 4)$ πηγαίνουμε μόνο **πάνω** **4** βήματα.



38 Είδη γωνιών

Σε ένα πλοίο ένας ναυτικός φωνάζει:

«Ιστιοφόρο στις δύο η ώρα!»

Εξηγήστε τι σημαίνει αυτό. Κάντε ένα σκίτσο.

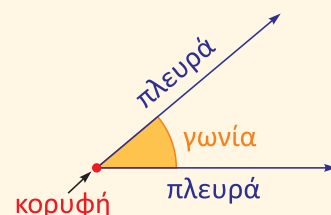


Μαθαίνω

Γωνία

Μια **γωνία** είναι ένα μέρος του επιπέδου που οριοθετείται από δύο «ακτίνες» που ξεκινούν από το ίδιο σημείο.

Οι «ακτίνες» είναι οι **πλευρές** της γωνίας και η κοινή αρχή τους, είναι η **κορυφή** της γωνίας.



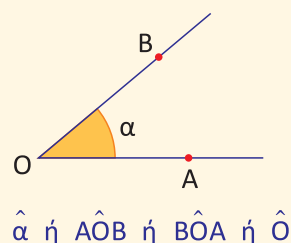
Ονομασία της γωνίας

Η γωνία μπορεί να ονομαστεί με έναν από τους παρακάτω τρόπους.

- Ένα **μικρό γράμμα** το οποίο σημειώνουμε στο σχήμα στο εσωτερικό της γωνίας και βάζουμε το σύμβολο ($\wedge$) πάνω από το γράμμα, όταν τη γράφουμε. π.χ. $\hat{\alpha}$.

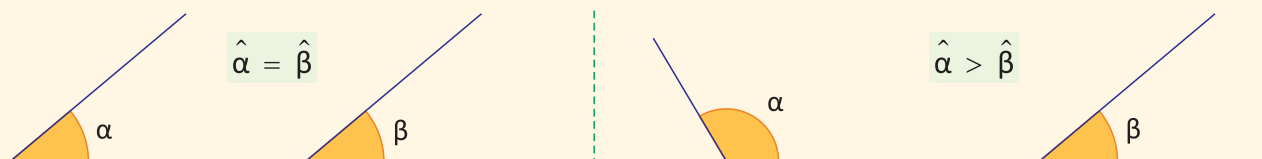
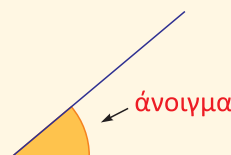
- **Τρία κεφαλαία γράμματα** από τα οποία το μεσαίο γράμμα είναι η κορυφή της και τα άλλα δύο βρίσκονται πάνω στις πλευρές της. π.χ. $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$.

- Το **κεφαλαίο γράμμα** της κορυφής, όταν σχηματίζεται μόνο μια γωνία με κορυφή το σημείο αυτό. π.χ. $\hat{O}$.



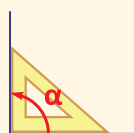
Σύγκριση γωνιών

- Το μέγεθος μιας γωνίας εξαρτάται μόνο από το άνοιγμά της, δηλαδή το **άνοιγμα** των πλευρών της.
- Μεταξύ δύο γωνιών **μεγαλύτερη** είναι αυτή που έχει **μεγαλύτερο άνοιγμα**.

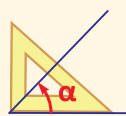


Είδη γωνιών

ορθή γωνία

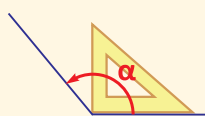


οξεία γωνία



μικρότερη
από την ορθή γωνία

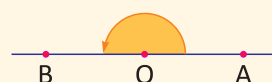
αμβλεία γωνία



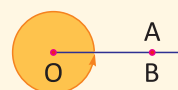
μεγαλύτερη
από την ορθή γωνία

Ειδικές γωνίες

- **Ευθεία γωνία:** οι πλευρές της βρίσκονται σε μια ευθεία.

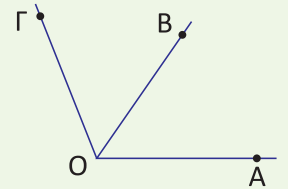


- **Πλήρης γωνία:** οι πλευρές της συμπίπτουν.



Εφαρμογές

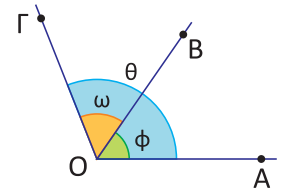
1. Να σημειώσετε στο διπλανό σχήμα με μικρά γράμματα τις τρεις γωνίες που σχηματίζονται και να τις γράψετε με τη βοήθεια της κορυφής τους και των πλευρών της.



Λύση

Οι ζητούμενες γωνίες φαίνονται στο διπλανό σχήμα και είναι οι $\hat{\phi}$, $\hat{\omega}$ και $\hat{\theta}$ που γράφονται αντίστοιχα:

$$\hat{A}\hat{O}\hat{B}, \hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} \text{ και } \hat{A}\hat{O}\hat{\Gamma}$$



2. Να χαρακτηρίσετε ως προς το είδος τους τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$ που φαίνονται στο διπλανό σχήμα και να γράψετε μεταξύ των γωνιών το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $>$ ή $=$).

$$\hat{\alpha} \square \hat{\beta}, \hat{\gamma} \square \hat{\alpha}, \hat{\beta} \square \hat{\gamma}, \hat{\beta} \square \hat{\delta}$$

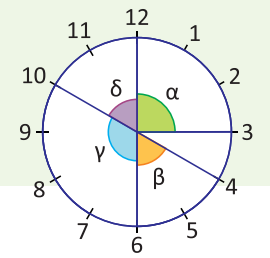
Λύση

Παρατηρούμε ότι ο κύκλος είναι χωρισμένος σε 12 ίσα μέρη.

α. Η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι ορθή, οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ οξείες, ενώ η γωνία $\hat{\gamma}$ αμβλεία.

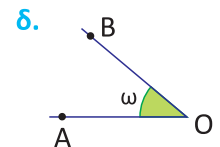
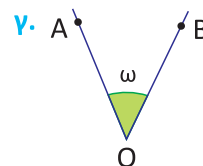
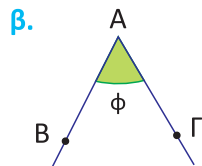
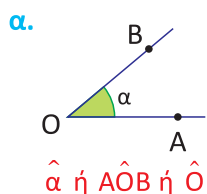
β. Είναι:

- $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$, αφού μια ορθή γωνία είναι μεγαλύτερη από μια οξεία γωνία.
- $\hat{\gamma} > \hat{\alpha}$, αφού μια αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη από την ορθή γωνία.
- $\hat{\beta} < \hat{\gamma}$, αφού μια οξεία γωνία είναι μικρότερη από μια αμβλεία γωνία.
- $\hat{\beta} = \hat{\delta}$, αφού έχουν το ίδιο άνοιγμα.

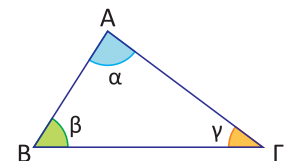


Ασκήσεις

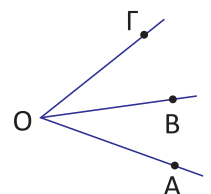
1. Να γράψεις τις γωνίες με τρεις τρόπους, όπως στο παράδειγμα.



2. Να γράψεις τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ του διπλανού σχήματος με τα τρία κεφαλαία γράμματα και ύστερα με ένα κεφαλαίο γράμμα.



3. Να σημειώσεις με μικρά γράμματα στο διπλανό σχήμα τις τρεις γωνίες που σχηματίζονται και να γράψεις καθεμιά με τρία κεφαλαία γράμματα.



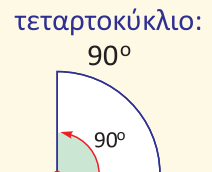
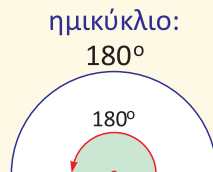
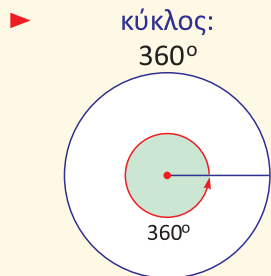
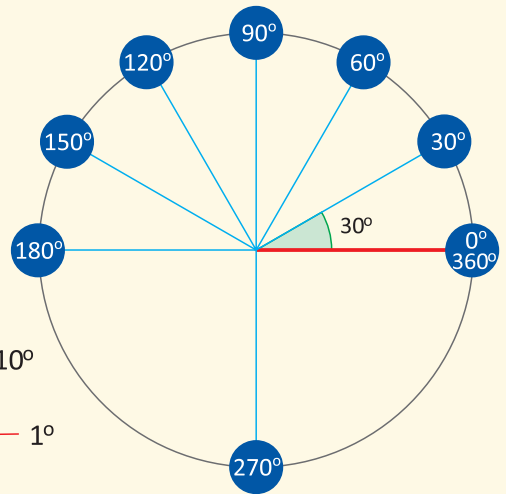
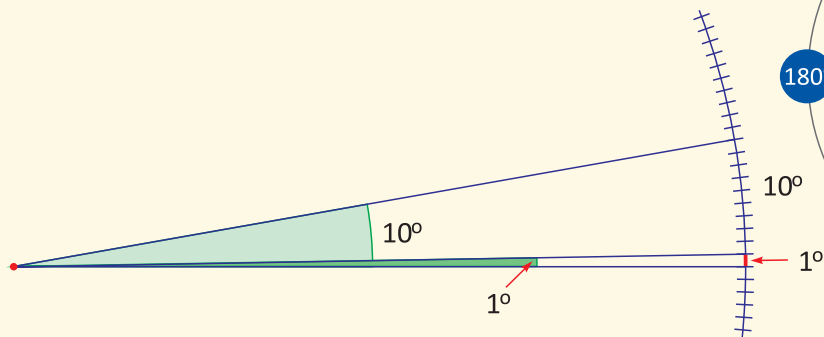
39Α Μέτρηση γωνιών

Ο αριθμός 360 διαιρείται με τους αριθμούς:
12, 30, 24, 60

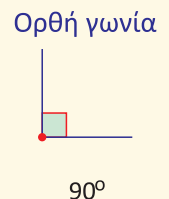
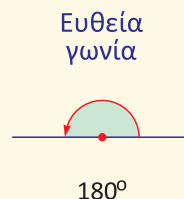
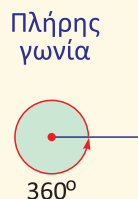


Μαθαίνω

Χωρίζουμε έναν κύκλο σε 360 ίσα μέρη.
Καθένα από αυτά λέμε ότι είναι μια **μοίρα (1°)**.
Με τη μοίρα μετράμε τις γωνίες,
όπως στο παρακάτω σχήμα.

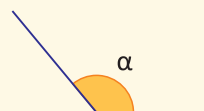


- • Η πλήρης γωνία είναι 360°.
• Η ευθεία γωνία είναι 180°.
• Η ορθή γωνία είναι 90°.



► Μια γωνία $\hat{\alpha}$ είναι:

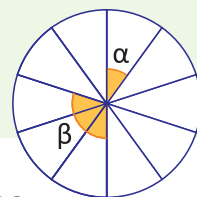
- οξεία, όταν $0^\circ < \hat{\alpha} < 90^\circ$
- αμβλεία, όταν $90^\circ < \hat{\alpha} < 180^\circ$.



Εφαρμογές

1. Ο κύκλος στο διπλανό σχήμα είναι χωρισμένος σε ίσα μέρη.

Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.



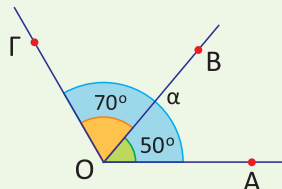
Λύση

Ο κύκλος είναι χωρισμένος σε 10 ίσα μέρη. Το καθένα από αυτά είναι $360^\circ : 10 = 36^\circ$.

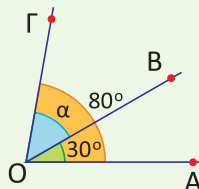
Οπότε η γωνία $\hat{\alpha} = 36^\circ$ και η γωνία $\hat{\beta} = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$.

2. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\alpha}$ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.

α.



β.



Λύση

α. Η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι το **άθροισμα** των γωνιών $\widehat{AOB}$ και $\widehat{BOG}$.

Δηλαδή $\hat{\alpha} = 50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$.

β. Η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι η **διαφορά** της γωνίας $\widehat{AOB}$ από την $\widehat{AOG}$.

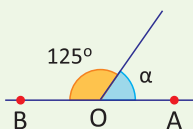
Δηλαδή $\hat{\alpha} = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$.

Βρίσκουμε:

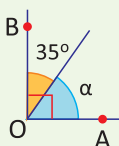
- το **άθροισμα** δύο ή περισσότερων γωνιών, αν προσθέσουμε τα μεγέθη τους,
- τη **διαφορά** δύο γωνιών, αν αφαιρέσουμε τα μεγέθη τους.

3. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\alpha}$ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.

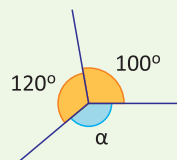
α.



β.



γ.



Λύση

α. Η γωνία $\widehat{AOB}$ είναι ευθεία γωνία, οπότε $\widehat{AOB} = 180^\circ$. Είναι $\hat{\alpha} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$.

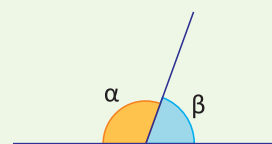
β. Η γωνία $\widehat{AOB}$ είναι ορθή γωνία, οπότε $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Είναι $\hat{\alpha} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

γ. Είναι $100^\circ + 120^\circ = 220^\circ$, οπότε $\hat{\alpha} = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$.

4. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\alpha}$, όταν είναι:

α. μεγαλύτερη κατά 40° από τη γωνία $\hat{\beta}$.

β. διπλάσια της γωνίας $\hat{\beta}$.



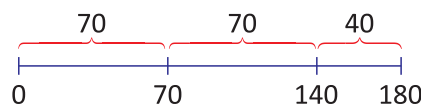
Λύση

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ έχουν άθροισμα 180° .

α. Είναι $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ και $140^\circ : 2 = 70^\circ$.

Οπότε $\hat{\beta} = 70^\circ$ και $\hat{\alpha} = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

β. Είναι $180^\circ : 3 = 60^\circ$, οπότε $\hat{\beta} = 60^\circ$ και $\hat{\alpha} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.



5. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι δείκτες ενός ρολογιού, όταν η ώρα είναι:

α. 4:00

β. 2:30

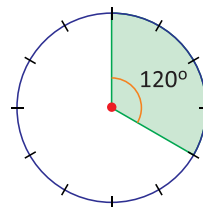
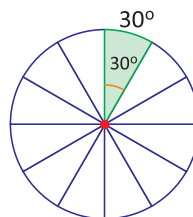


Λύση

α. Ο κύκλος του ρολογιού είναι χωρισμένος από τις ώρες σε 12 ίσα μέρη.

Το κάθε μέρος από αυτά είναι $360^\circ : 12 = 30^\circ$.

Η γωνία που σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού στις 4:00 είναι $4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.



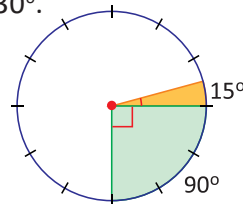
β. Ο ωροδείκτης σε διάστημα μιας ώρας, δηλαδή 60 λεπτών διαγράφει γωνία 30° .

Οπότε σε 1 λ. διαγράφει γωνία $30^\circ : 60 = 0,5^\circ$.

Άρα σε 30 λ. διαγράφει γωνία $30 \cdot 0,5^\circ = 15^\circ$.

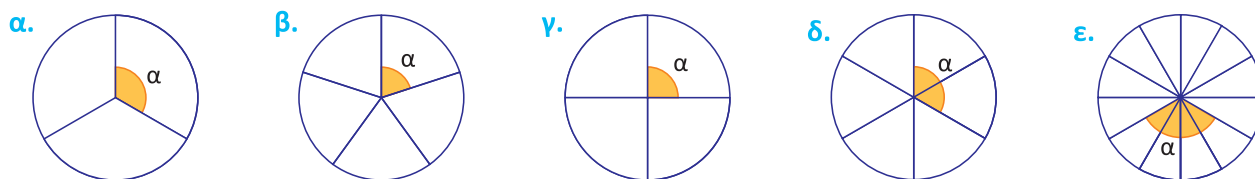
Οπότε η γωνία που σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού στις 2:30 είναι

$$90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$$



Ασκήσεις

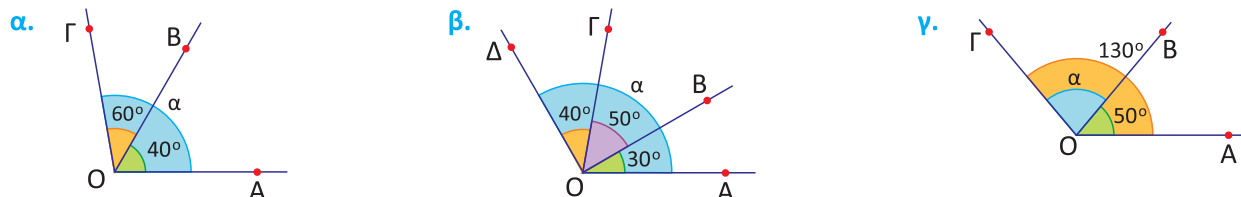
1 Κάθε κύκλος είναι χωρισμένος σε ίσα μέρη. Να βρεις τη γωνία $\hat{\alpha}$ σε κάθε περίπτωση.



2 Κάθε ημικύκλιο είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη. Να βρεις τη γωνία $\hat{\alpha}$ σε κάθε περίπτωση.



3 Να υπολογίσεις τη γωνία $\hat{\alpha}$ που φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



4 α. Ποια είναι η γωνία των κατευθύνσεων μεταξύ:

1. W και N

2. E και S

3. SE και S

4. S και NW

β. Μία πυξίδα γυρίζει προς τα αριστερά. Να βρεις τη γωνία που διαγράφει, αν περιστραφεί από το E:

1. στο NE

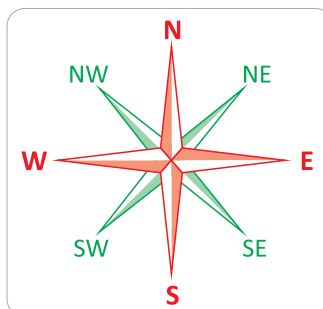
2. στο NW

3. στο SE

4. στο SW

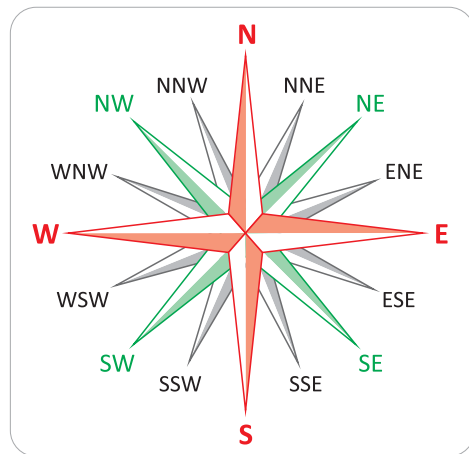
5. στο S

6. στο W



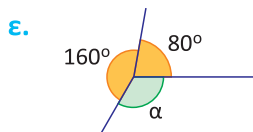
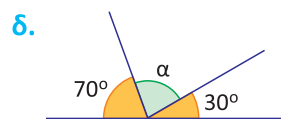
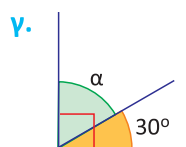
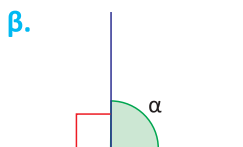
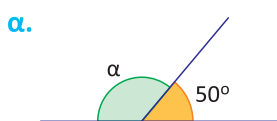
Οι γωνίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό κατευθύνσεων.

- 5** Μία πυξίδα δείχνει τη διάταξη των σημείων του ορίζοντα. Συχνά χρησιμοποιείται μια διαίρεση με 16 βασικές κατευθύνσεις.

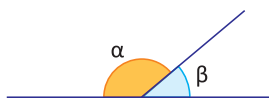


- α.** Υπολόγισε τη γωνία μεταξύ δύο γειτονικών κατευθύνσεων.
β. Υπολόγισε τη γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων NNE και SSE.

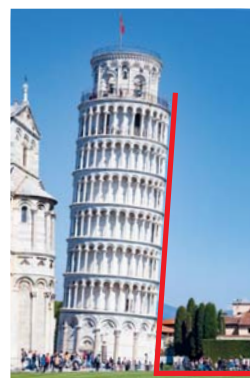
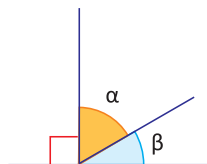
- 6** Να υπολογίσεις τη γωνία $\hat{\alpha}$ στα παρακάτω σχήματα.



- 7** Να υπολογίσεις τη γωνία $\hat{\alpha}$, όταν είναι:
α. μεγαλύτερη κατά 100° από τη γωνία $\hat{\beta}$.
β. τετραπλάσια της γωνίας $\hat{\beta}$.



- 8** Να υπολογίσεις τη γωνία $\hat{\alpha}$, όταν είναι:
α. μεγαλύτερη κατά 20° από τη γωνία $\hat{\beta}$,
β. διπλάσια της γωνίας $\hat{\beta}$.

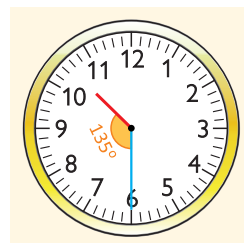


πύργος της Πίζας

- 9** Να βρεις τη γωνία που σχηματίζουν οι δείκτες ενός ρολογιού, όταν η ώρα είναι:

- α.** • 3:00 • 9:00 • 6:00
β. • 1:00 • 10:00 • 4:00 • 7:00

- 10** **α.** Όταν η ώρα είναι 10:30, ο μεγάλος δείκτης με τον μικρό δείκτη σχηματίζουν γωνία 135° . Γιατί συμβαίνει αυτό;
β. Ποια γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού στις 4:30;



- 11** Να βρεις τη γωνία που σχηματίζουν οι δείκτες ενός ρολογιού, όταν η ώρα είναι:

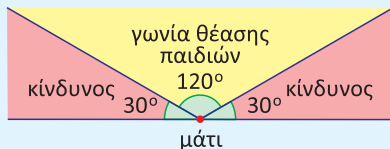
- α.** 3:30 **β.** 9:30 **γ.** 8:10 **δ.** 9:20

- 12** Να βρεις την ακέραιη ώρα που δείχνει το ρολόι, όταν οι δείκτες του σχηματίζουν γωνία:

- α.** 90° **β.** 120° **γ.** 150° **δ.** 180°

39B Μέτρηση γωνιών

Τα παιδιά σε σχέση με τους ενήλικες βρίσκονται σε μειονεκτική θέση στους δρόμους. Στην ηλικία των 6 ετών η γωνία θέασής τους είναι μόνο 120° , ενώ αυτή των ενηλίκων είναι 180° .

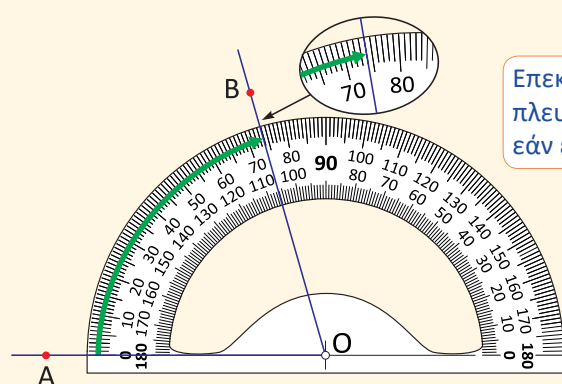


Μαθαίνω

Μέτρηση της γωνίας $\widehat{AOB}$

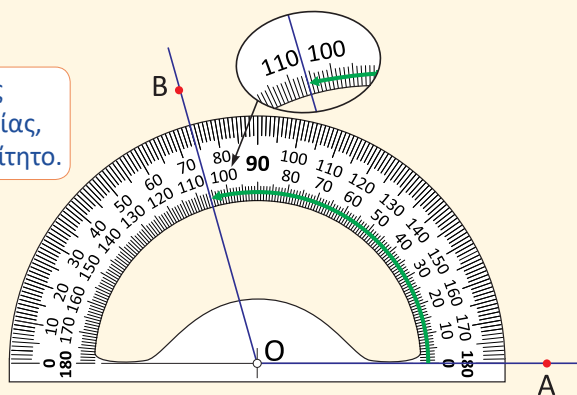
Για να βρούμε πόσες μοίρες είναι μία γωνία, κάνουμε τα εξής βήματα:

1. Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμόνιου στην κορυφή O της γωνίας.
2. Τοποθετούμε ένα από τα δύο μηδενικά στην μία πλευρά της γωνίας, εδώ στην OA .
3. Ακολουθούμε (πράσινο βέλος) τις βαθμολογήσεις μέχρι την άλλη πλευρά, εδώ την OB .



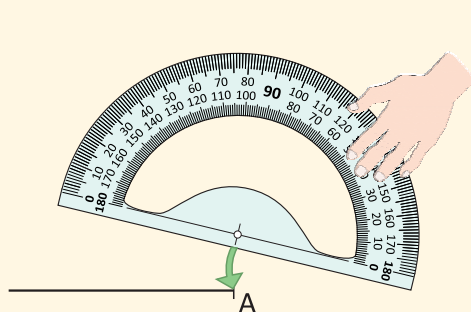
Η γωνία $\widehat{AOB}$ είναι 74° .

Επεκτείνουμε τις πλευρές της γωνίας, εάν είναι απαραίτητο.

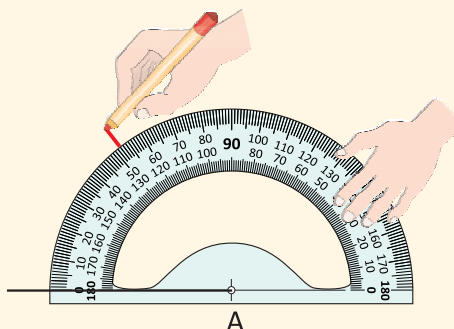


Η γωνία $\widehat{AOB}$ είναι 106° .

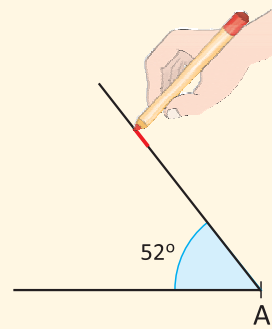
Κατασκευή μιας γωνίας ίσης με 52°



Σχεδιάζουμε μια γραμμή και ένα σημείο A πάνω σε αυτήν. Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμόνιου στο σημείο A .



Μετά ακολουθούμε τη μέτρηση που ξεκινάει από το O και φτάνουμε στο 52 . Εκεί βάζουμε ένα μικρό σημάδι.

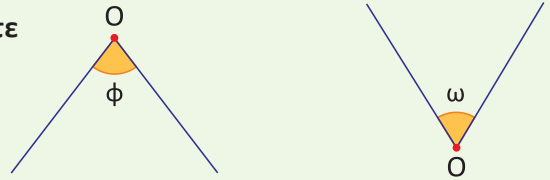


Τέλος ενώνουμε το σημείο A με το σημάδι και προεκτείνουμε.

Έτσι κατασκευάζουμε μία γωνία ίση με 52° .

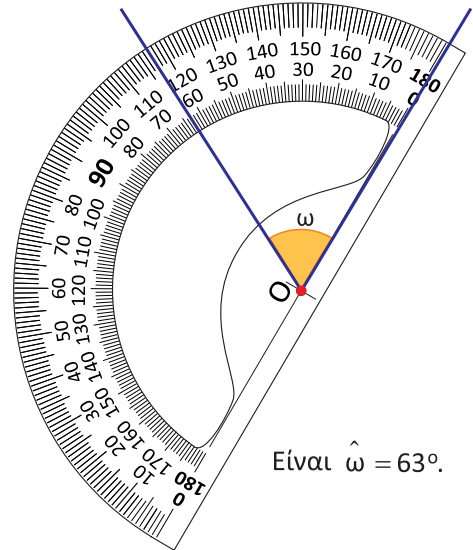
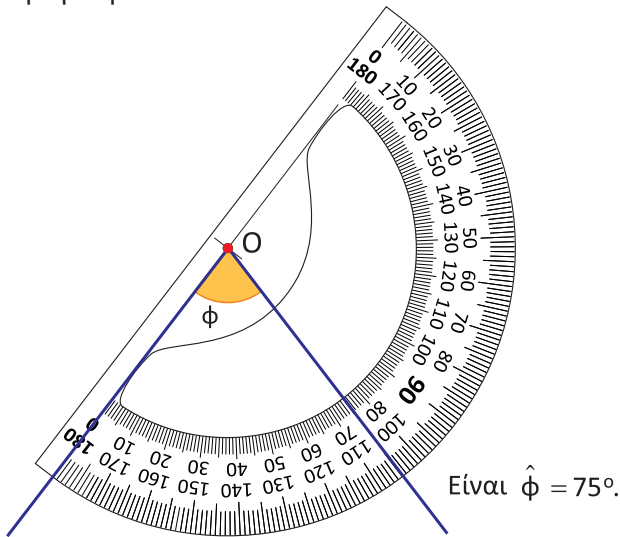
Εφαρμογές

1. Να χρησιμοποιήσετε το μοιρογνωμόνιο και να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες στα διπλανά σχήματα.

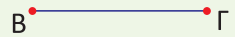


Λύση

Αρχικά προεκτείνουμε τις πλευρές των γωνιών, ώστε να περνάνε από τις ενδείξεις του μοιρογνωμόνιου.

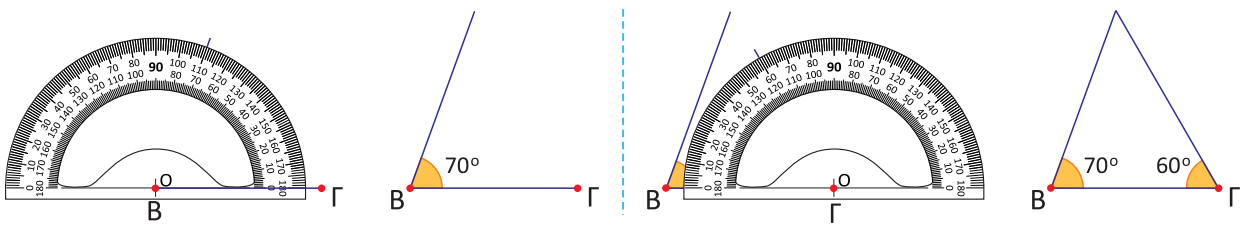


2. Με κορυφές τα σημεία Β και Γ να κατασκευάσετε δύο γωνίες 70° και 60° αντίστοιχα και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία που σχηματίζουν οι άλλες πλευρές των γωνιών.

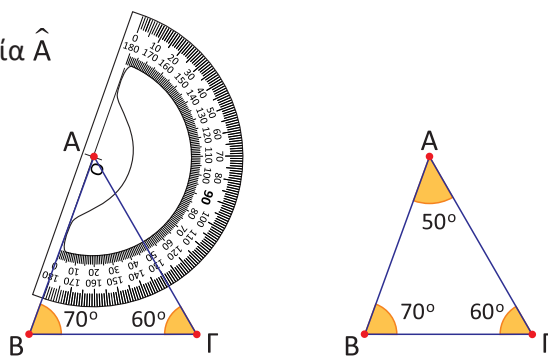


Λύση

Σχεδιάζουμε τις γωνίες $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Μετράμε τη γωνία $\hat{A}$



Η γωνία $\hat{A}$ είναι 50° .



ISBN: 978-618-85526-0-9



Λ.Τ. 19,80 €