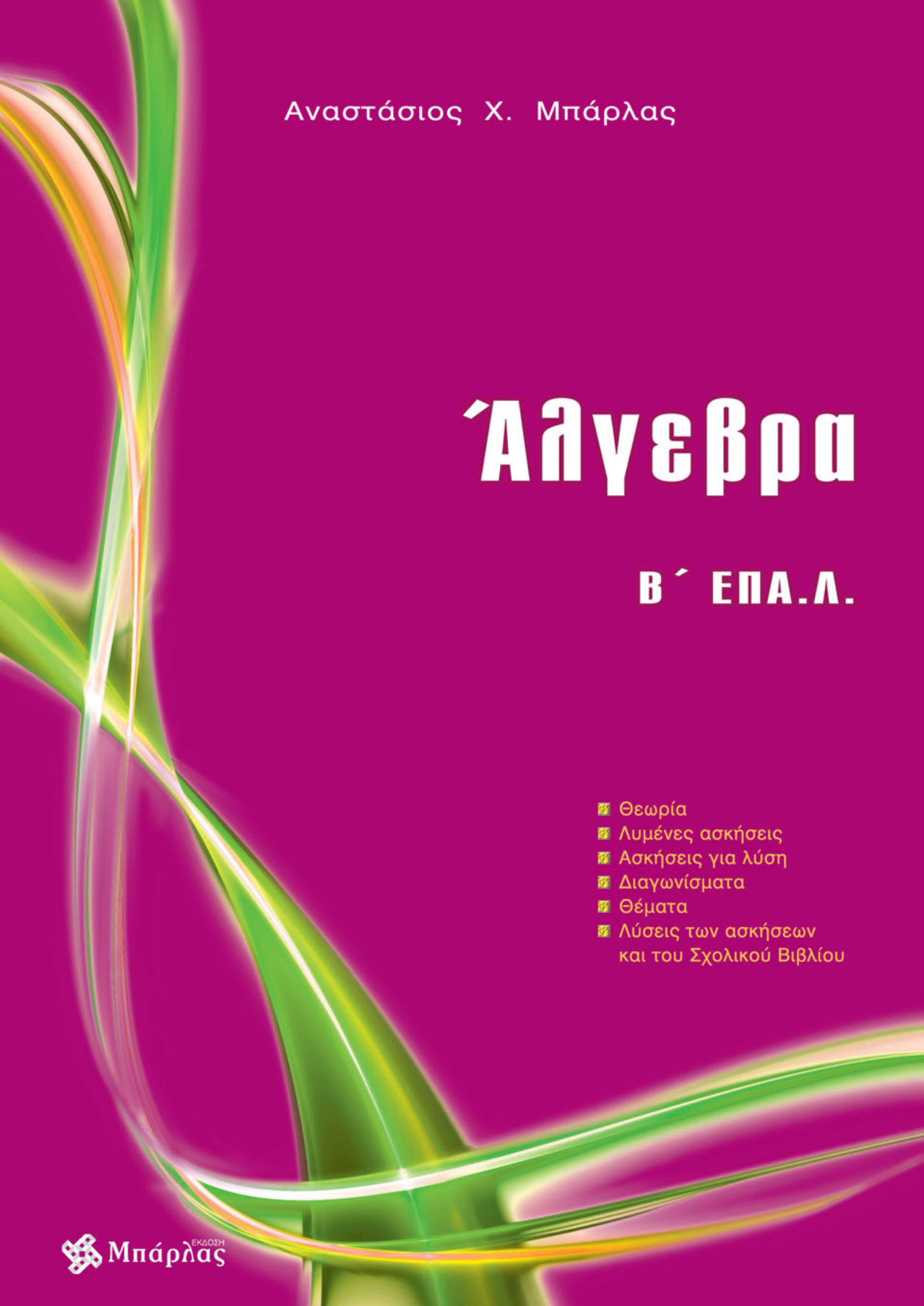




Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Άλγεβρα

Β΄ ΕΠΑ.Λ.

- Θεωρία
- Λυμένες ασκήσεις
- Ασκήσεις για λύση
- Διαγωνίσματα
- Θέματα
- Λύσεις των ασκήσεων
και του Σχολικού Βιβλίου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της **Β΄** τάξης **ΕΠΑ.Λ.**

Περιέχει:

- ✓ **Αναλυτική θεωρία.**
- ✓ **Παρατηρήσεις στη θεωρία**, στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ✓ **Μεθοδολογία** και **Σχόλια** για τη λύση ασκήσεων.
- ✓ **Λυμένες ασκήσεις**, ως υποδείγματα τρόπου λύσης.
- ✓ **Ασκήσεις για λύση.**
- ✓ **Θέματα** που καλύπτουν όλο το φάσμα των γνώσεων που πρέπει να έχει ο μαθητής, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των εξετάσεων.
- ✓ **Διαγωνίσματα** ανά διδακτική ενότητα.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν:

- **Οι λύσεις των ασκήσεων** του βιβλίου αυτού .
- **Οι λύσεις των ασκήσεων** του σχολικού βιβλίου.

Αύγουστος 2019

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Συστήματα δύο Γραμμικών Εξισώσεων με δύο αγνώστους	6
2. Εξίσωση ευθείας – Γραφική επίλυση Συστήματος	19
3. Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων με περισσότερους από δύο αγνώστους ..	27
4. Μη Γραμμικά Συστήματα	31

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

5. Μονοτονία Συνάρτησης – Ακρότατα Συνάρτησης.....	36
6. Συμμετρίες Συνάρτησης	50
7. Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης	55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

8. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας	66
9. Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες	80
10. Αναγωγή στο 1 ^ο Τεταρτημόριο	90
11. Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις	101
12. Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις	115
13. Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών	131
14. Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α	137

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ

15. Πολυνώνυμα	144
16. Διαίρεση Πολυωνύμων	153
17. Πολυωνυμικές Εξισώσεις	170
18. Πρόσημο Γινομένου – Ανισώσεις	180
19. Εξισώσεις και Ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές	189
20. Άρρητες Εξισώσεις – Ανισώσεις	199

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

21. Εκθετική Συνάρτηση	208
22. Λογάριθμοι	222
23. Λογαριθμική Συνάρτηση	227

ΘΕΜΑΤΑ και ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ 246 |

• Λύσεις των Ασκήσεων	262
• Λύσεις των Ασκήσεων του σχολικού βιβλίου	335



Συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$

Δίνεται η εξίσωση $2x - y = 1$.

Για $x = 2$ και $y = 3$ έχουμε $2x - y = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1$.

Οπότε το ζεύγος $(2, 3)$ επαληθεύει την εξίσωση.

Η εξίσωση $2x - y = 1$ λέγεται *γραμμική* εξίσωση και το ζεύγος $(2, 3)$ *λύση* της εξίσωσης.

Ορισμός

- Μία εξίσωση της μορφής: $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ λέγεται *γραμμική εξίσωση*.
- *Λύση της γραμμικής εξίσωσης* $ax + by = \gamma$, λέγεται κάθε ζεύγος που την επαληθεύει.

Κάθε γραμμική εξίσωση έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Γραμμικό σύστημα 2×2

- Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $ax + by = \gamma$ και $a'x + b'y = \gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους**, ή ένα **γραμμικό σύστημα 2×2** και γράφουμε:

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

Λύση του συστήματος λέγεται κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

παράδειγμα:

Το ζεύγος $(1, 2)$ είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$, αφού ισχύει $\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ 1 - 2 = -1 \end{cases}$

- Τρεις από τις μεθόδους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος είναι:
- Η μέθοδος της **αντικατάστασης**.
 - Η μέθοδος των **αντίθετων συντελεστών** (ή μέθοδος της απαλοιφής).
 - Η μέθοδος των **οριζουσών** που θα αναπτύξουμε στα παρακάτω παραδείγματα.

Α. Μέθοδος της αντικατάστασης

Για να λύσουμε το σύστημα
$$\begin{cases} x - 2y = 7 & (1) \\ 4x + 3y = 6 & (2) \end{cases}$$

με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

- **Λύνουμε** τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο π.χ. την (1) ως προς x .

Έτσι, το σύστημα γράφεται ισοδύναμα:
$$\begin{cases} x = 2y + 7 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$$

- **Αντικαθιστούμε** στη δεύτερη εξίσωση το x με την παράσταση που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε:

$$4 \cdot (2y + 7) + 3y = 6 \Leftrightarrow 8y + 28 + 3y = 6 \Leftrightarrow 11y = -22 \Leftrightarrow y = -2$$

- **Αντικαθιστούμε** την τιμή του y στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο: $x = 2 \cdot (-2) + 7 = 3$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (3, -2)$.

Β. Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής)

Για να λύσουμε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - 5y = 9 & (1) \\ 3x - 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

- **Πολλαπλασιάζουμε** τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός άγνωστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν, να είναι αντίθετοι:

[Την 1^η εξίσωση την πολλαπλασιάζουμε με 3 και τη 2^η με -2] .

$$\begin{cases} 2x - 5y = 9 & \cdot 3 \\ 3x - 2y = 8 & \cdot (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 15y = 27 \\ -6x + 4y = -16 \end{cases}$$

- **Προσθέτουμε** κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε:

$$6x - 15y - 6x + 4y = 27 - 16 \Leftrightarrow -11y = 11 \Leftrightarrow y = -1$$

- **Αντικαθιστούμε** την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις αρχικές εξισώσεις (στην πιο απλή) και βρίσκουμε την τιμή του άλλου.

Από τη (2) έχουμε $3x - 2 \cdot (-1) = 8 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(2, -1)$.

Γ. Μέθοδος οριζουσών

Ορίζουσα

Η παράσταση $a\delta - b\gamma$ συμβολίζεται με $\begin{vmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ και λέγεται *ορίζουσα*.

Οπότε είναι $\begin{vmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = a\delta - b\gamma$.

Ορίζουσες του γραμμικού συστήματος 2×2

Στο γραμμικό σύστημα $\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$ ορίζουμε τρεις ορίζουσες.

- Την ορίζουσα D , που έχει ως στοιχεία τους συντελεστές των αγνώστων. Δηλαδή

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \text{ και λέγεται } \textbf{ορίζουσα του συστήματος}.$$

- Την ορίζουσα D_x , που προκύπτει από την D , αν στη θέση των συντελεστών του

$$x \text{ θέσουμε τους σταθερούς όρους. Δηλαδή } D_x = \begin{vmatrix} \gamma & b \\ \gamma' & b' \end{vmatrix}.$$

- Την ορίζουσα D_y , που προκύπτει από την D , αν στη θέση των συντελεστών του

$$y \text{ θέσουμε τους σταθερούς όρους. Δηλαδή } D_y = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix}.$$

Επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2

Έστω το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$.

- Αν $D \neq 0$, έχει μοναδική λύση, την (x, y) με $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$.
- Αν $D = 0$, είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

παράδειγμα: Το σύστημα $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ έχει $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$,

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1.$$

$$\text{Οπότε } x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{1} = 1.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γραμμική εξίσωση

1. Δίνεται η εξίσωση $x + 3y = 1$.

α. Να εξετάσετε, αν τα ζεύγη $(-2, 1)$, $(1, -2)$ είναι λύσεις της εξίσωσης.

β. Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία το ζεύγος $(a, a-1)$ είναι λύση της εξίσωσης.

Λύση

α. • Για $x = -2$ και $y = 1$ το 1^ο μέλος της εξίσωσης γίνεται

$$-2 + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = 1,$$

οπότε το ζεύγος $(-2, 1)$ επαληθεύει την εξίσωση. Άρα είναι λύση της εξίσωσης.

• Για $x = 1$ και $y = -2$ το 1^ο μέλος της εξίσωσης γίνεται

$$1 + 3 \cdot (-2) = 1 - 6 = -5 \neq 1,$$

οπότε το ζεύγος $(1, -2)$ δεν είναι λύση της εξίσωσης.

β. Πρέπει το ζεύγος $(a, a-1)$ να επαληθεύει την εξίσωση.

Για $x = a$ και $y = a-1$ έχουμε

$$a + 3(a-1) = 1 \Leftrightarrow a + 3a - 3 = 1 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$$

Άρα $a = 1$.

Αλγεβρική επίλυση συστήματος

2. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases}$.

Λύση

Θα λύσουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

$$\begin{aligned} \text{Είναι} \quad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ 5x + 2(4 - 2x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ 5x + 8 - 4x = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ x = 10 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2 \cdot 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα έχει λύση το ζεύγος $(2, 0)$.

Επαλήθευση: Για $x = 2$ και $y = 0$ έχουμε:

• 1^η εξίσωση: $2 \cdot 2 + 0 = 4$

• 2^η εξίσωση: $5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 10$

3. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 4x + 7y = -3 \end{cases}.$$

Λύση

Θα λύσουμε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 4x + 7y = -3 \end{cases} & \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot (-4) \\ \cdot 3 \end{matrix}} \begin{cases} -12x + 20y = -32 \\ 12x + 21y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 41y = -41 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5(-1) = 8 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5 = 8 \\ y = -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (1, -1)$.

4. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1 \\ x(y+3) - y(x-2) = 4 \end{cases}.$$

Λύση

Γράφουμε κάθε εξίσωση του συστήματος στη μορφή $ax + by = \gamma$.

Έχουμε:

- $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{4} - 4 \cdot \frac{y}{2} = 4 \cdot 1 \Leftrightarrow x - 2y = 4$
- $x(y+3) - y(x-2) = 4 \Leftrightarrow xy + 3x - xy + 2y = 4 \Leftrightarrow 3x + 2y = 4$

Επομένως το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 4x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2y = 4 \\ x = 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 4 - 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει λύση το ζεύγος $(2, -1)$.

Ορίζουσες

5. α. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

Λύση

Είναι:

α. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot (-2) = 23$

β. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \cdot x - 1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$

Επίλυση συστήματος

6. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 16 + 5x = 2y \end{cases}$ με τη μέθοδο των οριζουσών.

Λύση

Γράφουμε το σύστημα στη μορφή $\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$.

Έχουμε $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 16 + 5x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$.

Είναι: • $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 = -4 - 15 = -19 \neq 0$

• $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -16 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - (-16) \cdot 3 = -10 + 48 = 38$

• $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -16 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-16) - 5 \cdot 5 = -32 - 25 = -57$

Επειδή $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση τη:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{38}{-19} = -2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-57}{-19} = 3$$

Άρα $(x, y) = (-2, 3)$.

7. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x = 6 - 3y \\ \frac{x}{3} + y = 2 \end{cases}$$

Λύση

Είναι:

$$\alpha. \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} : 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

$$\beta. \begin{cases} x = 6 - 3y \\ \frac{x}{3} + y = 2 \end{cases} \cdot 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 6 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3y = 6$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

8. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων, των παρακάτω συστημάτων:

$$\alpha. \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 6x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

ΛύσηΒρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος και εξετάζουμε, αν $D \neq 0$ ή $D = 0$.

Είναι:

$$\alpha. D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5 \neq 0$$

Επειδή $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$\beta. D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 6 \cdot (-2) = -12 + 12 = 0$$

Οπότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 6x - 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 3x - 2y = \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

$$\gamma. D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 1$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

9. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+1 \\ x + (y-1)^2 = y^2 \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\bullet \quad \frac{x}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+1 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{3y-1}{4} = -4x+4 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 \cdot (3y-1) = -4x+4$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + 1 = -4x+4$$

$$\Leftrightarrow 6x - 3y = 3 \Leftrightarrow 2x - y = 1$$

$$\bullet \quad x + (y-1)^2 = y^2 \Leftrightarrow x + y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2 = y^2 \Leftrightarrow x - 2y = -1$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Επομένως το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y-1) - y = 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 2 - y = 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \cdot 1 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει λύση το ζεύγος $(1, 1)$.

Εύρεση παραμέτρων

- 10.** Να βρείτε τις τιμές των α, β , για τις οποίες το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \alpha + 3 \\ \beta x - \alpha y = \beta - 1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (2, 1)$.

Λύση

Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \alpha + 3 \\ \beta x - \alpha y = \beta - 1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(2, 1)$, όταν το επαληθεύει.

Για $x=2$ και $y=1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1 = \alpha + 3 \\ \beta \cdot 2 - \alpha \cdot 1 = \beta - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - \alpha = 3 \\ 2\beta - \alpha - \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \beta - \alpha = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \beta = 3 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα $\alpha=2$ και $\beta=1$.

Προβλήματα

- 11.** Εκατόν τριάντα έξι τουρίστες μεταφέρθηκαν με 10 λεωφορεία των 12 θέσεων και 16 θέσεων. Πόσα ήταν τα λεωφορεία από τον κάθε τύπο;

Λύση

Έστω x το πλήθος των λεωφορείων των 12 θέσεων και y των 16 θέσεων.

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 10 \\ 12x + 16y = 136 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + 4y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ 3(10 - y) + 4y = 34 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ 30 - 3y + 4y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ y = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 4 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα τα λεωφορεία των 12 θέσεων ήταν 6 και των 16 θέσεων 4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γραμμική εξίσωση

- Δίνεται η εξίσωση $3x - y = 6$.
 - Να εξετάσετε, αν τα ζεύγη $(2, 0)$, $(3, 3)$ και $(2, 3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης.
 - Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία το ζεύγος $(a, 2a - 1)$ είναι λύση της εξίσωσης.
- Αν το ζεύγος $(2, 1)$ είναι λύση της εξίσωσης $(a - 1)x - y = a + 3$, να βρείτε την τιμή του a .

Αλγεβρική επίλυση συστήματος

- Να λύσετε με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 3 \end{cases}$	β. $\begin{cases} y = x - 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$
γ. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$	δ. $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$
- Να λύσετε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$	β. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases}$	γ. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
δ. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$	ε. $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$	στ. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$
- Να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	β. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$	γ. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$
---	---	--
- Να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} 2x - (y - 1) = x \\ 3(x - y) - 1 = y - 6 \end{cases}$	β. $\begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases}$
---	--
- Να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$	β. $\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{4} \\ \frac{x-1}{2} - \frac{x-2y}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$
---	--

Ορίζουσες

8. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

α. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

β. $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

γ. $\begin{vmatrix} \sqrt{3}-2 & 4 \\ -1 & \sqrt{3}+2 \end{vmatrix}$

9. Να λύσετε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Επίλυση συστήματος

10. Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών:

α. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 7x - 5y = -12 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$

11. Να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$

β. $\begin{cases} \frac{x}{4} - y = 1 \\ x = 4y + 2 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x + 9y = 12 \end{cases}$

12. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων, των παρακάτω συστημάτων:

α. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + 4y = 2020 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

13. Να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 9x = 3y \end{cases}$

B' ΟΜΑΔΑΣ

14. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} (x+1)^2 + 3y = x^2 - 4 \\ 3x + (y-1)^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} (x-2)^2 - y = x^2 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y-6}{6} = 2 \end{cases}$$

Εύρεση παραμέτρων

15. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$.

α. Να εξετάσετε, αν το ζεύγος $(-1, 2)$ είναι λύση του συστήματος.

β. Να λύσετε το σύστημα.

16. Να βρείτε τις τιμές των α, β , για τις οποίες το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 3 \\ \beta x - \alpha y = -1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (1, 1)$.

17. α. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$.

Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) .

β. Να βρείτε τις τιμές των α και β , για τις οποίες το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + y = 7\beta \\ 5x - \beta y = 3\alpha \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος (x_0, y_0) .

18. Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - 3$.

α. Να βρείτε τις τιμές $P(1)$ και $P(-1)$.

β. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x + y = P(1) \\ x + P(-1)y = 7 \end{cases}$

19. Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = ax^2 + \beta x - 2$. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες ισχύουν $P(1) = 0$ και $P(-3) = 4$.

20. Να βρείτε τις τιμές των α, β , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^3 - \beta x^2 + 1$ διέρχεται από τα σημεία $A(2, 13)$ και $B(-1, -2)$.



Πολυωνυμικές εξισώσεις

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ρίζες αυτών

Ορισμοί

- **Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n** ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n \neq 0$$

- **Ρίζα** μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολωνύμου

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

δηλαδή κάθε αριθμό ρ , για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

Επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων

- ▶ Για τις πολυωνυμικές εξισώσεις:

- $\alpha x + \beta = 0$ • $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ • $\alpha x^n + \beta = 0$, n θετικός ακέραιος
- υπάρχουν γενικοί τρόποι επίλυσής τους.

- ▶ Για την επίλυση της πολυωνυμικής εξίσωσης

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n \neq 0,$$

θέτουμε $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$.

Οπότε έχουμε την εξίσωση $P(x) = 0$ (1)

Για τη λύση της εξίσωσης (1) αναλύουμε το $P(x)$ σε γινόμενο παραγόντων της μορφής:

$$\alpha x + \beta, \quad \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha x^n + \beta$$

με τους γνωστούς τρόπους παραγοντοποίησης και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν στηριζόμενοι στην ισοδυναμία

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) = 0 \Leftrightarrow (P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } P_k(x) = 0)$$

παράδειγμα: Για την επίλυση της εξίσωσης $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$, έχουμε:

$$x^4 - x^3 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x^3 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^3+1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^3=-1$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^3=-\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

Παράγοντας της μορφής $x - \rho$

Το επόμενο θεώρημα μας βοηθά, σε ορισμένες περιπτώσεις, στην εύρεση παραγόντων της μορφής $x - \rho$.

Θεώρημα (ακέραιων ριζών)

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$

με ακέραιους συντελεστές.

Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Απόδειξη

Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε:

$$\begin{aligned} \alpha_v \rho^v + \alpha_{v-1} \rho^{v-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 &= 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_v \rho^v - \alpha_{v-1} \rho^{v-1} - \dots - \alpha_1 \rho \\ &\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho(-\alpha_v \rho^{v-1} - \alpha_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - \alpha_1) \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή οι αριθμοί: $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ είναι ακέραιοι, προκύπτει ότι και ο αριθμός

$$-\alpha_v \rho^{v-1} - \alpha_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - \alpha_1,$$

είναι ακέραιος.

Από την ισότητα (1) συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0 .

Σχόλιο

- Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν αληθεύει.
Δηλαδή, αν ένας ακέραιος ρ είναι διαιρέτης του α_0 , τότε αυτός δεν είναι κατ' ανάγκη και ρίζα της εξίσωσης.
π.χ. στην εξίσωση $x^2 - 7x + 6 = 0$, ο αριθμός 2 είναι διαιρέτης του 6, αλλά όχι ρίζα της εξίσωσης.
Οπότε οι διαιρέτες του α_0 είναι πιθανές ακέραιες ρίζες.
- Από το παραπάνω θεώρημα (ακέραιων ριζών) προκύπτει ότι:
Αν ο ακέραιος ρ δεν είναι διαιρέτης του α_0 , τότε δεν είναι και ρίζα της εξίσωσης.
- Αν η εξίσωση έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x και οι συντελεστές είναι ομόσημοι, τότε αποκλείεται να έχει ρίζες. π.χ. η εξίσωση $x^4 + 3x^2 + 5 = 0$.

Επίλυση της εξίσωσης $\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ (1)

Για να λύσουμε την εξίσωση (1), θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

και βρίσκουμε με το θεώρημα των ακέραιων ριζών μία ρίζα ρ της εξίσωσης

$$P(x) = 0$$

Επειδή ο ρ είναι και ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, έχουμε

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$$

και η εξίσωση γίνεται: $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - \rho)\pi(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x - \rho = 0 \quad \text{ή} \quad \pi(x) = 0$$

Η εξίσωση $\pi(x) = 0$ έχει βαθμό $v-1$ και για να την επιλύσουμε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία.

παράδειγμα:

Για την επίλυση της εξίσωσης $x^3 - 3x + 2 = 0$, έχουμε ότι:

οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες ± 1 , ± 2 του σταθερού όρου 2.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + 2$ και η εξίσωση γίνεται $P(x) = 0$.

Εξετάζουμε, αν κάποιος από αυτούς μηδενίζει το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

Είναι:

- $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$, επομένως το -1 δεν είναι ρίζα του $P(x)$.
- $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$, επομένως το 1 είναι ρίζα του $P(x)$.

Οπότε το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$, άρα

$$P(x) = (x - 1) \cdot \pi(x)$$

Με το σχήμα του Horner βρίσκουμε ότι

$$\pi(x) = x^2 + x - 2$$

Οπότε $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 2)$, επομένως

η εξίσωση γράφεται

$$(x - 1) \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad (\text{διπλή ρίζα})$$

Άρα $x = -2$ ή $x = 1$ (διπλή ρίζα).

1	0	-3	2	$\rho = 1$
↓	1	1	-2	
1	1	-2	0	

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Επίλυση εξισώσεων με παραγοντοποίηση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^4 = 8x$

β. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

Λύση

Είναι:

$$\begin{aligned}
 \alpha. \quad x^4 = 8x &\Leftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 - 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = 8 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = \sqrt[3]{8} \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2
 \end{aligned}$$

Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0 και 2.

$$\begin{aligned}
 \beta. \quad x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x - 2) - 9(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 9) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3)(x + 3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3
 \end{aligned}$$

Άρα $x = -3$ ή $x = 2$ ή $x = 3$.

Ακέραιες ρίζες εξίσωσης

2. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 5x + 2 = 0$.

Λύση

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες ± 1 , ± 2 του σταθερού όρου 2.Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 5x + 2$. Η εξίσωση γράφεται $P(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι:} \quad &\bullet \quad P(1) = 1^3 - 5 \cdot 1 + 2 = -2 \neq 0 \\
 &\bullet \quad P(-1) = (-1)^3 - 5 \cdot (-1) + 2 = 6 \neq 0 \\
 &\bullet \quad P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 + 2 = 8 - 10 + 2 = 0 \\
 &\bullet \quad P(-2) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2) + 2 = -8 + 10 + 2 = 4 \neq 0
 \end{aligned}$$

Άρα οι αριθμοί 1, -1 και -2 δεν είναι ρίζες του πολυώνυμου, άρα και της εξίσωσης.

Επομένως η μοναδική ακέραια ρίζα της εξίσωσης είναι το 2.

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x + 2 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Λύση

Αν η εξίσωση είχε ακέραιες ρίζες, τότε αυτές θα ήταν διαιρέτες του σταθερού όρου 2. Δηλαδή οι αριθμοί: ± 1 , ± 2 .

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x + 2$. Η εξίσωση γράφεται $P(x) = 0$.

Είναι:

- $P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 + 2 = 6 \neq 0$
- $P(-1) = (-1)^3 + 3(-1) + 2 = -1 - 3 + 2 = -2 \neq 0$
- $P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 + 2 = 8 + 6 + 2 = 16 \neq 0$
- $P(-2) = (-2)^3 + 3(-2) + 2 = -8 - 6 + 2 = -12 \neq 0$

Άρα η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Επίλυση εξισώσεων με το θεώρημα ακέραιων ριζών

4. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Λύση

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται $P(x) = 0$ (1).

Βρίσκουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου 6, που είναι οι αριθμοί:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

και με το σχήμα του Horner εξετάζουμε, αν κάποιος από αυτούς μηδενίζει το $P(x)$.

Έχουμε

1	0	-7	6	$\rho = 1$
↓	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Επομένως το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

Από το σχήμα του Horner έχουμε ότι $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)$.

Οπότε η εξίσωση (1) γράφεται

$$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + x - 6 = 0$$

Έτσι έχουμε:

- Η εξίσωση $x - 1 = 0$ έχει ρίζα το 1.
- Η εξίσωση $x^2 + x - 6 = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -3.

Άρα, $x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = -3$.

5. Να λύσετε την εξίσωση $2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9 = 0$.**Λύση**

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ του σταθερού όρου -9 .

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9$$

και η εξίσωση γίνεται $P(x) = 0$.

Από το διπλανό σχήμα του Horner

για $\rho = 1$, έχουμε:

$$P(x) = (x-1)(2x^3 - x^2 - 18x + 9).$$

2	-3	-17	27	-9	$\rho = 1$
↓	2	-1	-18	9	
2	-1	-18	9	0	

Ομοίως, για το πολυώνυμο $\pi(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$ αναζητούμε με τη βοήθεια του σχήματος Horner κάποια ακέραια ρίζα του.

Είναι:

- $\pi(1) = -8 \neq 0$

Άρα το 1 δεν είναι ρίζα του $\pi(x)$.

2	-1	-18	9	$\rho = 1$
↓	2	1	-17	
2	1	-17	-8	

- $\pi(3) = 0$

Άρα το 3 είναι ρίζα του $\pi(x)$.

Οπότε $\pi(x) = (x-3)(2x^2 + 5x - 3)$

Επομένως $P(x) = (x-1)(x-3)(2x^2 + 5x - 3)$.

Άρα

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ή} \quad x-3=0 \quad \text{ή} \quad 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

Είναι:

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

- $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

- Η εξίσωση $2x^2 + 5x - 3 = 0$ έχει ρίζες $x_1 = -3$ και $x_2 = \frac{1}{2}$.

Άρα $x=1$ ή $x=3$ ή $x=-3$ ή $x=\frac{1}{2}$.

2	-1	-18	9	$\rho = 3$
↓	6	15	-9	
2	5	-3	0	

Επίλυση εξισώσεων με βοηθητικό άγνωστο

6. Να λύσετε την εξίσωση $x^6 - 7x^2 - 6 = 0$.

Λύση

Θέτουμε $x^2 = y$ (1). Οπότε η εξίσωση γράφεται $y^3 - 7y - 6 = 0$ (2).

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ του σταθερού όρου -6 .

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, για $\rho = -1$ έχουμε το διπλανό σχήμα.

Οπότε το -1 είναι ρίζα της (2), η οποία γράφεται:

1	0	-7	-6	$\rho = -1$
↓	-1	1	6	
1	-1	-6	0	

$$(y+1)(y^2 - y - 6) = 0 \Leftrightarrow y+1=0 \text{ ή } y^2 - y - 6 = 0.$$

Έτσι έχουμε:

- $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$
- $y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+2) = 0 \Leftrightarrow y=3 \text{ ή } y=-2$

Επομένως $y=-1$ ή $y=3$ ή $y=-2$. Οπότε η (1) γράφεται

- $x^2 = -1$, που είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
- $x^2 = -2$, που είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
- $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}$.

Άρα, $x = -\sqrt{3}$ ή $x = \sqrt{3}$.

7. Να λύσετε την εξίσωση $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

Λύση

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ (1)

θέτουμε: $x^3 = y$ (2)

Η (1) λόγω της (2) γράφεται $y^2 - 7y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ ή } y = 8$.

- Για $y = -1$, η (2) γίνεται:

$$x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = -1$$

- Για $y = 8$, η (2) γίνεται:

$$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα, $x = -1$ ή $x = 2$.

Κοινά σημεία γραφικών παραστάσεων

8. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x + 2$ με τον άξονα $x'x$.

Λύση

Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$, έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -x^3 - x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

Από το διπλανό σχήμα Horner, για $\rho = 1$
η εξίσωση (1) γράφεται:

1	0	1	-2	$\rho = 1$
↓	1	1	2	
1	1	2	0	

$$\begin{aligned} (x-1)(x^2 + x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x^2 + x + 2 &= 0, \quad \text{που είναι αδύνατη στο } \mathbb{R} \quad [\text{αφού } \Delta = -7 < 0] \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.

9. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^3 + 9 \quad \text{και} \quad g(x) = 5x^2 - 3x$$

Λύση

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^3 + 9 = 5x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Από το διπλανό σχήμα Horner, για $\rho = -1$

η εξίσωση (1) γράφεται:

1	-5	3	9	$\rho = -1$
↓	-1	6	-9	
1	-6	9	0	

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2 - 6x + 9) &= 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{ή} \quad (x-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad (\text{διπλή ρίζα}) \end{aligned}$$

Είναι:

- $f(-1) = (-1)^3 + 9 = -1 + 9 = 8$
- $f(3) = 3^3 + 9 = 27 + 9 = 36$

Άρα, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g είναι τα σημεία:

$$A(-1, 8) \quad \text{και} \quad B(3, 36)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Επίλυση εξισώσεων με παραγοντοποίηση**

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2x^3 = 3x^2$

β. $x^3 = 4x$

γ. $x^4 = x$

δ. $x^5 = 16x$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

β. $x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = 0$

γ. $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$

δ. $2x^4 + 5x = 2x^3 + 5$

Ακέραιες ρίζες εξίσωσης

3. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων:

α. $x^3 - 3x + 2 = 0$

β. $x^3 - 6x + 5 = 0$

γ. $2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - x + 2 = 0$

δ. $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

4. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

α. $x^3 + x - 3 = 0$

β. $x^4 - 3x - 2 = 0$

Επίλυση εξισώσεων με το θεώρημα ακέραιων ριζών

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

β. $2x^3 - x - 1 = 0$

γ. $x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$

δ. $x^3 + 3 = 2x(1 - x)$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $4x^4 - 4x^3 - 25x^2 + x + 6 = 0$

β. $x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12 = 0$

Επίλυση εξισώσεων με βοηθητικό άγνωστο

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^9 + x^6 - 2 = 0$

β. $x^6 - 2x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Κοινά σημεία γραφικών παραστάσεων

8. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τον άξονα $x'x$.
- α. $f(x) = x^4 + 8x$ β. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
9. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων f και g .
- α. $f(x) = x^4$ και $g(x) = x$
- β. $f(x) = x^3 - 6x$ και $g(x) = x - 6$
10. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ και την ευθεία ε που έχει κλίση -1 και διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$. Να βρείτε:
- α. Την εξίσωση της ευθείας ε .
- β. Τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας ε .
11. Έστω $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ και η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(0, -2)$.
- α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .
- β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας ε .

Γενικές

12. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = ax^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$.
- α. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 4$.
- β. Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος α. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

13. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).
- α. Αν ο ακέραιος $p \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο p είναι διαιρέτης του α_0 .
- β. Αν ο ακέραιος p δεν είναι διαιρέτης του α_0 , τότε ο p δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.
- γ. Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του α_0 .
- δ. Αν ο p είναι διαιρέτης του α_0 , τότε ο p είναι ρίζα της εξίσωσης.

α.	
β.	
γ.	
δ.	



Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α' Λυκείου
- Άλγεβρα Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Α', Β', Γ' ΕΠΑ.Α.
- Γεωμετρία Α' Λυκείου
- Γεωμετρία Β' Λυκείου
- Θετικών Σπουδών
- Γενικής Παιδείας
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α' & Β'
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα

ISBN: 978-618-83984-3-6



Α.Τ. 20,70 €