

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Γεωμετρία

Α΄ Λυκείου

- Θεωρία
- Λυμένες ασκήσεις
- Ασκήσεις για λύση
- Διαγωνίσματα
- Θέματα
- Λύσεις των ασκήσεων
και του Σχολικού Βιβλίου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ τάξης Λυκείου.

Περιέχει:

- ✓ **Αναλυτική θεωρία.**
- ✓ **Παρατηρήσεις στη θεωρία**, στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ✓ **Μεθοδολογία** και **Σχόλια** για τη λύση ασκήσεων.
- ✓ **Λυμένες ασκήσεις**, ως υποδείγματα τρόπου λύσης.
- ✓ **Ασκήσεις για λύση.**
- ✓ **Θέματα** που καλύπτουν όλο το φάσμα των γνώσεων που πρέπει να έχει ο μαθητής, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των εξετάσεων.
- ✓ **Διαγωνίσματα** ανά διδακτική ενότητα.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν:

- **Οι λύσεις των ασκήσεων** του βιβλίου αυτού .
- **Οι λύσεις των ασκήσεων** του σχολικού βιβλίου.

Αύγουστος 2019

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

1. Πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες	6
2. Γωνίες	13
3. Κύκλος	18
4. Μέτρο τόξου και γωνίας	21
5. Τεθλασμένη γραμμή – Πολύγωνο – Στοιχεία πολυγώνου	25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΤΡΙΓΩΝΑ

6. Στοιχεία και είδη τριγώνων – Κριτήρια ισότητας τριγώνων	30
7. Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου – Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων	54
8. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι	74
9. Συμμετρικά σχήματα	77
10. Ανισοτικές σχέσεις	81
11. Ευθεία και κύκλος	97
12. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων	103
13. Γεωμετρικές κατασκευές	110

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

14. Παράλληλες ευθείες	114
15. Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου	128
16. Άθροισμα γωνιών τριγώνου	136

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

17. Παραλληλόγραμμο	154
18. Ορθογώνιο	168
19. Ρόμβος	174
20. Τετράγωνο	180
21. Εφαρμογές των παραλληλογράμμων	187
22. Βαρύκεντρο – Ορθόκεντρο τριγώνου	198
23. Ιδιότητα ορθογώνιου τριγώνου	205
24. Τραπεζίο	221

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

25. Εγγεγραμμένη γωνία	244
26. Εγγεγραμμένα και Εγγράψιμα τετράπλευρα	258
27. Γεωμετρικοί τόποι και κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων	271

ΘΕΜΑΤΑ και ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ 278 |

• Λύσεις των Ασκήσεων	300
• Λύσεις των Ασκήσεων του σχολικού βιβλίου	362

6

- Στοιχεία και είδη τριγώνων
- Κριτήρια ισότητας τριγώνων

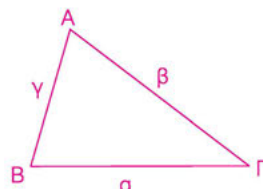
Στοιχεία τριγώνου

Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$.

- **Κορυφές** του τριγώνου λέγονται τα σημεία A, B, Γ .
- **Πλευρές** του τριγώνου λέγονται τα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma A$.

Οι πλευρές του συμβολίζονται και με:

$$\alpha = B\Gamma, \beta = A\Gamma, \gamma = AB$$



- **Γωνίες** του τριγώνου λέγονται οι γωνίες: $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$, $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$, $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$.
Οι γωνίες του συμβολίζονται και με $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.
- **Κύρια στοιχεία** ενός τριγώνου λέγονται οι πλευρές του και οι γωνίες του.
- **Περίμετρος** του τριγώνου λέγεται το άθροισμα των πλευρών του και συμβολίζεται με 2τ .
Δηλαδή

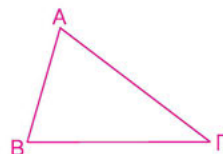
$$\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$$

Προσκείμενες, απέναντι γωνίες – Εξωτερική γωνία τριγώνου

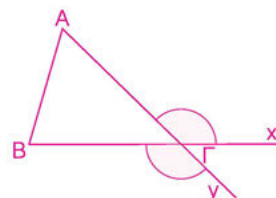
- Η γωνία ενός τριγώνου που έχει κορυφή το άκρο μιας πλευράς του λέγεται **προσκείμενη** στην πλευρά αυτή, διαφορετικά λέγεται **απέναντι** γωνία της πλευράς αυτής ή **περιεχόμενη** των δύο άλλων πλευρών.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$.

- Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες στην πλευρά $B\Gamma$.
- Η γωνία $\hat{A}$ είναι απέναντι της πλευράς $B\Gamma$.
- Η γωνία $\hat{A}$ είναι περιεχόμενη των πλευρών AB και $A\Gamma$.



- **Εξωτερική** γωνία τριγώνου λέγεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του. Για να τη σχηματίζουμε αρκεί να προεκτείνουμε μια πλευρά του τριγώνου.



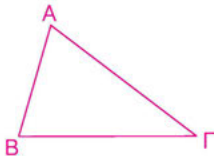
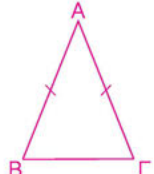
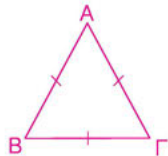
π.χ στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{A}\Gamma x$ είναι εξωτερική γωνία του.

Οι γωνίες $\hat{A}\Gamma x$ και $\hat{B}\Gamma y$ είναι ίσες (ως κατακορυφήν) και συμβολίζονται με $\hat{\Gamma}_{εξ}$.

Όμοια ορίζονται και οι $\hat{A}_{εξ}$, $\hat{B}_{εξ}$.

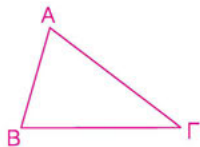
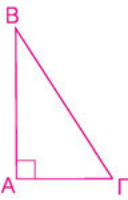
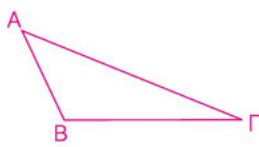
Είδη τριγώνων

- Ένα τρίγωνο ανάλογο με τις **σχέσεις των πλευρών** του, λέγεται:

 Σκαληνό, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες.	 Ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες.	 Ισόπλευρο, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
---	--	--

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AC$ η πλευρά BC λέγεται **βάση** του και το A **κορυφή** του.

- Ένα τρίγωνο, ανάλογο με το **είδος των γωνιών** του, λέγεται:

 Οξυγώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.	 Ορθογώνιο, όταν έχει μία γωνία ορθή.	 Αμβλυγώνιο, όταν έχει μία γωνία αμβλεία.
---	--	---

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα**, ενώ οι δύο άλλες λέγονται **κάθετες πλευρές** του τριγώνου.

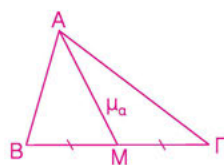
Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.

- **Διάμεσος** ενός τριγώνου, λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.

Στο διπλανό τρίγωνο το τμήμα AM είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά a του τριγώνου και συμβολίζεται με μ_a .

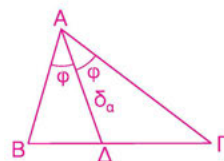
Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.



- **Διχοτόμος** μιας γωνίας ενός τριγώνου, λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.

Στο διπλανό τρίγωνο το τμήμα AD είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου και συμβολίζεται με δ_a .

Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{C}$ του τριγώνου συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.

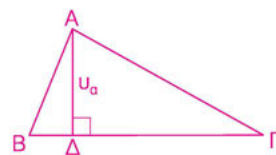


- **Ύψος** τριγώνου λέγεται το κάθετο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

Στο διπλανό τρίγωνο το τμήμα AD είναι το ύψος που φέρεται από την κορυφή A και συμβολίζεται με v_a .

Το σημείο D λέγεται **προβολή** του A πάνω στην ευθεία BC ή και **ίχνος** της καθέτου, που φέρεται από το A στην ευθεία BC .

Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές B και C συμβολίζονται με v_β και v_γ αντίστοιχα.

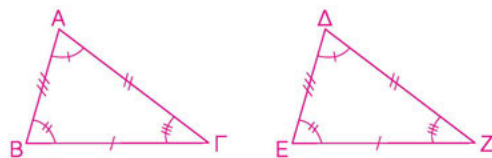


Ίσα τρίγωνα

Δύο τρίγωνα είναι **ίσα**, όταν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Άρα:

- Δύο ίσα τρίγωνα, έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.
- Σε δύο ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.
- Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες, λέγονται **αντίστοιχες** ή **ομόλογες**.

- Αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα ($\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}EZ$), τότε οι ομόλογες πλευρές είναι ίσες και οι ομόλογες γωνίες είναι ίσες. Δηλαδή ισχύουν οι ισότητες:



- $B\Gamma = EZ$, $A\Gamma = \Delta Z$, $AB = \Delta E$
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Κριτήρια ισότητας τριγώνων, είναι οι προτάσεις που μας εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους (το ένα θα είναι οπωσδήποτε πλευρά).

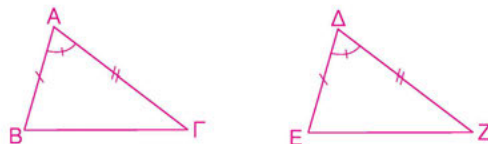
1° Κριτήριο – ΠΓΠ

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του παρακάτω σχήματος ισχύουν:

$$AB = \Delta E, \quad A\Gamma = \Delta Z \quad \text{και} \quad \hat{A} = \hat{\Delta}$$

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Στις προεκτάσεις των πλευρών BA , ΓA ενός τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε τα τμήματα $AD = A\Gamma$ και $AE = AB$.

- α. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα.
- β. Να γράψετε τις ισότητες των πλευρών και των γωνιών που προκύπτουν από τα παραπάνω ίσα τρίγωνα.

Λύση

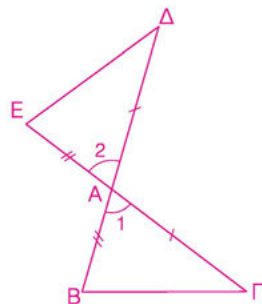
- α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE έχουν:

- $AB = AE$ (υπόθεση)
- $A\Gamma = AD$ (υπόθεση)
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (κατακορυφήν)

Σύμφωνα με το κριτήριο (ΠΓΠ) είναι ίσα.

- β. Επειδή τα τρίγωνα είναι ίσα, έχουν:

- τις αντίστοιχες πλευρές ίσες, οπότε $B\Gamma = \Delta E$ και
- τις αντίστοιχες γωνίες ίσες, οπότε $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.



Γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου

Από το 1^ο κριτήριο (ΠΓΠ) έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

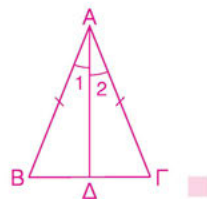
Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ έχουν:

$AB = A\Gamma$, $A\Delta$ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ),

επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.



- Από το παραπάνω πόρισμα έχουμε ότι: **Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία Δ , E αντίστοιχα, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

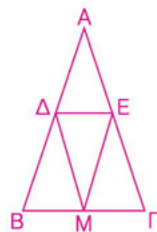
Λύση

Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\Gamma E$ έχουν:

- $B\Delta = \Gamma E$,
- $MB = M\Gamma$ (M το μέσο της $B\Gamma$)
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου).

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

Οπότε $M\Delta = ME$, άρα το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.



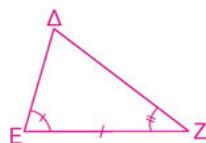
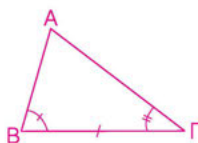
2^ο Κριτήριο – ΓΠΓ

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του παρακάτω σχήματος ισχύουν:

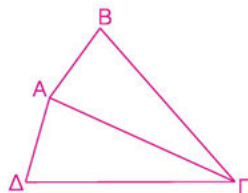
$$B\Gamma = EZ, \hat{B} = \hat{E} \text{ και } \hat{\Gamma} = \hat{Z}$$

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και η $A\Gamma$ διχοτομεί τις γωνίες του $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.

Να δείξετε ότι $\hat{B} = \hat{\Delta}$.



Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$. Αυτά έχουν:

- $A\Gamma$ κοινή πλευρά
- $\hat{B}\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta}\hat{A}\Gamma$ [$A\Gamma$: διχοτόμος]
- $\hat{B}\hat{\Gamma}A = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}A$ [ΓA : διχοτόμος]

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ) είναι ίσα. Άρα $\hat{B} = \hat{\Delta}$.

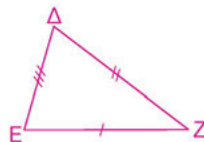
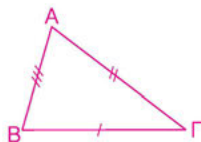
3° Κριτήριο - ΠΠΠ

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του παρακάτω σχήματος ισχύουν:

$$B\Gamma = EZ, \quad A\Gamma = \Delta Z \quad \text{και} \quad AB = \Delta E.$$

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Στο εσωτερικό ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ με βάση τη $B\Gamma$ θεωρούμε ένα σημείο M , ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

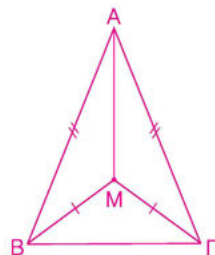
- Τα τρίγωνα MAB και $MA\Gamma$ είναι ίσα.
- Οι γωνίες $\hat{A}MB$ και $\hat{A}M\Gamma$ είναι ίσες.

Λύση

α. Τα τρίγωνα MAB και $MA\Gamma$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$ (υπόθεση)
- $MA = MA$ (κοινή)
- $AB = A\Gamma$ ($\Delta AB\Gamma$: ισοσκελές)

Σύμφωνα με το κριτήριο (ΠΠΠ) τα τρίγωνα είναι ίσα.



- Επειδή τα τρίγωνα MAB και $MA\Gamma$ είναι ίσα, θα έχουν τις ομόλογες γωνίες ίσες. Οπότε $\hat{A}MB = \hat{A}M\Gamma$.

Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

Από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων που είναι θεωρήματα, έχουμε τα παρακάτω πορίσματα:

Πόρισμα Ι

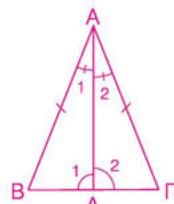
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του $\hat{A}$. Τα τρίγωνα ADB και $AD\Gamma$ έχουν:

$AB = A\Gamma$, AD κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα. Άρα

- $BD = D\Gamma$, οπότε η AD είναι διάμεσος
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ και επειδή $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$, προκύπτει ότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 90^\circ$, οπότε το AD είναι ύψος.



Πόρισμα ΙΙ

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

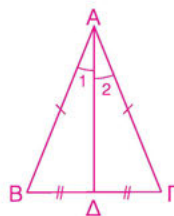
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και AD η διάμεσός του.

Τα τρίγωνα ABD και $A\Gamma D$ έχουν:

$AB = A\Gamma$, AD κοινή και $BD = D\Gamma$ (ΠΠΠ),

επομένως είναι ίσα. Οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, άρα η AD είναι διχοτόμος,

επομένως και ύψος (αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές).



Αν Δ σημείο της διαμέσου AM ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta BA} = \hat{\Delta \Gamma A}$.

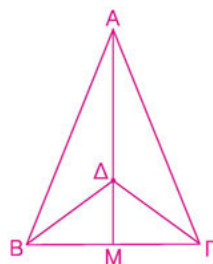
Λύση

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM διάμεσος, είναι και διχοτόμος.

Τα τρίγωνα ABD και $A\Gamma D$ έχουν:

$AB = A\Gamma$, AD κοινή πλευρά, $\hat{B\hat{A}D} = \hat{\Gamma\hat{A}D}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\hat{\Delta BA} = \hat{\Delta \Gamma A}$.

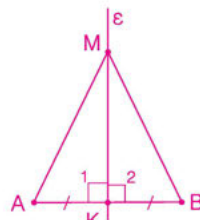


Χαρακτηριστική ιδιότητα μεσοκάθετου

- Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντίστροφα:
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

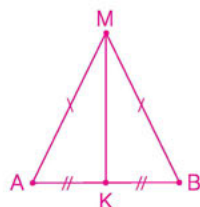
Απόδειξη

- Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος AB και M ένα σημείο της. Τα τρίγωνα MKA και MKB έχουν:
 - $KA = KB$
 - MK κοινή
 - $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$



Επομένως είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $MA = MB$.

- Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB , M ένα σημείο, ώστε $MA = MB$ και K το μέσο του AB . Τότε το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές και η MK είναι διάμεσός του, οπότε είναι και ύψος του. Δηλαδή η MK είναι μεσοκάθετος του AB . Οπότε:



Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

Αν οι μεσοκάθετοι ε_1 , ε_2 των πλευρών AB , $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται στο O , να δείξετε ότι το O ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς $ΑΓ$.

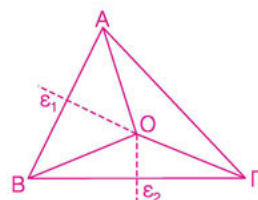
Λύση

Επειδή το O ανήκει στη μεσοκάθετο:

- ε_1 της πλευράς AB , έχουμε $OA = OB$, (1)
- ε_2 της πλευράς $B\Gamma$, έχουμε $OB = OG$, (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $OA = OG$.

Άρα το O ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς $ΑΓ$.



Τόξα – Χορδές κύκλου

- Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.
- Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων ή μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

- Έστω $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (O, ρ) .

Τότε είναι $\hat{AOB} = \hat{GO\Delta}$. Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν:

- $OA = O\Gamma (= \rho)$
- $OB = O\Delta (= \rho)$
- $\hat{AOB} = \hat{GO\Delta}$

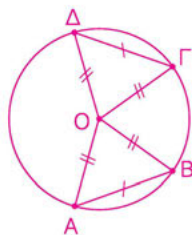
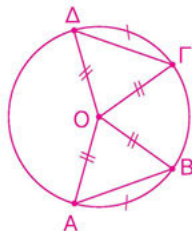
Επομένως είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$.

- Έστω δύο τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (O, ρ) μικρότερα του ημικυκλίου με $AB = \Gamma\Delta$.

Τότε τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν:

$OA = O\Gamma (= \rho)$, $OB = O\Delta (= \rho)$ και $AB = \Gamma\Delta$ (ΠΠΠ).

Άρα είναι ίσα, οπότε $\hat{AOB} = \hat{GO\Delta}$, επομένως $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.



Στο διπλανό σχήμα το σημείο M είναι το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$ και το σημείο N ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .

Να αποδείξετε ότι:

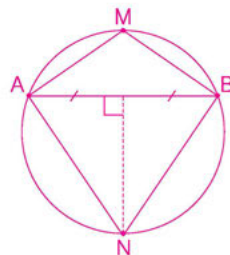
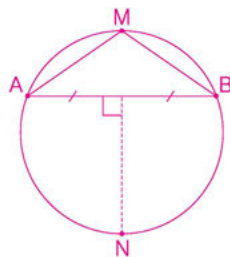
- Το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .
- Το σημείο N είναι το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$.

Λύση

- Επειδή το M είναι το μέσο του $\widehat{AB}$, τα τόξα $\widehat{MA}$ και $\widehat{MB}$ είναι ίσα. Οπότε και οι χορδές τους είναι ίσες, άρα $MA = MB$. Επομένως το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .

- Επειδή το σημείο N ανήκει στη μεσοκάθετο του AB , προκύπτει ότι $NA = NB$.

Επομένως $\widehat{NA} = \widehat{NB}$, οπότε το N είναι το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$.



Συνοπτική θεωρία

► Δύο τρίγωνα είναι **ίσα** όταν έχουν:

- Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).
- Μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ).
- Και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

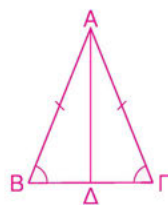
► Στο **ισοσκελές** τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

Δηλαδή σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε

$$\beta = \gamma \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$$

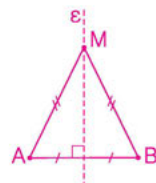
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος, οπότε είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$.



► • Αν η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB , τότε

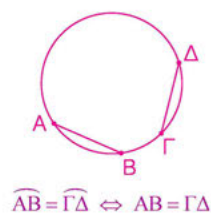
$$M \in \varepsilon \Leftrightarrow MA = MB$$

- Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του.



► Στον **κύκλο**:

Αν δύο τόξα είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα.

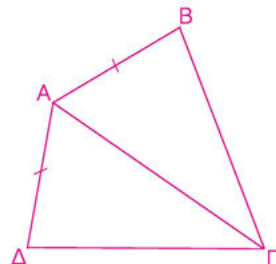


ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ)

Σχόλιο Οι ισότητες τριγώνων χρησιμοποιούνται για να αποδείξουμε ισότητες τμημάτων ή γωνιών.

- 1.** Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και τη διαγώνιο $A\Gamma$ να διχοτομεί τη γωνία του $\hat{A}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \hat{\Delta}$.



Λύση

[Για να αποδείξουμε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ είναι ίσες, αρκεί να βρούμε δύο τρίγωνα που το ένα να έχει γωνία τη $\hat{B}$, το άλλο γωνία τη $\hat{\Delta}$ και συγκρίνοντάς τα, να δείξουμε ότι είναι ίσα.]

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:

- $AB = A\Delta$ (υπόθεση)
- $A\Gamma$ κοινή
- $\hat{B}\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta}\hat{A}\Gamma$ ($A\Gamma$ διχοτόμος)

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), επομένως $\hat{B} = \hat{\Delta}$.

- 2.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε τη διάμεσο AM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Να αποδείξετε ότι:

α. $AB = \Gamma\Delta$

β. τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα.

Λύση

- α.** Τα τρίγωνα AMB και $\Gamma M\Delta$ έχουν:

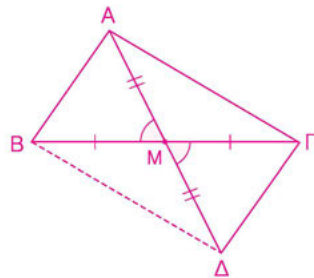
- $MB = M\Gamma$ (AM διάμεσος)
- $\hat{A}MB = \hat{\Gamma}M\Delta$ (ως κατακορυφήν)
- $AM = M\Delta$ (από υπόθεση)

Από το κριτήριο (ΠΓΠ) τα τρίγωνα AMB και $\Gamma M\Delta$ είναι ίσα, άρα $AB = \Gamma\Delta$.

- β.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ έχουν:

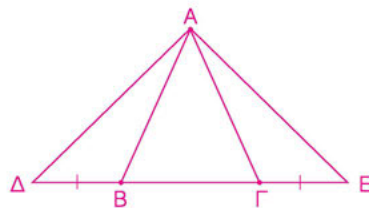
- $B\Gamma$ κοινή πλευρά
- $AB = \Gamma\Delta$ (από το ερώτημα **α.**)
- $\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}B\Gamma$ (αφού $\hat{A}MB = \hat{\Gamma}M\Delta$)

Από το κριτήριο (ΠΓΠ) είναι ίσα.



Γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου

3. Στις προεκτάσεις της βάσης $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε τα τμήματα $BD = \Gamma E$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.



Λύση

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$), έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε και $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$, ως παραπληρώματα ίσων γωνιών.

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $BD = \Gamma E$
- $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$

Επομένως είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $AD = AE$.

Οπότε το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.

2^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ)

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το σημείο A . Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι του BD και ΓE είναι ίσες.

Λύση

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο A , έχουμε $AB = A\Gamma$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

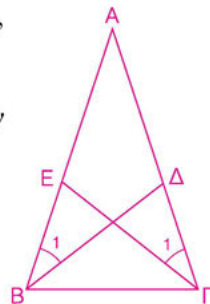
Αφού οι BD και ΓE είναι διχοτόμοι των ίσων γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ θα είναι ίσα και τα μισά των γωνιών αυτών.

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$, έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $\hat{A}$ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $BD = \Gamma E$.



3^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

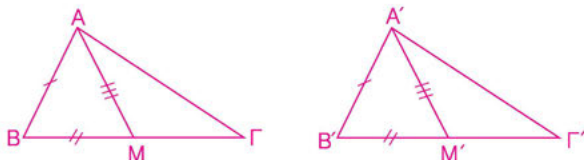
5. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ και οι διάμεσοί τους AM , $A'M'$.
Αν $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $AM = A'M'$, να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{B} = \hat{B}'$

β. τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

Λύση

- α. Επειδή $B\Gamma = B'\Gamma'$ και AM , $A'M'$ διάμεσοι, θα είναι $BM = B'M'$ ως μισά ίσων τμημάτων.



Τα τρίγωνα ABM και $A'B'M'$ έχουν:

$$AB = A'B', \quad BM = B'M' \quad \text{και} \quad AM = A'M'$$

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $\hat{B} = \hat{B}'$.

- β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

$$AB = A'B', \quad B\Gamma = B'\Gamma' \quad \text{και} \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad [\text{από το α. ερώτημα}]$$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

Ισοσκελές – διχοτόμος

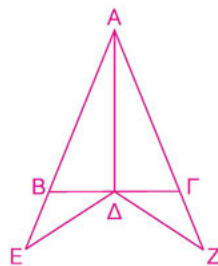
6. Έστω $AB\Gamma$ ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση τη $B\Gamma$ και AD η διχοτόμος του. Στις προεκτάσεις των AB , $A\Gamma$ θεωρούμε τα ίσα τμήματα BE , ΓZ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $DE = DZ$.

Λύση

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AD είναι διχοτόμος, είναι και διάμεσος, οπότε $DB = D\Gamma$.

Τα τρίγωνα BDE και ΓDZ έχουν:

- $DB = D\Gamma$
- $BE = \Gamma Z$
- $\hat{DBE} = \hat{D\Gamma Z}$ (παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$)



Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $DE = DZ$.

Ισοσκελής – διάμεσος

7. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών BA , GA ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε τα ίσα τμήματα AD , AE . Αν M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και η MA τέμνει τη DE στο K , να αποδείξετε ότι:

α. $\widehat{MAB} = \widehat{MAG}$

β. $AK \perp DE$

Λύση

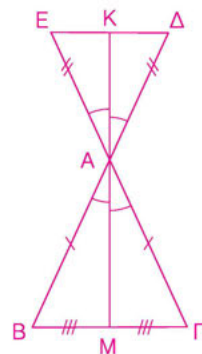
- α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM είναι διάμεσος, θα είναι και διχοτόμος.

Οπότε $\widehat{MAB} = \widehat{MAG}$.

- β. Επειδή οι γωνίες $\widehat{MAB}$ και $\widehat{MAG}$ είναι ίσες, θα είναι ίσες και οι κατακορυφήν τους, δηλαδή $\widehat{KAD} = \widehat{KEA}$.

Οπότε η AK είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου ADE .

Άρα η AK θα είναι και ύψος, επομένως $AK \perp DE$.



Μεσοκάθετος

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και η διχοτόμος του AD . Αν η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την AD στο M , να δείξετε ότι το M ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς AG .

Λύση

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AD είναι διχοτόμος θα είναι διάμεσος και ύψος.

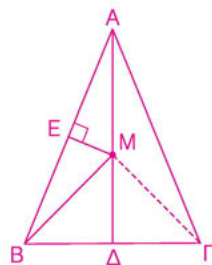
Άρα η AD είναι μεσοκάθετος της $B\Gamma$.

Το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο:

- της πλευράς $B\Gamma$, οπότε $MB = M\Gamma$, (1).
- της πλευράς AB , οπότε $MA = MB$, (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $MA = M\Gamma$.

Άρα το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς AG .



Σχόλιο

Για να αποδείξουμε ότι μία ευθεία είναι η μεσοκάθετος ενός τμήματος, αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο σημεία της ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

- 9.** Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, ώστε $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν M σημείο της ευθείας $A\Gamma$, να δείξετε ότι $MB = M\Delta$.

Λύση

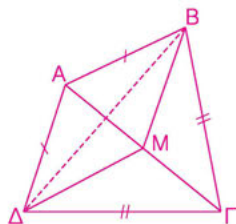
Επειδή:

- $AB = A\Delta$, το A ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$.
- $\Gamma B = \Gamma\Delta$, το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$.

Άρα η ευθεία $A\Gamma$ είναι η μεσοκάθετος του $B\Delta$.

Επειδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$, έχουμε

$$MB = M\Delta$$



- 10.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το A και $A\Delta$ διχοτόμος του. Αν E, Z σημεία της διχοτόμου του $A\Delta$, να δείξετε ότι

$$\hat{EBZ} = \hat{E\Gamma Z}$$

Λύση

Επειδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, θα είναι ύψος και διάμεσος.

Οπότε $A\Delta \perp B\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$.

Άρα η ευθεία $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$, επομένως

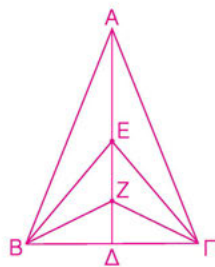
$$EB = E\Gamma \text{ και } ZB = Z\Gamma$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα EBZ και $E\Gamma Z$. Αυτά έχουν:

- $EB = E\Gamma$
- $ZB = Z\Gamma$
- EZ κοινή

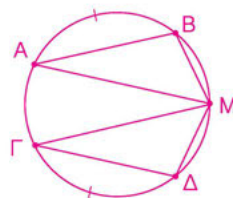
Σύμφωνα με το κριτήριο (ΠΠΠ) είναι ίσα.

Άρα $\hat{EBZ} = \hat{E\Gamma Z}$.



Τόξα – Χορδές κύκλου

11. Στο διπλανό σχήμα τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα και το σημείο M είναι μέσο του τόξου $\widehat{B\Delta}$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABM και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα.



Λύση

Επειδή:

- $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ έχουμε $AB = \Gamma\Delta$
- Το M είναι μέσο του τόξου $\widehat{B\Delta}$, έχουμε $\widehat{MB} = \widehat{M\Delta}$, οπότε $MB = M\Delta$.

Είναι $\widehat{ABM} = \widehat{AB} + \widehat{BM} = \widehat{\Gamma\Delta} + \widehat{M\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta M}$, οπότε $AM = \Gamma M$.

Τα τρίγωνα ABM και $\Gamma\Delta M$ έχουν:

$$AB = \Gamma\Delta, \quad MB = M\Delta \quad \text{και} \quad AM = \Gamma M$$

οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

Β' ΟΜΑΔΑΣ

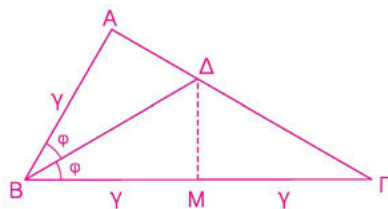
12. Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 2\gamma$. Αν η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνονται στο σημείο Δ της $A\Gamma$, να δείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

Λύση

Έστω $M\Delta$ η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$.

Είναι:

- $\hat{A\Delta B} = \hat{\Delta B \Gamma} = \varphi$
- $\hat{\Delta M B} = 90^\circ$ και
- $\alpha = 2\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \gamma \Leftrightarrow MB = \gamma$



Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta M$ έχουν:

$$BA = BM, \quad B\Delta \text{ κοινή και } \hat{A\Delta B} = \hat{\Delta B M}$$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta M B} = 90^\circ$.

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση τη $B\Gamma$. Στις πλευρές του AB και $A\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι, ώστε $A\Delta = AE$. Αν O το σημείο τομής των BE και $\Gamma\Delta$, να δείξετε ότι:

α. $\hat{A}\Delta\Gamma = \hat{A}\epsilon B$

β. Τα τρίγωνα $OB\Delta$ και $OE\Gamma$ είναι ίσα.

γ. Η ευθεία AO είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$.

Λύση

α. Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $AE = A\Delta$
- $\hat{A}$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\hat{A}\Delta\Gamma = \hat{A}\epsilon B$.

β. Τα τρίγωνα $OB\Delta$ και $OE\Gamma$ έχουν:

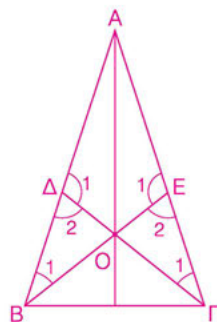
- $\Delta B = \Gamma E$ (ως διαφορές ίσων τμημάτων)
- $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2$ (ως παραπληρώματα των ίσων γωνιών $\hat{\Delta}_1, \hat{E}_1$ από το **α.** ερώτημα)
- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (από το **α.** ερώτημα)

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).

γ. Είναι $AB = A\Gamma$ και $OB = O\Gamma$, αφού τα τρίγωνα $OB\Delta$ και $OE\Gamma$ είναι ίσα.

Οπότε τα A και O ανήκουν στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$.

Άρα η ευθεία AO είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$.

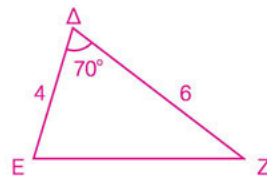
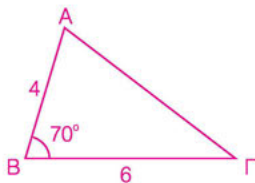


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

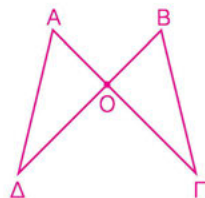
1^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ)

1. Να εξηγήσετε, γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες:

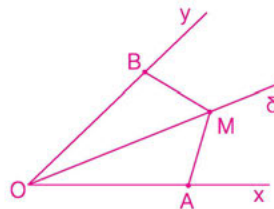


• $A\Gamma = \dots\dots$ • $\hat{E} = \dots\dots$ • $\hat{Z} = \dots\dots$

2. Στο διπλανό σχήμα είναι $OA = OB$ και $OG = OD$.
Να αποδείξετε ότι $AD = BG$.



3. Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και η διχοτόμος της Od . Θεωρούμε σημείο M της Od και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:



α. $MA = MB$

β. Η ημιευθεία MO είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{AMB}$.

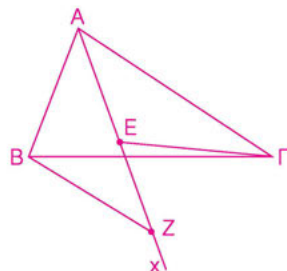
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α. $BE = \Gamma\Delta$

β. $B\Delta = \Gamma E$

5. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και Ax η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, στην οποία θεωρούμε τμήματα $AE = AB$ και $AZ = A\Gamma$.

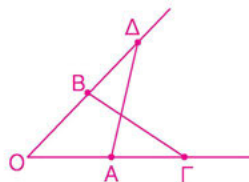
Να αποδείξετε ότι $BZ = \Gamma E$.



6. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γωνία $\hat{O}$ και ισχύει

$$OA = OB, \quad OG = OD$$

Να αποδείξετε ότι $AD = BG$.



7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το σημείο A .

Να δείξετε ότι οι διάμεσοί του BM και ΓN είναι ίσες.

8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, και στην προέκταση της διαμέσου του BM , θεωρούμε τμήμα $\Delta M = BM$. Να αποδείξετε ότι:

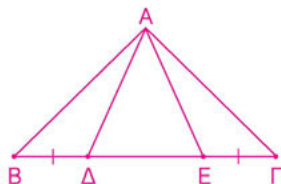
α. $AB = \Gamma\Delta$

β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι ίσα.

Γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία Δ και E έτσι, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = A E$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E M$ είναι ισοσκελές.

11. Στις προεκτάσεις της βάσης $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε τα τμήματα $B\Delta = \Gamma E$ και στις προεκτάσεις των AB , $A\Gamma$ τα τμήματα $BZ = \Gamma H$. Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = E H$.

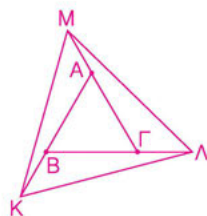
12. Δίνεται κύκλος κέντρου O και χορδή του AB . Προεκτείνουμε την AB προς τα δύο άκρα, κατά ίσα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\hat{O\Gamma A} = \hat{O\Delta B}$.

13. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Αν $BK = \Gamma\Lambda = AM$, να αποδείξετε ότι:

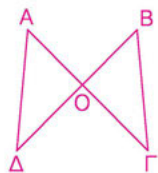
α. Τα τρίγωνα AKM και $BK\Lambda$ είναι ίσα.

β. Το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο.



2° Κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ)

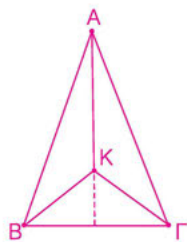
- 14.** Στο διπλανό σχήμα, έχουμε $OA = OB$ και $\widehat{O\Delta\Delta} = \widehat{OB\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Gamma$.



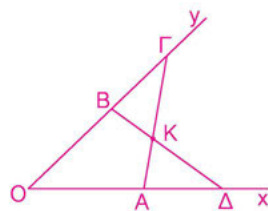
- 15.** Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\gamma = \gamma'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$.
Να δείξετε ότι $\delta_a = \delta_{a'}$.

3° Κριτήριο ισότητας τριγώνων

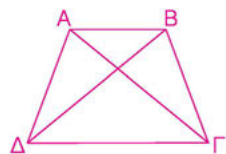
- 16.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.
 - Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$.
 - Η προέκταση της AK διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$ του τριγώνου $BK\Gamma$.



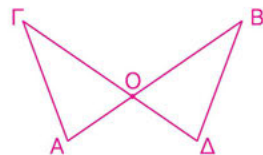
- 17.** Στις πλευρές Ox , Oy μιας γωνίας $\chi\hat{O}y$ θεωρούμε τα τμήματα $OA = OB$ και στο εσωτερικό της ένα σημείο K , ώστε $KA = KB$. Αν οι KA , KB τέμνουν τις Oy , Ox στα σημεία Γ , Δ αντίστοιχα να δείξετε ότι:
- Η OK διχοτομεί τη γωνία $\hat{O}$.
 - $A\Delta = B\Gamma$.



- 18.** Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
- $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta}$
 - $\widehat{\Delta AB} = \widehat{A\Gamma B}$



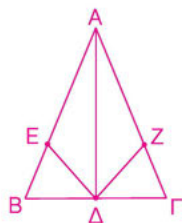
- 19.** Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Gamma = B\Delta$.
Να δείξετε ότι $\widehat{O\Gamma A} = \widehat{O\Delta A}$.



Ισοσκελές – διχοτόμος

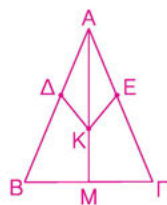
20. Στην προέκταση της διχοτόμου AD ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) θεωρούμε τμήμα $DE = DB$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{DE\Gamma} = \widehat{D\Gamma E}$.

21. Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AD διχοτόμος του. Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ θεωρούμε τα τμήματα $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο DEZ είναι ισοσκελές.

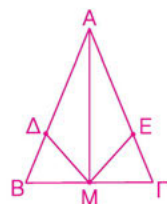


Ισοσκελές – διάμεσος

22. Στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε τα τμήματα $AD = AE$ αντίστοιχα. Αν K σημείο της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $KD = KE$.



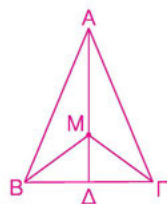
23. Στις ίσες πλευρές AB και $A\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου θεωρούμε τμήματα $AD = AE$ αντίστοιχα. Αν M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{DME}$.



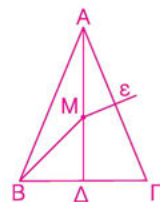
Μεσοκάθετος

24. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M της διχοτόμου του AD . Να αποδείξετε ότι:

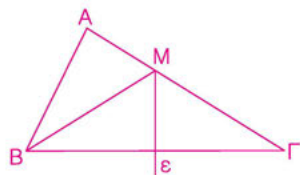
- α. Η ευθεία AD είναι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$.
β. $\widehat{ABM} = \widehat{A\Gamma M}$



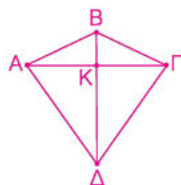
25. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διχοτόμος του AD . Αν η μεσοκάθετος ε της πλευράς $A\Gamma$ τέμνει την AD στο M , να δείξετε ότι το M ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς AB .



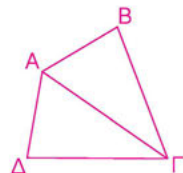
26. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Αν η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο M , να δείξετε ότι η BM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$



27. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

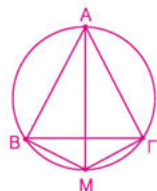


28. Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $A\Gamma$ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$. Να δείξετε ότι $A\Gamma \perp B\Delta$.



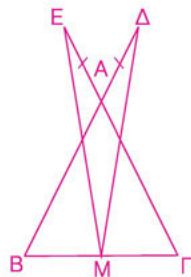
Τόξα – Χορδές κύκλου

29. Θεωρούμε ένα κύκλο με κέντρο O και M το μέσο ενός τόξου του AB . Να δείξετε ότι η MO διχοτομεί τη γωνία $\hat{AMB}$.
30. Στο διπλανό σχήμα τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{A\Gamma}$ είναι ίσα και το M είναι μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABM και $A\Gamma M$ είναι ίσα.



Β' ΟΜΑΔΑΣ

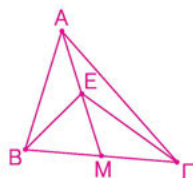
31. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών BA , ΓA ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε τα τμήματα $A\Delta = A\epsilon$ αντίστοιχα. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές.



32. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2BE$ να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{A\epsilon B} = \hat{E\Gamma M}$

β. $AB = E\Gamma$



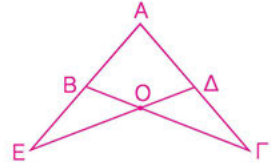
- 33.** Στο διπλανό σχήμα έχουμε $AD = AB$ και $AE = AG$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{E} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}O = \hat{E}O$

β. $OB = OD$

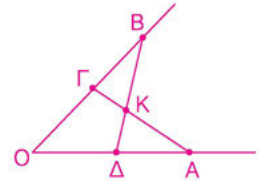
γ. η AO είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



- 34.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γωνία $\hat{O}$ και στις πλευρές της τα σημεία A, B , ώστε $OA = OB$ και τα σημεία Γ, Δ , ώστε $O\hat{A}\Gamma = O\hat{B}\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α. $OG = OD$

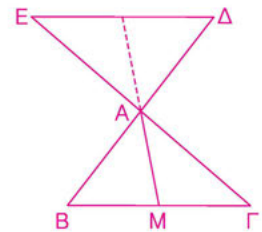
β. $KA = KB$



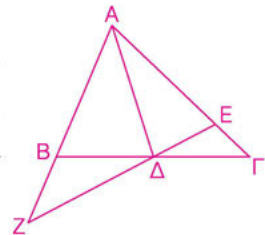
- 35.** Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και GA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $AD = AB$ και $AE = AG$. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα.

β. Η προέκταση της διαμέσου AM προς το μέρος της κορυφής A διχοτομεί την πλευρά ED του τριγώνου ΔAE .



- 36.** Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < AG$) και AD διχοτόμος του. Στην πλευρά AG παίρνουμε σημείο E , ώστε $AE = AB$. Αν η DE τέμνει την AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $BZ = GE$.



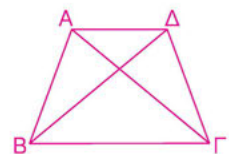
- 37.** Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A'}$, $\beta = \beta'$ και $\delta_a = \delta_{a'}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma'}$

β. $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$

- 38.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο BM κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

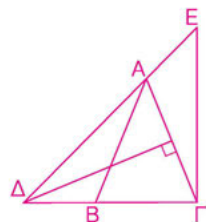
- 39.** Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = \Gamma\Delta$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.



- 40.** Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), η μεσοκάθετος της πλευράς $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της ΓB στο Δ . Προεκτείνουμε τη ΔA κατά τμήμα $AE = \Delta B$.

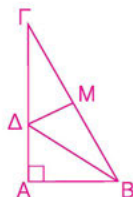
Να δείξετε ότι:

- α.** το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές
β. το τρίγωνο $\Gamma \Delta E$ είναι ισοσκελές.



- 41.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\alpha = 2\gamma$. Αν $B\Delta$ διχοτόμος του τριγώνου και M το μέσο της $B\Gamma$, να δείξετε ότι:

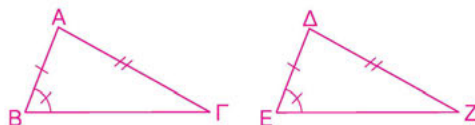
- α.** $\Delta M \perp B\Gamma$ **β.** $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 42.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

- α.** Τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι υποχρεωτικά ίσα.



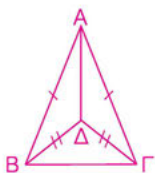
- β.** Η διχοτόμος από την κορυφή ισοσκελούς τριγώνου είναι μεσοκάθετος της βάσης του.

- γ.** Στο σχήμα 1. είναι $\Delta D \perp B\Gamma$.

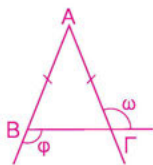
- δ.** Στο σχήμα 2. είναι $\varphi = \omega$.

- ε.** Στο σχήμα 3. είναι $AB < \Gamma \Delta$.

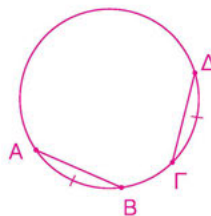
- στ.** Στο σχήμα 4. είναι $\varphi = \omega$.



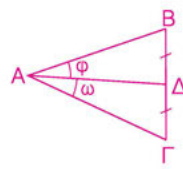
σχ. 1.



σχ. 2.



σχ. 3.



σχ. 4.

α.	β.	γ.	δ.	ε	στ.

16

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Απόδειξη

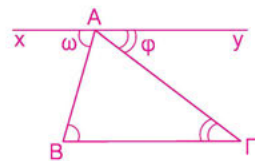
Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$. Θα δείξουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ } \angle$.

Από το A φέρουμε ευθεία $xy \parallel B\Gamma$.

Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων xy και $B\Gamma$ με τέμνουσες τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Είναι $\omega + \hat{A} + \varphi = 2 \text{ } \angle$ και λόγω των (1), (2) έχουμε

$$\hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ } \angle \quad \text{ή} \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ } \angle$$



Πόρισμα

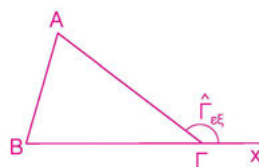
Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$. Θα δείξουμε ότι $\hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = \hat{A} + \hat{B}$.

Έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ } \angle$ και $\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = 2 \text{ } \angle$

Άρα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_{\text{εξ}}$, οπότε $\hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = \hat{A} + \hat{B}$.



Πορίσματα

- i. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
- ii. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
- iii. Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .

Άθροισμα γωνιών κυρτού n - γώνου

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού n - γώνου είναι $2n - 4$ ορθές.

Απόδειξη

Έστω το n - γωνο $A_1A_2A_3\dots A_n$ και το σημείο O εσωτερικό του n - γώνου.

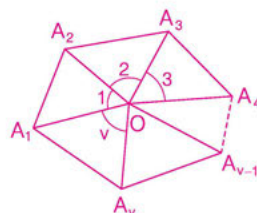
Αν ενώσουμε το O με τις κορυφές του σχηματίζονται n τρίγωνα.

Το άθροισμα των γωνιών των n τριγώνων είναι $2n$ ορθές.

Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \dots + \hat{O}_n = 4$ ορθές,

έχουμε το άθροισμα των γωνιών του n -γώνου:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \dots + \hat{A}_n = (2n - 4) \text{ ορθές}$$



- Το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι $(2 \cdot 4 - 4) \text{ ορθές} = 4 \text{ } \perp = 360^\circ$.

Πόρισμα

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού n - γώνου είναι 4 ορθές.

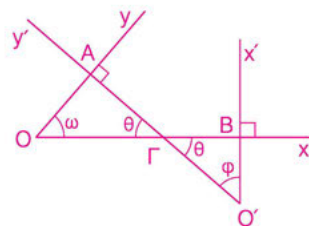
Γωνίες με πλευρές κάθετες

Θεώρημα

Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{x'O'y'}$ είναι οξείες και έχουν πλευρές κάθετες, αφού $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$.

Οπότε $\phi = 90^\circ - \theta = \omega$.



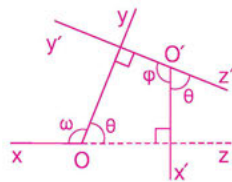
Πορίσματα

- Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

Δηλαδή $\phi = \omega$.

- Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες, αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

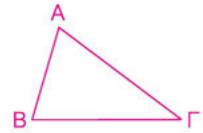
Δηλαδή $\phi + \theta = 180^\circ$.



Παρατηρήσεις

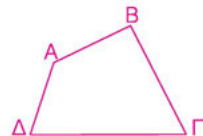
1. ► Κάθε γωνία τριγώνου $AB\Gamma$ εκφράζεται ως συνάρτηση του αθροίσματος των δύο άλλων γωνιών του και αντίστροφα.

$$\text{Είναι: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) \\ \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} \end{cases}$$



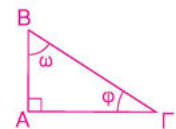
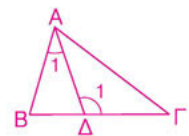
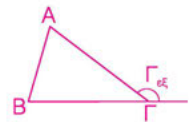
- Το άθροισμα των δύο γωνιών ενός τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ εκφράζεται ως συνάρτηση του αθροίσματος των δύο άλλων γωνιών του.

$$\text{Είναι: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 360^\circ - (\hat{\Gamma} + \hat{\Delta})$$



2. Αν μία γωνία είναι:

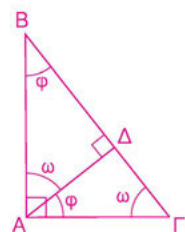
- γωνία τριγώνου, τότε την εκφράζουμε συναρτήσει των δύο άλλων γωνιών του π.χ. στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma})$.
- εξωτερική γωνία τριγώνου, την εκφράζουμε συναρτήσει των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του π.χ. $\hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = \hat{A} + \hat{B}$.
- γωνία τριγώνου και εξωτερική γωνία άλλου τριγώνου, τότε την παίρνουμε ως εξωτερική π.χ. $\hat{\Delta}_1 = \hat{B} + \hat{A}_1$.
- οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου την εκφράζουμε συναρτήσει της άλλης οξείας γωνίας π.χ. $\omega = 90^\circ - \varphi$.



3. ► Σε ορθογώνιο τρίγωνο το ύψος προς την υποτείνουσα χωρίζει την ορθή γωνία σε δύο γωνίες ίσες με τις οξείες γωνίες του τριγώνου (αφού είναι συμπληρωματικές ίσων γωνιών).

Είναι:

- $\hat{B} = \hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$, ως συμπληρωματικές της $\hat{\Gamma}$ στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ αντίστοιχα.
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta A B} = 90^\circ - \hat{B}$, ως παραπληρωματικές της $\hat{B}$ στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A B$ αντίστοιχα.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ η εξωτερική γωνία της $\hat{\Gamma}$ είναι 126° και η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια της $\hat{A}$.

α. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου.

β. Αν I το έγκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να βρείτε τη γωνία $B\hat{I}\Gamma$.

Λύση

- α. Επειδή η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, έχουμε:

$$\hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow 126^\circ = \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 126^\circ, \quad (1)$$

Είναι $\hat{B} = 2\hat{A}$.

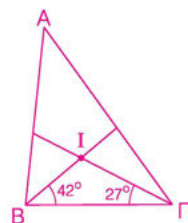
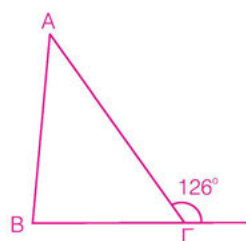
$$\text{Οπότε η } (1) \Leftrightarrow \hat{A} + 2\hat{A} = 126^\circ \Leftrightarrow 3\hat{A} = 126^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 42^\circ$$

$$\text{Άρα } \hat{B} = 2 \cdot 42^\circ = 84^\circ.$$

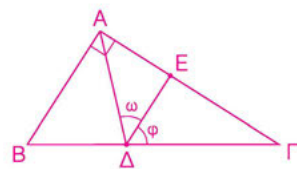
$$\text{Είναι } \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ.$$

- β. Το έγκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } B\hat{I}\Gamma &= 180^\circ - \hat{I}B\Gamma - \hat{I}\Gamma B = 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \\ &= 180^\circ - 42^\circ - 27^\circ = 111^\circ \end{aligned}$$



2. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), τη διχοτόμο του AD και $DE \parallel AB$. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι κατά 20° μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, να βρείτε τις γωνίες ω και φ .



Λύση

Έχουμε $DE \parallel AB$, οπότε:

- $\omega = \hat{D}\hat{A}B = 45^\circ$ (αφού η AD είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$)
- $\varphi = \hat{B}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

$$\text{Έχουμε } \hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B} = 20^\circ + 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow 2\hat{B} = 110^\circ \Rightarrow \hat{B} = 55^\circ.$$

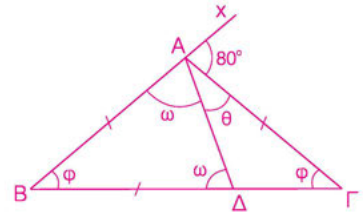
$$\text{Άρα } \varphi = 55^\circ.$$

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία $\hat{A}_{\varepsilon\zeta} = 80^\circ$ και σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε $BA = B\Delta$. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

Λύση

► Επειδή:

- $AB = A\Gamma$, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \varphi$
- $BA = B\Delta$, έχουμε $\hat{B\Delta A} = \hat{BA\Delta} = \omega$.



- • Έχουμε $\hat{A}_{\varepsilon\zeta} = 80^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 80^\circ \Rightarrow \varphi + \varphi = 80^\circ \Rightarrow 2\varphi = 80^\circ \Rightarrow \varphi = 40^\circ$, (1).
- Στο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι:

$$\varphi + 2\omega = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 40^\circ + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow 2\omega = 140^\circ \Rightarrow \omega = 70^\circ$$

Οπότε: • $\hat{A\Delta\Gamma} = 180^\circ - \omega = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

• $\hat{BA\Gamma} = 180^\circ - \hat{A}_{\varepsilon\zeta} \Rightarrow \omega + \theta = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow 70^\circ + \theta = 100^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$.

Άρα $\hat{\Delta A\Gamma} = 30^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ και $\hat{A\Delta\Gamma} = 110^\circ$.

4. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = A\Gamma = AB$ και $\hat{\Gamma A x} = 105^\circ$. Να υπολογίσετε τη γωνία Δ .

Λύση

► Επειδή:

- $AB = A\Gamma$, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \varphi$.
- $AB = B\Delta$, έχουμε $\hat{\Delta} = \hat{BA\Delta} = \omega$.

- • Η γωνία $\hat{\Gamma A x}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, οπότε

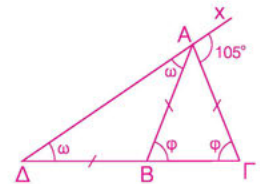
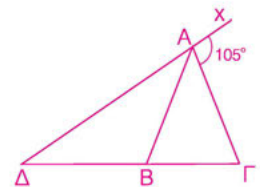
$$\hat{\Gamma A x} = \hat{\Delta} + \hat{\Gamma} \Rightarrow 105^\circ = \omega + \varphi \Rightarrow \omega + \varphi = 105^\circ, \quad (1)$$

- Η γωνία $\hat{AB\Gamma}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta B$, οπότε

$$\hat{AB\Gamma} = \hat{\Delta} + \hat{BA\Delta} \Rightarrow \varphi = \omega + \omega \Rightarrow \varphi = 2\omega, \quad (2)$$

Η (1) $\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \omega + 2\omega = 105^\circ \Rightarrow 3\omega = 105^\circ \Rightarrow \omega = \frac{105^\circ}{3} \Rightarrow \omega = 35^\circ$

Άρα $\hat{\Delta} = 35^\circ$.



- 5.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M της υποτείνουσάς του $B\Gamma$, ώστε $MA = MB$. Να δείξετε ότι το M είναι το μέσο της $B\Gamma$.

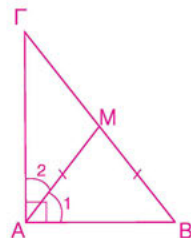
Λύση

Επειδή $MA = MB$, έχουμε $\hat{B} = \hat{A}_1$.

Είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - \hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

Άρα $MA = M\Gamma$.

Επομένως $MB = M\Gamma$, άρα το M είναι το μέσο της $B\Gamma$.



Σχόλιο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}$.

- 6.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του $A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma - \hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

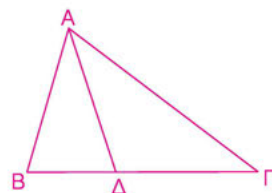
β. $\hat{A}\hat{\Delta}B = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

Λύση

- α.** Οι γωνίες $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ και $\hat{A}\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερικές στα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$, οπότε:

• $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2}$

• $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2}$



Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε

$$\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma - \hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$$

β. Έχουμε $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2} = \hat{\Gamma} + 90^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}$

$$\left[\frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} \right]$$

$$= 90^\circ + \hat{\Gamma} - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ + \frac{2\hat{\Gamma} - (\hat{B} + \hat{\Gamma})}{2}$$

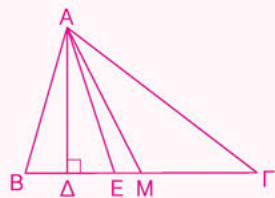
$$= 90^\circ + \frac{\hat{\Gamma} - \hat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

Σχόλιο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, αποδεικνύεται ότι:

- Το ύψος $AD = v_a$ σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μικρότερη γωνία.
- Η διάμεσος $AM = \mu_a$ σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μεγαλύτερη γωνία.
- Η διχοτόμος $AE = \delta_a$ βρίσκεται μεταξύ του ύψους v_a και της διαμέσου μ_a .

Δηλαδή: $\text{ύψος} \rightarrow \text{διχοτόμος} \rightarrow \text{διάμεσος}$



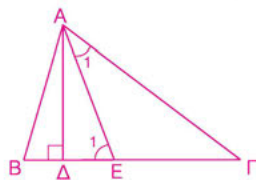
7. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος AD και τη διχοτόμο του AE .

Να δείξετε ότι $\hat{\Delta AE} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

Λύση

- Η γωνία $\hat{\Delta AE}$ είναι γωνία του ορθογώνιου τριγώνου ΔAE , οπότε $\hat{\Delta AE} = 90^\circ - \hat{E}_1$.
- Η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου AEG .

$$\text{Οπότε } \hat{E}_1 = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma}.$$



$$\text{Άρα } \hat{\Delta AE} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{180 - \hat{A} - 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma} - 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}.$$

8. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) το ύψος του AD και η διχοτόμος του BZ τέμνονται στο E , να δείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

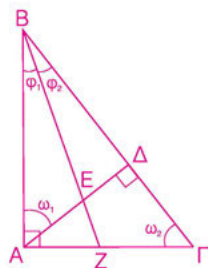
Λύση

Στο διπλανό σχήμα είναι:

- $\varphi_1 = \varphi_2$ (BZ διχοτόμος)
- $\hat{A\hat{E}Z} = \hat{B\hat{E}\Delta} = 90^\circ - \varphi_1$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔBE
- $\hat{A\hat{Z}E} = 90^\circ - \varphi_2$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ABZ

$$\text{Άρα } \hat{A\hat{E}Z} = \hat{A\hat{Z}E}.$$

Οπότε το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.



Συμπληρωματικές γωνίες

- 9.** Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ από σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$ φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.
Να δείξετε ότι $\hat{A} = 2\hat{E}\Delta\Gamma$.

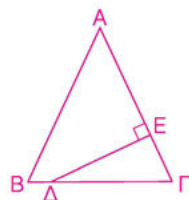
Λύση

1^{ος} τρόπος

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ έχουμε $\hat{E}\Delta\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma}$. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

$$\begin{aligned}\text{Είναι} \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \\ &\Rightarrow 2\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\end{aligned}$$

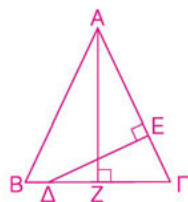
$$\text{Άρα} \quad \hat{E}\Delta\Gamma = 90^\circ - (90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}) \Rightarrow \hat{E}\Delta\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 2\hat{E}\Delta\Gamma.$$



2^{ος} τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{E}\Delta\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$. [Κατασκευάζουμε τη γωνία $\frac{\hat{A}}{2}$].

Φέρουμε τη διχοτόμο AZ , οπότε $AZ \perp B\Gamma$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και είναι $\hat{\Gamma}AZ = \frac{\hat{A}}{2}$.



Έχουμε $\hat{E}\Delta\Gamma = \hat{\Gamma}AZ = 90^\circ - \hat{\Gamma}$, από τα ορθογώνια τρίγωνα $E\Delta\Gamma$ και $AZ\Gamma$ αντίστοιχα.

$$\text{Άρα} \quad \hat{E}\Delta\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}.$$

Κάθετες ευθείες

- 10.** Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε τα σημεία Δ , E στην AB και στην προέκταση της ΓA αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$. Να δείξετε ότι $E\Delta \perp B\Gamma$.

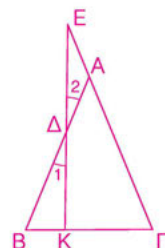
Λύση

Έστω K το σημείο τομής της ΔE με τη $B\Gamma$.

Αρκεί να δείξουμε $\hat{B} + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$.

Από τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}$.

Είναι $\hat{A}_{εξ} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow 180^\circ - 2\hat{\Delta}_2 = 2\hat{B} \Rightarrow 90^\circ = \hat{\Delta}_1 + \hat{B}$, αφού $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1$.



Άθροισμα γωνιών ν-γώνου

11. Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται στο E .

Να δείξετε ότι $\hat{AEB} = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

Λύση

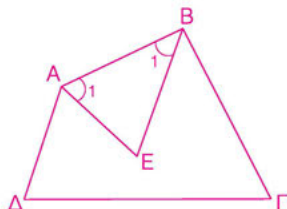
Στο τρίγωνο ABE , έχουμε:

$$\hat{AEB} = 180^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) = 180^\circ - \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} \right) = 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$$

$$\text{Είναι} \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2} = 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$$

$$\text{Οπότε} \quad \hat{AEB} = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}.$$



Β' ΟΜΑΔΑΣ

12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE .

Να δείξετε ότι $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{\Gamma\epsilon\Delta}$.

Λύση

Από το τρίγωνο $AB\Gamma$, έχουμε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 120^\circ - \hat{B}$$

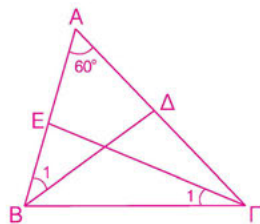
- Η γωνία $\hat{B\Delta\Gamma}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $AB\Delta$,

$$\text{οπότε} \quad \hat{B\Delta\Gamma} = \hat{A} + \hat{B}_1 = 60^\circ + \frac{\hat{B}}{2}.$$

- Η γωνία $\hat{\Gamma\epsilon\Delta}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $EB\Gamma$, οπότε

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma\epsilon\Delta} &= \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 = \hat{B} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{2\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = \frac{2\hat{B} + 120^\circ - \hat{B}}{2} \\ &= \frac{120^\circ + \hat{B}}{2} = 60^\circ + \frac{\hat{B}}{2} \end{aligned}$$

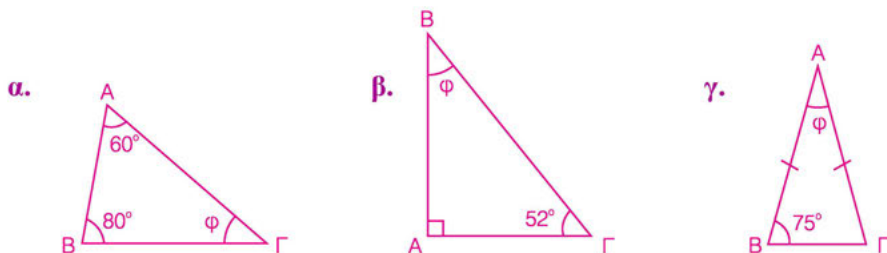
Άρα $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{\Gamma\epsilon\Delta}$.



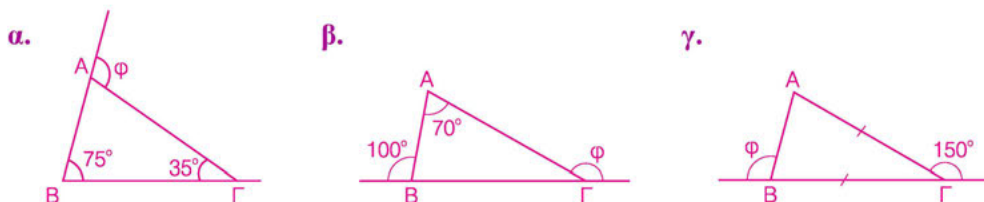
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

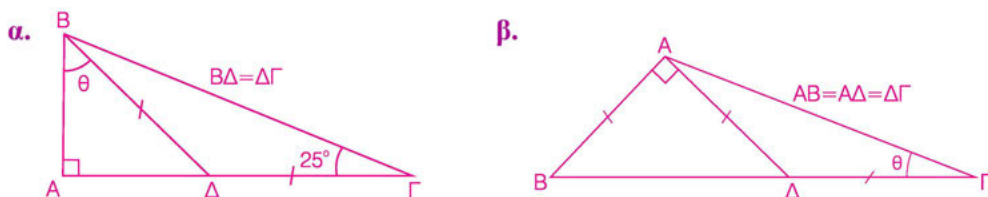
1. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τη γωνία φ .



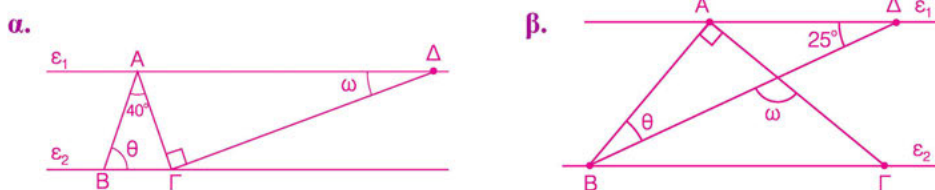
2. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τη γωνία φ .



3. Στα παρακάτω σχήματα, να υπολογίσετε τη γωνία θ .



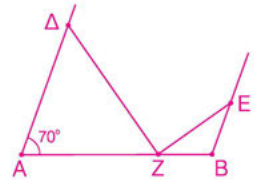
4. Στα παρακάτω σχήματα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = AG$. Να βρείτε τις γωνίες θ και ω .



5. Στο διπλανό σχήμα, οι AD και BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $AD = AZ$, $BE = BZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $AΔZ$ και BZE .

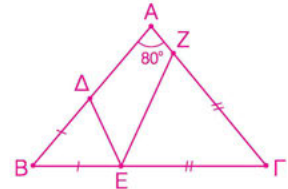
β. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta ZE} = 90^\circ$.



6. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ είναι $\hat{A} = 80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο E στην πλευρά $B\Gamma$ και κατόπιν τα σημεία Δ και Z στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = BE$ και $\Gamma E = \Gamma Z$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $B\Delta E$ και ΓZE .

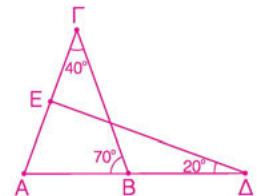
β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta EZ}$.



7. Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

β. η γωνία $\hat{A\hat{E}\Delta}$ είναι ορθή.



8. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια από τη γωνία $\hat{A}$ και κατά 20° μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

9. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\varsigma} = 144^\circ$.

α. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Αν I το έγκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να βρείτε τη γωνία $\hat{B\hat{I}\Gamma}$.

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

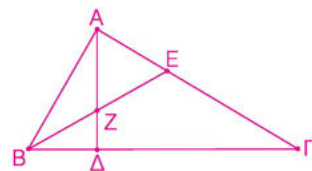
α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A\hat{\Delta}E}$.

β. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E\hat{\Delta}\Gamma}$.

11. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{B}$ είναι 60° .

β. Αν το ύψος του AD και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.



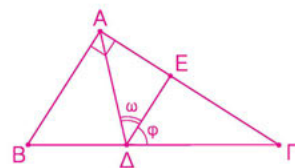
12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

β. Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την AG στο E .
Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{ADE}$, $\hat{ED\Gamma}$.

13. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$).

Έστω ότι η AD είναι η διχοτόμος της γωνίας A και η $DE \parallel AB$. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι κατά 20° μεγαλύτερη της $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τις γωνίες ϕ και ω .

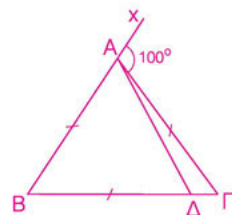


14. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB παίρνουμε τμήμα $B\Delta$, τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta}$.

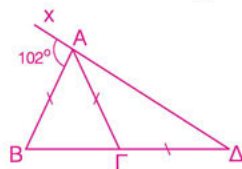
15. Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$, ώστε $\Delta A = \Delta\Gamma$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

16. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = A\Gamma = \Delta B$ και $\hat{\Gamma A x} = 100^\circ$.

Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma A \Delta}$.

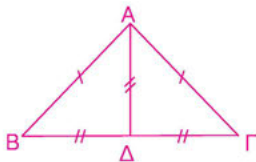


17. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = A\Gamma = \Gamma\Delta$ και $\hat{B A x} = 102^\circ$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta}$.

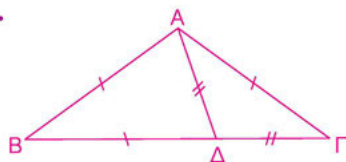


18. Ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) χωρίζεται σε δύο ισοσκελή τρίγωνα. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

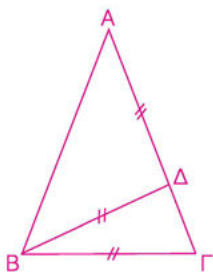
α.



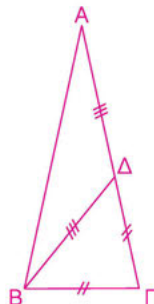
β.



γ.



δ.



19. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και το ύψος του AD . Στην προέκταση της AB παίρνουμε τμήμα $BE = BD$. Αν η ED τέμνει την $A\Gamma$ στο M , να δείξετε ότι το M είναι το μέσο της $A\Gamma$.

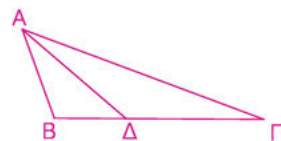
20. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και η διχοτόμος του AD . Να δείξετε ότι $\hat{A\Delta B} = 30^\circ$.

21. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και AD διχοτόμος του. Να αποδείξετε ότι

$$\hat{A\Delta \Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και AD διχοτόμος του. Να δείξετε ότι

$$\hat{A\Delta B} = 45^\circ$$



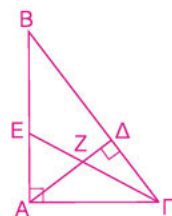
23. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και AD διχοτόμος του. Από το B φέρουμε κάθετη στην AD που τέμνει την AD στο E . Να δείξετε ότι

$$\hat{EB\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

24. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του AD . Φέρουμε $DE \perp A\Gamma$ και $EZ \perp AB$. Αν K το σημείο τομής των AD και ZE , να δείξετε ότι το τρίγωνο $K\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Συμπληρωματικές γωνίες

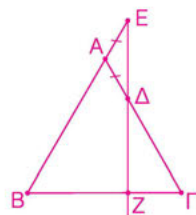
25. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$), AD το ύψος του και GE η διχοτόμος του. Αν οι AD και GE τέμνονται στο Z , να δείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.



26. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και στην προέκταση της $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο Δ , ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma A$. Φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο B και παίρνουμε σε αυτή, προς το μέρος του A , τμήμα $BE = BA$. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

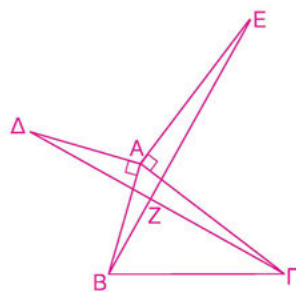
Κάθετες ευθείες

27. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = AD$.



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE .
- β. Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ED (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στη $B\Gamma$.

28. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$.
Αν $AD \perp AB$ με $AD = AB$ και $AE \perp A\Gamma$ με $AE = A\Gamma$, να δείξετε ότι:



- α. τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα
- β. $BE \perp \Gamma\Delta$

29. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, προεκτείνουμε τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE , προς το μέρος των κορυφών και στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα $BZ = A\Gamma$ και $\Gamma H = AB$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- α. $AZ = AH$
- β. $AZ \perp AH$



Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α' Λυκείου
- Άλγεβρα Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Α', Β', Γ' ΕΠΑ.Λ.
- Γεωμετρία Α' Λυκείου
- Γεωμετρία Β' Λυκείου
- Θετικών Σπουδών
- Γενικής Παιδείας
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α' & Β'
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα

ISBN: 978-618-83984-4-3



Α.Τ. 20,70 €