Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Άλγεβρα

Α΄ ΕΠΑ.Λ.

- Θεωρία
- Λυμένες ασκήσεις
- Ασκήσεις για λύση
- Διαγωνίσματα
- Θέματα
- Λύσεις των ασκήσεων και του Σχολικού Βιβλίου

ΕΚΔΟΣΗ Μπάρλας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

3 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Οι Αριθμοί

Από τις προηγούμενες τάξεις έχουμε γνωρίσει τους παρακάτω αριθμούς:

- **Φυσικοί** αριθμοί: $0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$

- **Ακέραιοι** αριθμοί: $\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

- **Ρητοί** αριθμοί
  Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος

$$\frac{\mu}{\nu},\ \text{όπου } \mu,\ \nu \text{ ακέραιοι αριθμοί και } \nu \neq 0$$

παράδειγμα: Οι αριθμοί: $\frac{2}{3}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $1{,}3 = \frac{13}{10}$, $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$ είναι ρητοί.

- **Άρρητοι** αριθμοί
  Άρρητος αριθμός λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

παράδειγμα: Οι αριθμοί: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π είναι άρρητοι.

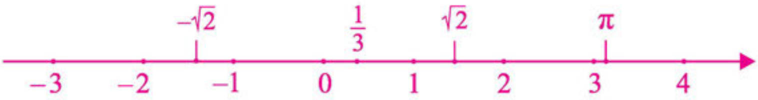
- **Πραγματικοί** αριθμοί
  Πραγματικός αριθμός είναι κάθε αριθμός που είναι ρητός ή άρρητος.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Τα σύνολα των φυσικών, ακέραιων, ρητών και πραγματικών αριθμών, τα συμβολίζουμε αντίστοιχα με

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$$

► Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, **του άξονα των πραγματικών αριθμών.**



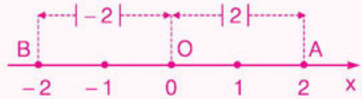
Ο άξονας των πραγματικών αριθμών

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και είναι ίση με την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό α, από την αρχή του άξονα.

παράδειγμα:

- $|2| = (OA) = 2$
- $|-2| = (OB) = 2$
- $|0| = (OO) = 0$



Αντίθετοι αριθμοί

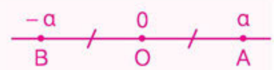
Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι **ετερόσημοι** και έχουν **ίδια απόλυτη τιμή.**

παράδειγμα

Οι αριθμοί $+2$ και -2 είναι αντίθετοι, διότι είναι ετερόσημοι και $|+2| = |-2|$.

► • Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν.

- Οι αντίθετοι αριθμοί α και $-\alpha$ έχουν ίσες απόλυτες τιμές, δηλαδή



$$|\alpha| = |-\alpha|,$$

αφού $(OA) = (OB)$.

Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

Πρόσθεση

Για την απλοποίηση της γραφής ενός αθροίσματος συμφωνούμε να παραλείπουμε το σύμβολο της πρόσθεσης και τις παρενθέσεις και να γράφουμε τους προσθετέους τον έναν πλάι στον άλλο με το πρόσημό τους.

παράδειγμα: $(-3)+(+2)+(-5) = -3+2-5$

- Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους **ομόσημους** αριθμούς, **προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε πρόσημο, το κοινό τους πρόσημο.

παράδειγμα:

- $(+3)+(+7) = +(|3|+|7|)$
  $= +(3+7) = 10$ και γράφουμε $3+7=10$
- $(-3)+(-7) = -(|-3|+|-7|)$
  $= -(3+7) = -10$ και γράφουμε $-3-7=-10$
- $-1-2-3 = -6$

► Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, **αφαιρούμε** τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά τους βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

παράδειγμα:

- $(+3)+(-7) = -(|-7|-|3|)$
  $= -4$ και γράφουμε $3-7=-4$
- $(-3)+(+7) = +(|+7|-|3|)$
  $= 4$ και γράφουμε $-3+7=4$

Πολλαπλασιασμός

► Για να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε στο γινόμενο πρόσημο:

- $+$, αν είναι ομόσημοι
- $-$, αν είναι ετερόσημοι

Δηλαδή:

- ► $+\cdot+ = +$
- ► $+\cdot- = -$
- $-\cdot- = +$
- $-\cdot+ = -$

παράδειγμα:

- ► $(+3)\cdot(+4) = +12$
- ► $(+3)\cdot(-4) = -12$
- $(-3)\cdot(-4) = +12$
- $(-3)\cdot(+4) = -12$

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών ισχύουν οι **ιδιότητες** που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετος - Αντίστροφος αριθμού	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

► • Ο αριθμός 0 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

• Ο αριθμός 1 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

Παρατηρήσεις

► • Στο άθροισμα $\alpha+\beta$, οι α, β λέγονται **όροι** του αθροίσματος.

• Στο γινόμενο $\alpha\cdot\beta$, οι α, β λέγονται **παράγοντες** του γινομένου.

► • Δύο αριθμοί α, β είναι **αντίθετοι,** όταν έχουν άθροισμα μηδέν.
Δηλαδή $\boldsymbol{\alpha+\beta=0}$.

• Ο αντίθετος του α είναι ο $-\alpha$.

► Δύο αριθμοί α, β είναι **αντίστροφοι,** όταν έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα.
Δηλαδή $\boldsymbol{\alpha\beta=1}$.

• Αν $\alpha\neq 0$, τότε ο αντίστροφος του α είναι ο $\frac{1}{\alpha}$.

• Αν $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$, τότε ο αντίστροφος του $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ο $\frac{\beta}{\alpha}$.

• Το 0 δεν έχει αντίστροφο, διότι δεν υπάρχει αριθμός που, όταν τον πολλαπλασιάσουμε με το 0 να δίνει γινόμενο το 1.

Αφαίρεση – Διαίρεση

Η **αφαίρεση** και η **διαίρεση** ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως.

► Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου. Δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

παράδειγμα: $3-5=3+(-5)=-2$

► Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών $\alpha:\beta$, ή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha:\beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}}, \text{ οπότε } \boldsymbol{\alpha:\beta = \frac{\alpha}{\beta}}$$

► Είναι:

- $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$

- $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$
- $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$

παραδείγματα:

- $-6:3=-\frac{6}{3}=-2$
- $-\frac{4}{-8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$
- $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=-\frac{10}{21}$
- $\left(-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{28}$
- $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{8}{15}$
- $\frac{-\frac{5}{3}}{2}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{2}{1}}\ -\frac{10}{3}$

Ιδιότητες πράξεων

1. Στα δύο μέλη μιας ισότητας μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό. Δηλαδή:
   - $\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma}$
   - $\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma}$

2. Τα δύο μέλη μιας ισότητας μπορούμε να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο, μη μηδενικό αριθμό. Δηλαδή:
   - **Αν** $\boldsymbol{\gamma \neq 0}$ **, τότε** $\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma}$ **.**
   - **Αν** $\boldsymbol{\gamma \neq 0}$ **, τότε** $\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}}$ **.**

3. Δύο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε ή να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

   Δηλαδή:
   - $\boldsymbol{(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta}$
   - $\boldsymbol{(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta}$

4. - $\boldsymbol{\alpha \cdot 0 = 0}$
   - $\boldsymbol{\frac{0}{\alpha} = 0}$

5. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

   Δηλαδή $\boldsymbol{\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0}$.

   Είναι $\boldsymbol{\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0}$.

Άρτιοι – Περιττοί – Διαδοχικοί Ακέραιοι

► • **Άρτιοι** ακέραιοι είναι τα πολλαπλάσια του 2 .

Δηλαδή οι αριθμοί: $\ldots, \ -4, \ -2, \ 0, \ 2, \ 4, \ \ldots$

• Ένας ακέραιος α είναι άρτιος, όταν έχει τη μορφή $\boldsymbol{\alpha = 2\kappa}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

► • **Περιττοί** ακέραιοι είναι οι ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 .

Δηλαδή οι αριθμοί: $\ldots, \ -3, \ -1, \ 1, \ 3, \ \ldots$

• Ένας ακέραιος α είναι περιττός, όταν έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{\alpha = 2\kappa + 1} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

► Αν οι αριθμοί α, β, γ με τη σειρά που δίνονται είναι **διαδοχικοί ακέραιοι,** τότε γράφονται:

- $\beta = \alpha + 1, \quad \gamma = \alpha + 2$ ή
- $\alpha = \beta - 1, \quad \gamma = \beta + 1$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι αριθμοί

1. Δίνονται οι αριθμοί:

$$0\,,\quad -2\,,\quad \frac{3}{5}\,,\quad \sqrt{2}\,,\quad 3{,}14\,,\quad \pi\,,\quad 0{,}666\ldots \quad \text{και} \quad 3{,}2572\ldots$$

Να βρείτε, ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι:

α. φυσικοί **β. ακέραιοι** **γ. ρητοί**

δ. άρρητοι **ε. πραγματικοί**

Λύση

α. Φυσικός αριθμός είναι το 0.

β. Ακέραιοι είναι οι αριθμοί: 0 και -2.

γ. Ρητοί είναι οι αριθμοί: 0, -2, $\frac{3}{5}$, $3{,}14$ και $0{,}666\ldots$.

δ. Άρρητοι είναι οι αριθμοί: $\sqrt{2}$, π, $3{,}2572\ldots$

ε. Πραγματικοί είναι όλοι οι δοσμένοι αριθμοί.

Πράξεις

2. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $5-7$ **β.** $-6+1$ **γ.** $-3+5$

δ. $-5-6$ **ε.** $-9+9$ **στ.** $0-7$

Λύση

Έχουμε:

α. $5-7=-2$ **β.** $-6+1=-5$

γ. $-3+5=2$ **δ.** $-5-6=-11$

ε. $-9+9=0$ **στ.** $0-7=-7$

3. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A=-13+8-3+4+3-6$.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= -13+8-\cancel{3}+4+\cancel{3}-6 \\ &= -13+8+4-6 \\ &= -\underbrace{13-6}+\underbrace{8+4} \\ &= -19+12 \\ &= -7 \end{aligned}$$

διαγραφή αντίθετων όρων

χωρισμός αρνητικών και θετικών

Απαλοιφή παρενθέσεων

Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το « + », « – », μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το « + », « – » και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους (με αλλαγμένα πρόσημα).

$$1+(x-y)-(\alpha-\beta) = 1+x-y-\alpha+\beta$$

4. **Να κάνετε τις πράξεις, αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις.**

α. $\mathbf{x+(\alpha-y)-(x-y)}$ **β.** $\mathbf{(-3)+(-7)-(+3)-(-8)}$

Λύση

Έχουμε:

α. $x+(\alpha-y)-(x-y) = \cancel{x}+\alpha-\cancel{y}-\cancel{x}+\cancel{y}$

$= \alpha$

β. $(-3)+(-7)-(+3)-(-8) = -3-7-3+8$

$= -13+8 = -5$

Πολλαπλασιασμός

5. **Να υπολογίσετε τα γινόμενα:**

α. i. $\mathbf{(-3)\cdot(-8)}$ **ii.** $\mathbf{-2\cdot(-5)}$

β. i. $\mathbf{(+5)\cdot(-4)}$ **ii.** $\mathbf{2\cdot(-3)}$

Λύση

α. i. Επειδή οι αριθμοί -3 και -8 είναι ομόσημοι, το γινόμενό τους έχει πρόσημο « + ». Οπότε

$$(-3)\cdot(-8) = 24$$

ii. Είναι $-2\cdot(-5) = 10$.

β. i. Επειδή οι αριθμοί $+5$ και -4 είναι ετερόσημοι, το γινόμενο τους θα έχει πρόσημο « – ». Οπότε

$$(+5)\cdot(-4) = -20$$

ii. Είναι $2\cdot(-3) = -6$.

Γινόμενο πολλών παραγόντων

- Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:
  - το πρόσημο « + », αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο**,
  - το πρόσημο « – », αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό**.
- Αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες ενός γινομένου είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι μηδέν.

6. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $\mathbf{2\cdot(-3)\cdot(-1)}$ **β.** $\mathbf{-5\cdot(-4)\cdot(-2)}$

Λύση

α. Αφού το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι 2, δηλαδή άρτιος αριθμός, το γινόμενο θα έχει πρόσημο « + ». Οπότε

$$2\cdot(-3)\cdot(-1) = 2\cdot 3\cdot 1 = 6$$

β. Αφού το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι 3, δηλαδή περιττός αριθμός, το γινόμενο θα έχει πρόσημο « – ». Οπότε

$$-5\cdot(-4)\cdot(-2) = -40$$

Προτεραιότητα πράξεων

Για να υπολογίσουμε μια παράσταση, πρώτα βρίσκουμε τους όρους από τους οποίους αποτελείται (οι όροι συνδέονται με το $+$ ή το $-$).

Η προτεραιότητα των πράξεων σε κάθε όρο της παράστασης και μετά σε όλη την παράσταση, είναι:

- Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (αν υπάρχουν).
- Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται.
- Κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

7. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $\mathbf{7+3\cdot 2}$ **β.** $\mathbf{13-3\cdot 5+2\cdot(5-8)}$ **γ.** $\mathbf{1-(3-5)\cdot(-3+2)}$

Λύση

α. [*Η παράσταση αποτελείται από 2 όρους, τους εξής: 7 και $3\cdot 2$*
Στο 2^o όρο θα κάνουμε τον πολλαπλασιασμό και στη συνέχεια θα προσθέσουμε τον 1^o όρο με το γινόμενο].

Είναι $7+3\cdot 2 = 7+6 = 13$.

β. [*Η παράσταση αποτελείται από 3 όρους τους εξής:*

$$13\ ,\quad -3\cdot 5 \quad \text{και} \quad 2\cdot(5-8)$$

Στο 2^o όρο θα κάνουμε τον πολλαπλασιασμό και στον 3^o όρο θα κάνουμε την πράξη στην παρένθεση και στη συνέχεια τον πολλαπλασιασμό].

Είναι $13-3\cdot 5+2\cdot(5-8) = 13-15+2\cdot(-3) = -2-6 = -8$.

γ. $1-(3-5)\cdot(-3+2) = 1-(-2)\cdot(-1) = 1-2 = -1$

Πράξεις κλασμάτων

8. **Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:**

α. $\frac{6}{3}$ **β.** $\frac{-5}{15}$ **γ.** $-\frac{-12}{8}$

Λύση

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta}$$

α. $\frac{6}{3} = 6:3 = 2$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : \lambda}{\beta : \lambda}}$$

β. $\frac{-5}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{5:5}{15:5} = -\frac{1}{3}$

γ. $-\frac{-12}{8} = \frac{12}{8} = \frac{12:4}{8:4} = \frac{3}{2}$

9. **Να κάνετε τις πράξεις:**

α. $\frac{1}{3} - \frac{5}{2}$ **β.** $-2 + \frac{5}{3}$ **γ.** $\frac{1}{2} - 1 - \frac{5}{4}$

Λύση

α. $\frac{1}{3} - \frac{5}{2} = \frac{\overset{2}{1}}{3} - \frac{\overset{3}{5}}{2} = \frac{2}{6} - \frac{15}{6} = \frac{2-15}{6} = \frac{-13}{6} = -\frac{13}{6}$

β. $-2 + \frac{5}{3} = -\frac{2}{1} + \frac{5}{3} = -\frac{\overset{3}{2}}{1} + \frac{\overset{1}{5}}{3} = -\frac{6}{3} + \frac{5}{3} = \frac{-6+5}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

γ. $\frac{1}{2} - 1 - \frac{5}{4} = \frac{\overset{2}{1}}{2} - \frac{\overset{4}{1}}{1} - \frac{\overset{1}{5}}{4} = \frac{2-4-5}{4} = \frac{2-9}{4} = -\frac{7}{4}$

10. **Αν** $\frac{\beta}{\alpha} = 2$ **, να υπολογίσετε την παράσταση** $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ **.**

Λύση

Είναι $\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = 1 + 2 = 3$.

$$\boxed{\frac{\alpha+\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}}$$

11. **Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς:**

α. $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$ β. $-3\cdot\frac{2}{5}$ γ. $-\frac{3}{4}\cdot(-6)$

Λύση

Είναι:

α. $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} = -\frac{8}{15}$

β. $-3\cdot\frac{2}{5} = -\frac{3\cdot 2}{5} = -\frac{6}{5}$

γ. $-\frac{3}{4}\cdot(-6) = \frac{3\cdot 6}{4} = \frac{18}{4} = \frac{18:2}{4:2} = \frac{9}{2}$

12. **Να κάνετε τις διαιρέσεις:**

α. $\frac{2}{3}:\left(-\frac{5}{7}\right)$ β. $-3:\left(-\frac{4}{5}\right)$ γ. $-\frac{2}{3}:(-4)$

Λύση

Είναι:

α. $\frac{2}{3}:\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5} = -\frac{14}{15}$

β. $-3:\left(-\frac{4}{5}\right) = -3\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3\cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$

γ. $-\frac{2}{3}:(-4) = -\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2\cdot 1}{3\cdot 4} = \frac{2}{12} = \frac{2:2}{12:2} = \frac{1}{6}$

13. **Αν $\alpha = -2$ και $\beta = -\frac{5}{3}$, να υπολογίσετε την παράσταση**

$$3\alpha - \beta - \alpha\beta$$

Λύση

Είναι

$$3\alpha - \beta - \alpha\beta = 3\cdot(-2) - \left(-\frac{5}{3}\right) - (-2)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = -6 + \frac{5}{3} - \frac{10}{3}$$

$$= \frac{-18+5-10}{3} = -\frac{23}{3}$$

14. **Να μετατρέψετε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά.**

α. $\dfrac{-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{4}{5}}$ **β.** $\dfrac{-2}{-\dfrac{4}{3}}$ **γ.** $-\dfrac{\dfrac{3}{2}}{-3}$

Λύση

Είναι:

$$\frac{\dfrac{\alpha}{\beta}}{\dfrac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

α. $\dfrac{-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{4}{5}} = -\dfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4} = -\dfrac{15}{8}$

β. $\dfrac{-2}{-\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{\dfrac{2}{1}}{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2\cdot 3}{1\cdot 4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{6:2}{4:2} = \dfrac{3}{2}$

γ. $-\dfrac{\dfrac{3}{2}}{-3} = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{1}} = \dfrac{3\cdot 1}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2}$

15. **Να κάνετε τις πράξεις:**

α. $\left(1-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{3}-2\right)$ **β.** $2-\dfrac{2-\dfrac{7}{3}}{1-\dfrac{1}{2}}$

Λύση

Είναι:

α. $\left(1-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{3}-2\right) = \left(\dfrac{\overset{2}{1}}{1}-\dfrac{\overset{1}{3}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\overset{1}{5}}{3}-\dfrac{\overset{3}{2}}{1}\right) = \dfrac{2-3}{2}\cdot\dfrac{5-6}{3} = \dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{-1}{3} = \dfrac{1}{6}$

β. $2-\dfrac{2-\dfrac{7}{3}}{1-\dfrac{1}{2}} = 2-\dfrac{\dfrac{\overset{3}{2}}{1}-\dfrac{\overset{1}{7}}{3}}{\dfrac{\overset{2}{1}}{1}-\dfrac{\overset{1}{1}}{2}} = 2-\dfrac{\dfrac{6-7}{3}}{\dfrac{2-1}{2}} = 2-\dfrac{-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}} = 2+\dfrac{2}{3} = \dfrac{\overset{3}{2}}{1}+\dfrac{\overset{1}{2}}{3} = \dfrac{6+2}{3} = \dfrac{8}{3}$

Επιμεριστική ιδιότητα – Αλγεβρικές παραστάσεις

Την επιμεριστική ιδιότητα $\boldsymbol{\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma}$
τη χρησιμοποιούμε:

1. Για να εκτελούμε **πολλαπλασιασμούς** της μορφής $\alpha\cdot(\beta+\gamma)$.

παράδειγμα: $3\cdot(x+2)=3x+3\cdot 2=3x+6$

2. Για να κάνουμε **αναγωγή όμοιων όρων** $\beta\alpha+\gamma\alpha=(\beta+\gamma)\alpha$.

παράδειγμα: $2x+5x=(2+5)x=7x$

16. **Αν $x=-\dfrac{2}{3}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης**

$$\mathbf{A=2(x+3)-3(2x-1)-9}$$

Λύση

Απλοποιούμε πρώτα την παράσταση A .

Είναι $A=2(x+3)-3(2x-1)-9=2x+6-6x+3-9$

$=2x-6x+6-6=-4x$

Για $x=-\dfrac{2}{3}$, έχουμε $A=-4\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{3}$.

17. **Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=1-2(x-3y)-(x-y)-xy$, για**

$$\mathbf{x=-2 \quad και \quad y=-3}$$

Λύση

Εκτελούμε πρώτα τις πράξεις στην παράσταση A και έχουμε:

$A=1-2(x-3y)-(x-y)-xy=1-2x+6y-x+y-xy$

$=1-3x+7y-xy$

- $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$
- $-(\alpha-\beta)=-\alpha+\beta$

Για $x=-2$ και $y=-3$, έχουμε $A=1-3(-2)+7(-3)-(-2)(-3)$

$=1+6-21-6=1-21=-20$

18. **Να κάνετε τις πράξεις:**

α. $\mathbf{(x+3)\cdot(y+1)}$ **β.** $\mathbf{(2x-5)\cdot(3y+1)}$ **γ.** $\mathbf{3-(x-3)\cdot(y-1)}$

Λύση

α. $(x+3)\cdot(y+1)=xy+x+3y+3$

β. $(2x-5)\cdot(3y+1)=6xy+2x-15y-5$

γ. $3-(x-3)\cdot(y-1)=3-(xy-x-3y+3)=3-xy+x+3y-3=-xy+x+3y$

Η έννοια της εξίσωσης

Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μία ισότητα, που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (άγνωστος).

παράδειγμα: Η ισότητα $3x = 6$ είναι εξίσωση με άγνωστο αριθμό x.

Στην εξίσωση $3x = 6$ η παράσταση που βρίσκεται:

- αριστερά του ίσον λέγεται **1ο μέλος της εξίσωσης**
- δεξιά του ίσον λέγεται **2ο μέλος της εξίσωσης**.

Ο αριθμός 3 λέγεται **συντελεστής** του άγνωστου x.

συντελεστής αγνώστου

$$\underbrace{3x}_{\substack{1^{ο} \\ \text{μέλος}}} = \underbrace{6}_{\substack{2^{ο} \\ \text{μέλος}}}$$

Λύση ή **ρίζα** της εξίσωσης είναι ο αριθμός που όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

παράδειγμα: Ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης $3x = 6$, διότι $3 \cdot 2 = 6$, που ισχύει.

Η διαδικασία μέσω της οποίας βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης λέγεται **επίλυση της εξίσωσης**.

Επίλυση εξισώσεων

Στην επίλυση μιας εξίσωσης χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ιδιότητες των πράξεων:

- Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει πάλι ισότητα. Οπότε:

$$x + \alpha = \beta \Leftrightarrow x + \alpha - \alpha = \beta - \alpha \Leftrightarrow x = \beta - \alpha$$

Άρα $x + \alpha = \beta \Leftrightarrow x = \beta - \alpha$.

Σε μία εξίσωση μπορούμε να "μεταφέρουμε" όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους.

παράδειγμα: $x - 3 = -5 \Leftrightarrow x = -5 + 3 \Leftrightarrow x = -2$

- Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας τα **διαιρέσουμε** με τον ίδιο (μη μηδενικό) αριθμό, τότε προκύπτει πάλι ισότητα.

Οπότε για $\alpha \neq 0$, έχουμε $\alpha x = \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{\alpha}$.

Άρα $\alpha x = \beta \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{\alpha}$.

Δηλαδή, το x είναι ίσο με το πηλίκο του μέλους που δεν το περιέχει προς τον συντελεστή του.

παράδειγμα: $4x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $-3+x=4$ β. $5-x=7$ γ. $7=3-x$

δ. $2=x+5$ ε. $x+2=0$ στ. $3-x=0$

Λύση

α. $-3+x=4 \Leftrightarrow x=4+3 \Leftrightarrow x=7$

β. $5-x=7 \Leftrightarrow -x=7-5 \Leftrightarrow -x=2$

$\Leftrightarrow x=-2$

Σε μία εξίσωση μπορούμε να αλλάξουμε τα πρόσημα και στα δύο μέλη της.

γ. $7=3-x \Leftrightarrow x=3-7 \Leftrightarrow x=-4$

δ. $2=x+5 \Leftrightarrow x+5=2 \Leftrightarrow x=2-5 \Leftrightarrow x=-3$

ε. $x+2=0 \Leftrightarrow x=0-2 \Leftrightarrow x=-2$

στ. $3-x=0 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2x=-5$ β. $4x+6=0$ γ. $1-2x=5$ δ. $2x+3=3$

Λύση

α. $2x=-5 \Leftrightarrow x=\frac{-5}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

β. $4x+6=0 \Leftrightarrow 4x=-6 \Leftrightarrow x=-\frac{6}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

γ. $1-2x=5 \Leftrightarrow -2x=5-1 \Leftrightarrow -2x=4 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{2} \Leftrightarrow x=-2$

δ. $2x+3=3 \Leftrightarrow 2x=3-3 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{0}{2} \Leftrightarrow x=0$

21. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α. $\frac{x}{x-1}$ β. $\frac{x-1}{3x+2}$ γ. $\frac{1}{x}+\frac{x}{x-3}$

Λύση

Πρέπει:

α. $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

$\frac{1}{\alpha}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha\neq 0$

β. $3x+2\neq 0 \Leftrightarrow 3x\neq -2 \Leftrightarrow x\neq -\frac{2}{3}$

γ. $(x\neq 0 \text{ και } x-3\neq 0) \Leftrightarrow (x\neq 0 \text{ και } x\neq 3)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι αριθμοί

1. Δίνονται οι αριθμοί: $-3\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ 2{,}34\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ 3\ ,\ 0{,}333\ldots\ ,\ \pi$.

Να βρείτε, ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι:

α. φυσικοί **β.** ακέραιοι **γ.** ρητοί

δ. άρρητοι **ε.** πραγματικοί

Πράξεις

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α. $10-13$ **β.** $-8+5$ **γ.** $13-8$

δ. $-6-15$ **ε.** $-13+13$ **στ.** $0-35$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α. $-5+3-2+5$ **β.** $7-8+2-5-1$

γ. $-2+5-13+2-7+3$ **δ.** $-6+5-7-3+2-8$

ε. $5-18+7-15+20$ **στ.** $-32+45-25{,}3+7{,}2$

Απαλοιφή παρενθέσεων

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = (\alpha-3)-(\beta-3)+(-\alpha+\beta)$

β. $B = 7-(2+\alpha)-(-\alpha+\beta)+(-3+\beta)$

5. Να κάνετε τις πράξεις, αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις.

α. $(-3)+(-2)-(+7)-(-6)$ **β.** $5-(-8)+(-2)-(+6)+(+3)$

Πολλαπλασιασμός

6. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $(-3)\cdot(-8)$ **β.** $-6\cdot(-7)$ **γ.** $3\cdot(-5)$

δ. $-8\cdot 9$ **ε.** $-3\cdot 0$

7. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $(-6)\cdot(+3)\cdot(-2)$ **β.** $-2\cdot(+3)\cdot(-5)\cdot(-1)$

γ. $-5\cdot(+1)\cdot(-2)\cdot(-6)\cdot(-4)$ **δ.** $-4\cdot(-1)\cdot(+2)\cdot(-3)$

Προτεραιότητα πράξεων

8. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $17-7\cdot 3$ **β.** $-7+7\cdot 2$

γ. $5-5\cdot 2$ **δ.** $1-3\cdot 2+5\cdot(-3)$

ε. $-2\cdot(3-4)+(2-3)\cdot(5-2)$ **στ.** $-2\cdot(-3)+3\cdot(-1)-5$

ζ. $1+4\cdot(-2)\cdot(-1)$ **η.** $9-4\cdot(-3)\cdot(-1)$

θ. $25-4\cdot(-2)\cdot(-3)$

Πράξεις κλασμάτων

9. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α. $\frac{6}{2}$ **β.** $\frac{4}{8}$ **γ.** $\frac{8}{12}$ **δ.** $\frac{-3}{6}$ **ε.** $\frac{-6}{8}$

10. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\frac{5}{3}-\frac{7}{3}$ **β.** $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$ **γ.** $1-\frac{3}{2}$

δ. $\frac{5}{3}-2$ **ε.** $1-\frac{5}{3}-\frac{1}{6}$ **στ.** $-2-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$

11. Αν $\frac{x}{y}=-2$, να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{x-y}{y}$.

12. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς:

α. $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$ **β.** $-2\cdot\frac{7}{5}$ **γ.** $-\frac{2}{3}\cdot(-5)$

13. Να εκτελέσετε τις διαιρέσεις:

α. $\frac{5}{2}:\left(-\frac{3}{7}\right)$ **β.** $-2:\left(-\frac{5}{3}\right)$ **γ.** $-\frac{3}{4}:(-6)$

14. Να μετατρέψετε τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα σε απλά:

α. $\dfrac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{7}{5}}$ **β.** $\dfrac{-3}{-\dfrac{5}{2}}$ **γ.** $-\dfrac{\dfrac{5}{3}}{-2}$

15. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}-1\right)$ **β.** $\left(1-\dfrac{3}{2}\right):\left(\dfrac{5}{3}-2\right)$ **γ.** $\dfrac{1-\dfrac{5}{3}}{\dfrac{3}{2}-2}$

16. Αν $\alpha = -\dfrac{2}{3}$, $\beta = -\dfrac{1}{2}$ και $\gamma = -5$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = 1-\alpha\cdot\beta+\beta:\alpha+\gamma$ **β.** $B = \dfrac{\alpha}{\gamma}-\dfrac{\gamma}{\beta}-1$

Επιμεριστική ιδιότητα – Αλγεβρικές παραστάσεις

17. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια, να βρείτε την αριθμητική τους τιμή για $x=-\dfrac{2}{3}$.

α. $A = 1-(2x-3)+5(x+2)$

β. $B = x+3(x-2)-2(3x-1)$

18. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 1-(2x+y)-3(2x-1)-2y\ ,$$

για $x=-2$ και $y=-\dfrac{3}{2}$.

19. Αν $\alpha+\beta = -1$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $A = 1-3(\alpha-2\beta)+9\alpha$

β. $B = 2(\alpha-3)-3(-\beta+2)-\beta$

20. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι και οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = 2(\alpha-x)-x(y-2)+2\beta$

β. $B = 1-2(\alpha-1)-x(3y-\beta)+\beta(-x-2)$

13 Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

Εξίσωση δευτέρου βαθμού

Ορισμός

Εξίσωση **δευτέρου βαθμού** λέμε την εξίσωση που είναι της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ , με } \alpha \neq 0$$

Η αλγεβρική παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης και συμβολίζεται με Δ. Δηλαδή $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ γράφεται ισοδύναμα $\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4\alpha^2}$ και το πλήθος των ριζών της εξαρτάται από τις τιμές της διακρίνουσας Δ που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$	**Η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0}$**
• $\Delta > 0$	• Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
• $\Delta = 0$	• Έχει διπλή ρίζα τη $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.
• $\Delta < 0$	• Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

► Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$: έχει λύση, όταν $\Delta \geq 0$.

► Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού

1. **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

α. $6x^2-x-1=0$ **β.** $-4x^2+4x-1=0$ **γ.** $x(x-1)=-1$

Λύση

α. Η εξίσωση $6x^2-x-1=0$ είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

με $\alpha=6$, $\beta=-1$, $\gamma=-1$ και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-1)=1+24=25>0$$

Οπότε έχει δύο ρίζες άνισες, τις: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 6}=\dfrac{1\pm 5}{12}$.

Δηλαδή

$$x_1=\frac{1-5}{12}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{1+5}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τις: $x_1=-\dfrac{1}{3}$ και $x_2=\dfrac{1}{2}$.

β. Είναι $-4x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0$

1ος Τρόπος

Έχουμε $\alpha=4$, $\beta=-4$ και $\gamma=1$ και η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot 4\cdot 1=16-16=0$$

Οπότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα τη $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{-4}{2\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$.

2ος Τρόπος

Είναι $4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

γ. Είναι $x(x-1)=-1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0$.

Έχουμε $\alpha=1$, $\beta=-1$ και $\gamma=1$ και διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$$

Οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\mathbf{x^2-4=0}$ **β.** $\mathbf{x^2+1=0}$ **γ.** $\mathbf{x^2-x=0}$

Λύση

α. $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=\pm 2$

β. $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$, που είναι αδύνατη.

γ. $x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

3. Να λύσετε την εξίσωση $\mathbf{(x-1)^2=3-x(x-2)}$.

Λύση

Είναι $(x-1)^2=3-x(x-2) \Leftrightarrow x^2-2x+1=3-x^2+2x$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1-3+x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x-2=0 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x^2-2x-1=0$, (1)

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1(-1)=4+4=8>0$.

Οπότε έχει δύο ρίζες άνισες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot 2}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=\frac{2(1\pm\sqrt{2})}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

Δηλαδή $x_1=1+\sqrt{2}$ και $x_2=1-\sqrt{2}$.

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς: $1+\sqrt{2}$ και $1-\sqrt{2}$.

4. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\mathbf{\dfrac{x}{2x^2-7x+3}}$.

Λύση

Πρέπει $2x^2-7x+3\neq 0$.

Η εξίσωση $2x^2-7x+3=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3=49-24=25>0$$

και ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{7\pm 5}{4}$, οπότε $x_1=3$ και $x_2=\dfrac{1}{2}$.

Επομένως πρέπει $x\neq 3$ και $x\neq\dfrac{1}{2}$.

Άρα η παράσταση ορίζεται στο σύνολο $A=\mathbb{R}-\left\{3\,,\frac{1}{2}\right\}$.

Παραμετρικές εξισώσεις

5. Να λύσετε την εξίσωση $x^2-\lambda x-2\lambda^2=0$, $\lambda\neq 0$.

Λύση

Η εξίσωση $x^2-\lambda x-2\lambda^2=0$, $\lambda\neq 0$ είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με

$$\alpha=1\ ,\quad \beta=-\lambda\quad \text{και}\quad \gamma=-2\lambda^2$$

Έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-\lambda)^2-4\cdot 1\cdot(-2\lambda^2)=\lambda^2+8\lambda^2=9\lambda^2>0\ ,\ \text{για κάθε}\ \ \lambda\neq 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\lambda\pm\sqrt{9\lambda^2}}{2\cdot 1}=\frac{\lambda\pm 3\lambda}{2}$$

Δηλαδή τις $x_1=\dfrac{\lambda+3\lambda}{2}=\dfrac{4\lambda}{2}=2\lambda$ και $x_2=\dfrac{\lambda-3\lambda}{2}=\dfrac{-2\lambda}{2}=-\lambda$.

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς: 2λ και $-\lambda$.

6. Αν η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x-\lambda+1=0$, (1) έχει διπλή ρίζα, να βρείτε το λ και στη συνέχεια τη διπλή ρίζα της (1).

Λύση

- Επειδή η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα, θα έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=0\Leftrightarrow[-(\lambda-1)]^2-4\cdot 1\cdot(-\lambda+1)=0\Leftrightarrow\lambda^2+2\lambda-3=0\ , \qquad (2)$$

- Η διακρίνουσα της εξίσωσης (2) είναι $\Delta'=16>0$ και έχει ρίζες, τις

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 4}{2}=-1\pm 2$$

Δηλαδή $\lambda_1=-1-2=-3$ και $\lambda_2=-1+2=1$.

Επομένως $\lambda=-3$ ή $\lambda=1$.

  - Για $\lambda=-3$ η (1) έχει διπλή ρίζα, τη

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-(\lambda-1)}{2\cdot 1}=\frac{\lambda-1}{2}=\frac{-3-1}{2}=-2$$

  - Για $\lambda=1$ η (1) έχει διπλή ρίζα, τη

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\lambda-1}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$

7. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2-2x-\lambda+2=0$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

Η εξίσωση $x^2-2x-\lambda+2=0$, είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha=1\neq 0$, $\beta=-2$ και $\gamma=-\lambda+2$.

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης εξαρτάται από τις τιμές της διακρίνουσας

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-\lambda+2)=4+4\lambda-8=4\lambda-4=4(\lambda-1)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 4(\lambda-1)>0\Leftrightarrow \lambda-1>0\Leftrightarrow\lambda>1$,
  τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- Αν $\Delta=0\Leftrightarrow 4(\lambda-1)=0\Leftrightarrow\lambda=1$, τότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.
- Αν $\Delta<0\Leftrightarrow\lambda<1$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Εξισώσεις με μορφή: $\alpha\left(A(x)\right)^2+\beta A(x)+\gamma=0$

Μπορούμε να επιλύουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι $2^{ου}$ βαθμού, αλλά με κατάλληλο μετασχηματισμό (βοηθητικό άγνωστο), ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.

Αν μία εξίσωση έχει μορφή

$$\alpha\left(A(x)\right)^2+\beta A(x)+\gamma=0 ,$$

τότε θέτουμε $\mathbf{A(x)=y}$ και η εξίσωση γίνεται $\boldsymbol{\alpha y^2+\beta y+\gamma=0}$, η οποία επιλύεται.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\mathbf{x^2-|x|-2=0}$ **β.** $\mathbf{2x^4+x^2-1=0}$

Λύση

α. Επειδή $x^2=|x|^2$, έχουμε: $x^2-|x|-2=0\Leftrightarrow|x|^2-|x|-2=0$, (1)

Θέτουμε $|x|=y$, (2) .

Οπότε η (1) γράφεται λόγω της (2) , $y^2-y-2=0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=9>0$ και ρίζες τις $y_1=2$ και $y_2=-1$.

- Για $y=2$ η (2) γίνεται $|x|=2\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$.
- Για $y=-1$ η (2) γίνεται $|x|=-1$, που είναι αδύνατη.

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -2 .

β. Είναι $2x^4+x^2-1=0 \Leftrightarrow 2(x^2)^2+x^2-1=0$, (1).
Θέτουμε $x^2=y$, (2).
Οπότε η (1) γίνεται λόγω της (2), $2y^2+y-1=0$
που έχει $\Delta=9$ και ρίζες τις $y_1=\dfrac{1}{2}$ και $y_2=-1$.

Οι εξισώσεις της μορφής $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$ ονομάζονται **διτετράγωνες**.

- Για $y=\dfrac{1}{2}$ η (2) γίνεται $x^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Για $y=-1$ η (2) γίνεται $x^2=-1$, που είναι αδύνατη.

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $3x^2+4x+1=0$ **β.** $x^2-3x+2=0$ **γ.** $2x^2-x-1=0$

δ. $x^2-2x+1=0$ **ε.** $x^2+9=6x$ **στ.** $3x(2-3x)=1$

ζ. $x^2-x+2=0$ **η.** $x(1-2x)=1$ **θ.** $x^2-3x+4=0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2-81=0$ **β.** $x^2-2=0$ **γ.** $-3x^2+1=0$

δ. $x^2+3=0$ **ε.** $x^2=3x$ **στ.** $\dfrac{x}{4}=\dfrac{x^2}{2}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2-2x-1=0$ **β.** $6x^2-12x+3=0$ **γ.** $\dfrac{1}{2}x^2=x+2$

δ. $x+\dfrac{1}{x}=2$ **ε.** $x+\dfrac{2}{x}=4$ **στ.** $x+\dfrac{3}{x}=1$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2-2(x-1)=2x-1$ **β.** $(x-1)^2=3x(x-2)-1$

γ. $(2x-1)^2-3(x-1)=1$ **δ.** $x^2-\dfrac{2x-1}{6}=x-\dfrac{x^2}{3}$

5. Να βρείτε το σύνολο στο οποίο ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις:

α. $\dfrac{x}{3x^2-7x+2}$ **β.** $\dfrac{x+3}{x^2-2x+2}$

Παραμετρικές εξισώσεις

6. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq 0$.

α. Να βρείτε τις τιμές του λ , για την οποίες η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες, για κάθε $\lambda\neq 0$.

7. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές.

α. $\lambda x^2-2x-\lambda=0$, $\lambda\neq 0$ **β.** $\lambda x^2+(\lambda-1)x-1=0$, $\lambda\neq 0$

γ. $\lambda x^2+2x-\lambda-2=0$, $\lambda\neq 0$ **δ.** $x^2+(\lambda^2-1)x-\lambda^2=0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$ **β.** $\lambda^2x^2-3\lambda x-4=0$, $\lambda\neq 0$

γ. $x^2-(\lambda-2)x-\lambda+1=0$ **δ.** $\lambda x^2-2x-\lambda+2=0$, $\lambda\neq 0$

9. Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση $x^2-(2\lambda-1)x+1-2\lambda=0$ να έχει διπλή ρίζα και στη συνέχεια να βρείτε τη διπλή ρίζα.

10. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. $x^2-2x+\lambda=0$ **β.** $x^2-x-\lambda+1=0$

11. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-\lambda+1=0$,

α. έχει δύο ρίζες άνισες **β.** έχει διπλή ρίζα

γ. έχει πραγματικές ρίζες **δ.** δεν έχει καμία πραγματική ρίζα.

Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α΄ Λυκείου
- Γεωμετρία Α΄ Λυκείου
- Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
- Γεωμετρία Β΄ Λυκείου
- Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών
- Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας
- Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α΄ & Β΄
- Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα
- Μαθηματικά Α΄, Β΄, Γ΄ ΕΠΑ.Λ.

ISBN: 978-618-83984-2-9

Λ.Τ. 20,70 €