

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Άλγεβρα

Α΄ Λυκείου

- Θεωρία
- Λυμένες ασκήσεις
- Ασκήσεις για λύση
- Διαγωνίσματα
- Θέματα
- Λύσεις των ασκήσεων
και του Σχολικού Βιβλίου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ τάξης Λυκείου.

Περιέχει:

- ✓ **Αναλυτική θεωρία.**
- ✓ **Παρατηρήσεις στη θεωρία**, στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ✓ **Μεθοδολογία** και **Σχόλια** για τη λύση ασκήσεων.
- ✓ **Λυμένες ασκήσεις**, ως υποδείγματα τρόπου λύσης.
- ✓ **Ασκήσεις για λύση.**
- ✓ **Θέματα** που καλύπτουν όλο το φάσμα των γνώσεων που πρέπει να έχει ο μαθητής, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των εξετάσεων.
- ✓ **Διαγωνίσματα** ανά διδακτική ενότητα.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν:

- **Οι λύσεις των ασκήσεων για λύση** του βιβλίου αυτού .
- **Οι λύσεις των ασκήσεων για λύση** του σχολικού βιβλίου.

Ιούνιος 2019

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1° ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Το λεξιλόγιο της λογικής	6
2. Σύνολα	10
3. Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους	20
4. Δυνάμεις	30
5. Αξιοσημείωτες ταυτότητες	38
6. Παραγοντοποίηση	50
7. Διάταξη πραγματικών αριθμών	67
8. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού	98
9. Ρίζες πραγματικών αριθμών	119

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2° ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

10. Η εξίσωση $ax + b = 0$	148
11. Εξισώσεις με απόλυτες τιμές	162
12. Η εξίσωση $x^v = a$	170
13. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$	176
14. Άθροισμα και γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$...	184
15. Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	197

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3° ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

16. Ανισώσεις 1 ^{ου} βαθμού	204
17. Ανισώσεις με απόλυτες τιμές	211
18. Μορφές τριωνύμου	222
19. Ανισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	229

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4° ΠΡΟΟΔΟΙ

20. Ακολουθίες	250
21. Αριθμητική πρόοδος	256
22. Γεωμετρική πρόοδος	274

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5° ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

23. Η έννοια της συνάρτησης	290
24. Καρτεσιανές συντεταγμένες	307
25. Γραφική παράσταση συνάρτησης	314
26. Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$	327
27. Μονοτονία, Ακρότατα, Άρτια – Περιττή συνάρτηση	350

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6° ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

28. Μελέτη των συναρτήσεων:

$$f(x) = ax^2, \quad f(x) = ax^3, \quad f(x) = \frac{a}{x}, \quad a \neq 0, \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \dots\dots\dots 356$$

29. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$	365
--	-----

ΘΕΜΑΤΑ και ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

384

• Λύσεις των Ασκήσεων για λύση και Θεμάτων	412
• Λύσεις των Ασκήσεων του σχολικού βιβλίου	522



Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Γεωμετρικός Ορισμός

Έστω ένας αριθμός a που παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα.

Απόλυτη τιμή του αριθμού a ονομάζεται η απόσταση του σημείου A από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

Είναι δηλαδή $|a| = (OA)$. Οπότε:

- $|3| = (OA) = 3$, $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

και γενικά $|a| = a$, για κάθε $a > 0$. Δηλαδή

Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

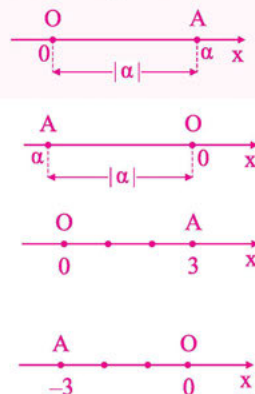
- $|-3| = (OA) = 3 = -(-3)$, $|\sqrt{5}| = \sqrt{5} = -(-\sqrt{5})$

και γενικά $|a| = -a$, για κάθε $a < 0$. Δηλαδή

Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

- $|0| = 0$

- $|a| \geq 0$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Το « $=$ » ισχύει μόνο για $a = 0$.



Αλγεβρικός Ορισμός

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού a , συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται

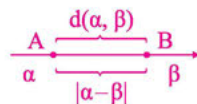
από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}.$$

Απόσταση δύο αριθμών

Απόσταση των αριθμών a και β λέγεται το μήκος του τμήματος AB , συμβολίζεται με $d(a, \beta)$ και είναι ίση με $|a - \beta|$.

Είναι δηλαδή $d(a, \beta) = |a - \beta|$.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

Απλοποίηση παραστάσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές

1. Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

α. $A = |-3| + |\sqrt{2}| - |-5|$

β. $B = |\pi - 3| + |\pi - 4|$

γ. $\Gamma = |\sqrt{5} - 2| + |\sqrt{5} - 3|$

Λύση

α. Είναι: $\bullet -3 < 0$, οπότε $|-3| = -(-3) = 3$

$\bullet \sqrt{2} > 0$, οπότε $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

$\bullet -5 < 0$, οπότε $|-5| = 5$

Άρα $A = |-3| + |\sqrt{2}| - |-5| = 3 + \sqrt{2} - 5 = -2 + \sqrt{2}$.

β. Είναι $3 < \pi < 4 \Rightarrow \pi > 3$ και $\pi < 4$

$\Rightarrow \pi - 3 > 0$ και $\pi - 4 < 0$

$\Rightarrow |\pi - 3| = \pi - 3$ και $|\pi - 4| = -\pi + 4$

Άρα $B = |\pi - 3| + |\pi - 4| = \pi - 3 - \pi + 4 = 1$.

γ. Είναι $2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow \sqrt{5} > 2$ και $\sqrt{5} < 3$

$\Rightarrow \sqrt{5} - 2 > 0$ και $\sqrt{5} - 3 < 0$

Άρα $\Gamma = |\sqrt{5} - 2| + |\sqrt{5} - 3| = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} + 3 = 1$.

Για να κάνουμε απλοποίηση του απόλυτου στην παράσταση $|a|$, εξετάζουμε αν $a \geq 0$ ή $a < 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό.

2. Να γράψετε την παράσταση

$$A = |x^2 - 2x + 1| - |-x^2 - 1|$$

χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Λύση

Είναι: $\bullet x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$, οπότε $|x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$

$\bullet -x^2 - 1 = -(x^2 + 1) < 0$, οπότε $|-x^2 - 1| = x^2 + 1$

Άρα $A = |x^2 - 2x + 1| - |-x^2 - 1| = x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 1)$

$= x^2 - 2x + 1 - x^2 - 1 = -2x$

3. Αν $2 < x < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |x-2| + |x-3|$

β. $B = |1 - |x-2||$

γ. $\Gamma = |x-1| - |x-4|$

Λύση

α. Έχουμε $2 < x < 3 \Rightarrow x > 2$ και $x < 3$

$$\Rightarrow x-2 > 0 \text{ και } x-3 < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } A &= |x-2| + |x-3| = x-2 + (-x+3) \\ &= x-2-x+3 = 1. \end{aligned}$$

β. Έχουμε $2 < x < 3 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x-2 > 0$.

$$\text{Οπότε } B = |1 - (x-2)| = |1 - x + 2| = |3 - x|.$$

$$\text{Είναι } 2 < x < 3 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 3 - x > 0, \text{ οπότε } B = 3 - x.$$

γ. Έχουμε $2 < x < 3 \Rightarrow x > 2$ και $x < 3 \Rightarrow x-1 > 2-1$ και $x-4 < 3-4$

$$\Rightarrow x-1 > 1 \text{ και } x-4 < -1 \Rightarrow x-1 > 0 \text{ και } x-4 < 0$$

$$\text{Άρα } \Gamma = |x-1| - |x-4| = x-1 - (-x+4) = x-1+x-4 = 2x-5.$$

Αν έχουμε περιορισμούς για τις μεταβλητές που βρίσκονται μέσα στις απόλυτες τιμές, τότε από αυτούς συνθετικά κατασκευάζουμε τις παραστάσεις που είναι μέσα στις απόλυτες τιμές και βρίσκουμε το πρόσημό τους.

4. Αν $\alpha < 2 < \beta$, να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = |2\alpha - 5| + |3\alpha - \beta - 4|$$

Λύση

$$\text{Είναι: } \blacktriangleright \alpha < 2 \Rightarrow 2\alpha < 4 \Rightarrow 2\alpha - 5 < 4 - 5 \Rightarrow 2\alpha - 5 < -1 \Rightarrow 2\alpha - 5 < 0$$

$$\blacktriangleright \bullet \alpha < 2 \Rightarrow 3\alpha < 6, (1)$$

$$\bullet \beta > 2 \Rightarrow -\beta < -2, (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και έχουμε

$$3\alpha - \beta < 4 \Rightarrow 3\alpha - \beta - 4 < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } A &= |2\alpha - 5| + |3\alpha - \beta - 4| = -2\alpha + 5 + (-3\alpha + \beta + 4) \\ &= -2\alpha + 5 - 3\alpha + \beta + 4 = -5\alpha + \beta + 9 \end{aligned}$$

5. Να γράψετε την παράσταση $A = |x+2| - 3x+1$, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.**Λύση**

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$\bullet \text{ Αν } x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2, \text{ τότε } |x+2| = x+2, \text{ οπότε}$$

$$A = x+2-3x+1 = -2x+3$$

$$\bullet \text{ Αν } x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2, \text{ τότε } |x+2| = -x-2, \text{ οπότε}$$

$$A = -x-2-3x+1 = -4x-1$$

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} -2x+3, & \text{αν } x \geq -2 \\ -4x-1, & \text{αν } x < -2 \end{cases}.$$

Συνέπειες ορισμού απόλυτης τιμής

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής προκύπτει ότι:

- $|-a| = |a|$
- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$
- $|a|^2 = a^2$

$$|-a| = |a|$$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |x-2| - |2-x|$

β. $B = \frac{|a-1|}{|1-a|} - \frac{|-\beta-1|}{|\beta+1|} + \frac{|a-\beta+\gamma|}{|\beta-a-\gamma|}$

Λύση

[Επειδή ισχύει $|-a| = |a|$ μπορούμε να αλλάζουμε τα πρόσημα όλων των όρων μιας παράστασης που είναι μέσα σε απόλυτο].

α. Είναι $A = |x-2| - |2-x| = |x-2| - |x-2| = 0$.

β. Είναι
$$A = \frac{|a-1|}{|1-a|} - \frac{|-\beta-1|}{|\beta+1|} + \frac{|a-\beta+\gamma|}{|\beta-a-\gamma|} = \frac{|a-1|}{|a-1|} - \frac{|\beta+1|}{|\beta+1|} + \frac{|a-\beta+\gamma|}{|a-\beta+\gamma|}$$
$$= 1 - 1 + 1 = 1$$

$$|a| \geq a \text{ και } |a| \geq -a$$

7. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |x|-x - |x|+x$.

Λύση

Είναι: • $|x| \geq x \Rightarrow |x| - x \geq 0$

• $|x| \geq -x \Rightarrow |x| + x \geq 0$

Άρα $A = |x|-x - |x|+x = |x|-x - (|x|+x) = |x|-x - |x|-x = -2x$.

$$|a|^2 = a^2$$

8. Να δείξετε ότι $|a+\beta|^2 + |a-\beta|^2 = 2|a|^2 + 2|\beta|^2$.

Λύση

Είναι
$$|a+\beta|^2 + |a-\beta|^2 = (a+\beta)^2 + (a-\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2 + a^2 - 2a\beta + \beta^2$$
$$= 2a^2 + 2\beta^2 = 2|a|^2 + 2|\beta|^2$$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Οι απόλυτες τιμές έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

$$1. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$2. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Απόδειξη

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$\begin{aligned} |a \cdot b| = |a| \cdot |b| &\Leftrightarrow |a \cdot b|^2 = (|a| \cdot |b|)^2 \\ &\Leftrightarrow |a \cdot b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 \\ &\Leftrightarrow (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. ■

- Η ισότητα $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Δηλαδή

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, έχουμε:

$$|a^n| = |a|^n$$

9. Να δείξετε ότι:

$$\alpha. |2a - 6| - 6 \left| \frac{a}{3} \right| = 0$$

$$\beta. |3a - 6| - 6 \left| 1 - \frac{a}{2} \right| = 0$$

Λύση

Είναι:

$$\begin{aligned} \alpha. |2a - 6| - 6 \left| \frac{a}{3} \right| &= |2||a| - 6 \frac{|a|}{|3|} = 2|a| - 6 \frac{|a|}{3} \\ &= 2|a| - 2|a| = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. |3a - 6| - 6 \left| 1 - \frac{a}{2} \right| &= |3(a - 2)| - 6 \left| \frac{2 - a}{2} \right| \\ &= 3|a - 2| - 6 \cdot \frac{|2 - a|}{2} \\ &= 3|a - 2| - 3|a - 2| = 0 \end{aligned}$$

Τριγωνική ανισότητα

$$3. \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha \cdot \beta| + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha \cdot \beta| \\ &\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta| \geq \alpha\beta, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

- Η ισότητα $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ ισχύει, αν και μόνο αν $|\alpha\beta| = \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0$.
Δηλαδή, οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Παρατηρήσεις

Είναι $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta > 0 \text{ ή } \alpha\beta = 0$.

- Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους.
Δηλαδή $|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|$.

παράδειγμα: Αν $|x| \leq 2$, $|y| \leq 3$ και $|z| \leq 1$, τότε
 $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z| \leq 2 + 3 + 1 = 6$

* Αποδεικνύεται ότι $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, (I).

Η διπλή ανισότητα (I) λέγεται **τριγωνική ανισότητα**.

10. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 2$ και $|\gamma| = 3$, να δείξετε ότι:

$$\alpha. \quad |\alpha + \beta + \gamma| \leq 6$$

$$\beta. \quad |\alpha - \beta + 2\gamma| \leq 9$$

Λύση

Εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα και έχουμε:

$$\alpha. \quad |\alpha + \beta + \gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\begin{aligned} \beta. \quad |\alpha - \beta + 2\gamma| &= |\alpha + (-\beta) + 2\gamma| \leq |\alpha| + |-\beta| + |2\gamma| \\ &= |\alpha| + |\beta| + 2|\gamma| = 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9 \end{aligned}$$

Εξισώσεις

Αν σε έναν άξονα το σημείο M αντιστοιχεί στον αριθμό x , τότε η εξίσωση $|x|=2$ γεωμετρικά σημαίνει:

Ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το O απόσταση ίση με 2 ;

Δηλαδή $|x|=2 \Leftrightarrow (OM)=2$.



Προφανώς το M είναι το A ή το B που αντιστοιχούν στους αριθμούς -2 και 2 .

Άρα $x=-2$ ή $x=2$.

Γενικά

► • Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

• $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ ή $x = -a$ [αφού $\pm |a| = \pm a$]

11. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει:

α. $|x|=3$

β. $3|x|-2=0$

γ. $|x|+1=0$

δ. $|x-3|-5=0$

ε. $|4x-3|-|3x-4|=0$

στ. $x^2-3|x|=0$

Λύση

α. $|x|=3 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$

β. $3|x|-2=0 \Leftrightarrow 3|x|=2 \Leftrightarrow |x|=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ ή $x=-\frac{2}{3}$.

γ. $|x|+1=0 \Leftrightarrow |x|=-1$, που είναι αδύνατη.

δ. $|x-3|-5=0 \Leftrightarrow |x-3|=5 \Leftrightarrow x-3=5$ ή $x-3=-5$
 $\Leftrightarrow x=3+5$ ή $x=3-5$
 $\Leftrightarrow x=8$ ή $x=-2$

ε. $|4x-3|-|3x-4|=0 \Leftrightarrow |4x-3|=|3x-4|$
 $\Leftrightarrow 4x-3=3x-4$ ή $4x-3=-(3x-4)$
 $\Leftrightarrow 4x-3x=3-4$ ή $4x-3=-3x+4$
 $\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

στ. $x^2-3|x|=0 \Leftrightarrow |x|^2-3|x|=0 \Leftrightarrow |x|(|x|-3)=0 \Leftrightarrow |x|=0$ ή $|x|-3=0$
 $\Leftrightarrow x=0$ ή $|x|=3 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=3$ ή $x=-3$

Ανισώσεις

Αν σε έναν άξονα το σημείο M αντιστοιχεί στον αριθμό x , τότε η ανίσωση $|x| < 2$ γεωμετρικά σημαίνει:

- Ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το O απόσταση μικρότερη από 2 ;

$$\text{Δηλαδή } |x| < 2 \Leftrightarrow (OM) < 2.$$

Προφανώς το M είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος AB . Άρα $-2 < x < 2$



- Όμοια έχουμε $|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 2$.

Γενικά

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
- $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$

12. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει:

α. $|x| < 2$ **β.** $|x| - 5 \geq 0$ **γ.** $|2x - 1| - 3 < 0$ **δ.** $d(x, -2) \geq 1$

Λύση

α. $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

β. $|x| - 5 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -5$ ή $x \geq 5$

γ. $|2x - 1| - 3 < 0 \Leftrightarrow |2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

δ. $d(x, -2) \geq 1 \Leftrightarrow |x - (-2)| \geq 1 \Leftrightarrow |x + 2| \geq 1 \Leftrightarrow x + 2 \leq -1$ ή $x + 2 \geq 1$

$$\Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq -1$$

13. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει:

α. $x^2 - 4 < 0$ **β.** $|x + 2| < |x - 4|$

Λύση

α. Είναι $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow |x|^2 < 2^2 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$.

β. Επειδή τα μέλη της σχέσης $|x + 2| < |x - 4|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} |x + 2| < |x - 4| &\Leftrightarrow |x + 2|^2 < |x - 4|^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 < (x - 4)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 < x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow 12x < 12 \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

Απόσταση δύο αριθμών

14. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

Λύση

Είναι:

$$\bullet \bullet |x+2| < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - (-2)| < 4$$

$$\Leftrightarrow d(x, -2) < 4$$

$$\bullet |x+2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x+2 < 4 \Leftrightarrow -6 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-6, 2)$$

$$\bullet d(x, 3) > 2 \Leftrightarrow |x-3| > 2$$

$$\Leftrightarrow x-3 < -2 \text{ ή } x-3 > 2 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 5$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$$

$$\bullet \text{ Το διάστημα } [-3, 1] \text{ έχει κέντρο το } x_0 = \frac{-3+1}{2} = -1,$$

$$\text{οπότε } x \in [-3, 1] \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \stackrel{-(-1)}{\Leftrightarrow} -2 \leq x+1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow |x+1| \leq 2 \Leftrightarrow d(x, -1) \leq 2$$

$$\bullet \text{ Το διάστημα } [-3, 5] \text{ έχει κέντρο το } x_0 = \frac{-3+5}{2} = 1,$$

$$\text{οπότε } x \in (-\infty, -3] \cup [5, +\infty) \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 5$$

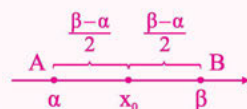
$$\stackrel{-1}{\Leftrightarrow} x-1 \leq -4 \text{ ή } x-1 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow |x-1| \geq 4 \Leftrightarrow d(x, 1) \geq 4$$

$$\text{Ο αριθμός } \frac{\alpha+\beta}{2}$$

που αντιστοιχεί στο μέσο του AB λέγεται **κέντρο** του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, ενώ ο αριθμός $\rho = \frac{\beta-\alpha}{2}$

λέγεται **ακτίνα** του $[\alpha, \beta]$.



Άρα ο πίνακας γίνεται:

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x+2 < 4$	$d(x, -2) < 4$	$(-6, 2)$
$ x-3 > 2$	$d(x, 3) > 2$	$(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$
$ x+1 \leq 2$	$d(x, -1) \leq 2$	$[-3, 1]$
$ x-1 \geq 4$	$d(x, 1) \geq 4$	$(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

- 15.** Να γράψετε την παράσταση $A = 2|x-1| - |x-2|$,
χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Λύση

- Είναι: $\bullet \quad x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
 $\bullet \quad x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x-1	-	0	+	+
x-2	-	-	0	+

- Από το διπλανό πίνακα προσήμων των
x-1 και x-2 έχουμε:

- Αν $x \leq 1$, τότε $x-1 \leq 0$ και $x-2 < 0$.
Επομένως $|x-1| = -x+1$ και $|x-2| = -x+2$.
Οπότε $A = 2(-x+1) - (-x+2) = -2x+2+x-2 = -x$.
- Αν $1 < x \leq 2$, τότε $|x-1| = x-1$ και $|x-2| = -x+2$.
Οπότε $A = 2(x-1) - (-x+2) = 2x-2+x-2 = 3x-4$.
- Αν $x > 2$, τότε $A = 2(x-1) - (x-2) = 2x-2-x+2 = x$.

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} -x & , \text{ αν } x \leq 1 \\ 3x-4 & , \text{ αν } 1 < x \leq 2 \\ x & , \text{ αν } x > 2 \end{cases}$$

Γενικές

- 16.** Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$.

- α.** Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A.
β. Να απλοποιήσετε την παράσταση A.
γ. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $A \leq 3$.

Λύση

- α.** Η παράσταση A ορίζεται για εκείνες τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει
 $|x| - 1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$

- β.** Είναι $x^2 - |x| = |x|^2 - |x| = |x|(|x| - 1)$.

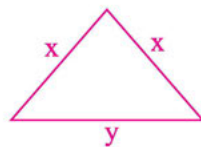
$$\text{Για κάθε } x \neq \pm 1, \text{ έχουμε } A = \frac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} = |x|.$$

- γ.** Είναι $A \leq 3 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Αφού $x \neq \pm 1$, έχουμε $x \in [-3, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3]$.



17. Αν $|x-3| < 0,2$ και $|y-4| < 0,1$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου Π του διπλανού τριγώνου.



Λύση

Η περίμετρος του τριγώνου είναι: $\Pi = 2x + y$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } & \bullet \quad |x-3| < 0,2 \Leftrightarrow -0,2 < x-3 < 0,2 \Leftrightarrow 3-0,2 < x < 3+0,2 \\ & \Leftrightarrow 2,8 < x < 3,2 \Leftrightarrow 5,6 < 2x < 6,4, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad |y-4| < 0,1 \Leftrightarrow -0,1 < y-4 < 0,1 \Leftrightarrow 4-0,1 < y < 4+0,1 \\ & \Leftrightarrow 3,9 < y < 4,1, \end{aligned} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει:

$$5,6 + 3,9 < 2x + y < 6,4 + 4,1$$

Άρα $9,5 < \Pi < 10,5$.

Αποδεικτικές

18. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2 & \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha| \cdot |\beta| \\ & \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

19. Για κάθε πραγματικό αριθμό x , να δείξετε ότι $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2} & \Leftrightarrow \frac{|x|}{|1+x^2|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow 2|x| \leq 1+x^2 \quad [\text{διότι } 1+x^2 > 0] \\ & \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2|x| \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 1 - 2|x| \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

20. Αν $|x| \leq 1$, να δείξετε ότι $|x^3 - 5x^2 + 3x - 1| \leq 10$.

Λύση

Είναι $|x^3 - 5x^2 + 3x - 1| \leq |x^3| + |-5x^2| + |3x| + |-1| = |x|^3 + 5|x|^2 + 3|x| + 1$.

Επειδή $|x| \leq 1$, έχουμε:

- $|x|^3 \leq 1^3 = 1$
- $|x|^2 \leq 1^2 = 1 \Rightarrow 5|x|^2 \leq 5$
- $3|x| \leq 3$

Οπότε $|x|^3 + 5|x|^2 + 3|x| + 1 \leq 1 + 5 + 3 + 1 = 10$

Άρα $|x^3 - 5x^2 + 3x - 1| \leq 10$.

Γενικές

21. Αν $0 < \alpha < 1$, να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός α βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ότι ο αριθμός $\frac{1}{\alpha}$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $d(\alpha, 1) < d(\frac{1}{\alpha}, 1) \Leftrightarrow |\alpha - 1| < \left| \frac{1}{\alpha} - 1 \right|$, (1).

Από τη σχέση $0 < \alpha < 1$, έχουμε:

- $\alpha - 1 < 0$
- $\frac{1}{\alpha} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$

Οπότε η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} -\alpha + 1 < \frac{1}{\alpha} - 1 &\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} > 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 > 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 > 0, \text{ που ισχύει αφού } \alpha \neq 1. \end{aligned}$$

22. Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς x, y , ισχύει $|x|y - x|y| = 0$, να δείξετε ότι οι x, y είναι ομόσημοι.

Λύση

Έχουμε $|x|y - x|y| = 0 \Rightarrow |x|y = x|y| \Rightarrow \frac{|x|}{|y|} = \frac{x}{y} \Rightarrow \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} > 0$.

Άρα οι αριθμοί x, y είναι ομόσημοι.

23. Αν $x^2 + y^2 = 2$, να δείξετε ότι $-2 \leq x + y \leq 2$.

Λύση

Είναι $-2 \leq x + y \leq 2 \Leftrightarrow |x + y| \leq 2 \Leftrightarrow |x + y|^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 \leq 4$
 $\Leftrightarrow (x + y)^2 \leq 2 \cdot (x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq 2x^2 + 2y^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Συνοπτική θεωρία

Ορισμός

$$\bullet \quad |a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad |a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$\bullet \quad |a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0$$

$$\bullet \quad |a| \neq a \Leftrightarrow a < 0$$

$$\bullet \quad |a| \neq -a \Leftrightarrow a > 0$$

Ιδιότητες

$$1. \quad |a| \geq 0$$

$$\bullet \quad |a| > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$$

$$2. \quad |-a| = |a|$$

$$3. \bullet \quad |a| \geq a \Leftrightarrow |a| - a \geq 0$$

$$\bullet \quad |a| \geq -a \Leftrightarrow |a| + a \geq 0$$

$$\bullet \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

$$4. \bullet \quad |a|^2 = a^2$$

$$\bullet \quad |a|^{2v} = a^{2v}, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$\bullet \quad |a^v| = |a|^v, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$5. \bullet \quad |ab| = |a||b|$$

$$\bullet \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$$

Εξισώσεις – Ανισώσεις

$$1. \bullet \quad \text{Αν } \theta > 0, \text{ τότε: } |x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$$

$$\bullet \quad |x| = |\theta| \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$$

$$2. \text{ Αν } \rho > 0, \text{ τότε: } \bullet \quad |x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

$$\bullet \quad |x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$$

Τριγωνική ανισότητα

$$1. \bullet \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$2. \bullet \quad \text{Αν } a, b \text{ ομόσημοι, τότε } |a + b| = |a| + |b|.$$

$$\bullet \quad \text{Αν } a, b \text{ ετερόσημοι, τότε } |a + b| = ||a| - |b||.$$

$$\bullet \quad |a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a, b: \text{ομόσημοι}) \text{ ή } (a = 0 \text{ ή } b = 0)$$

9. Αν $-1 < x < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |x+2| + |x-4|$

β. $B = |6 - |x-5||$

10. Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |\beta - \alpha| + |\beta - \gamma| + |\gamma - \alpha|$

β. $B = ||\alpha - \beta| + |\beta - \gamma||$

11. Αν $\alpha < -1 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |\alpha| + |\alpha+1| - |\alpha-\beta|$

β. $B = |\alpha+1| - |\beta+1| + |\beta-\alpha|$

12. Αν $-2 < \alpha < 1$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |\alpha+2| - |\alpha-1|$

β. $B = |\alpha+3| - |\alpha-2|$

γ. $\Gamma = |2\alpha+5| - |3\alpha-4|$

13. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |3x - y|$

β. $B = |xy - 9|$

γ. $\Gamma = |x - \frac{1}{y}|$

14. Να γράψετε την παράσταση $A = |x-2| + 3x-1$, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Συνέπειες ορισμού απόλυτης τιμής

15. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |x-3| - |3-x|$

β. $B = \frac{|2x-1|}{|1-2x|} - 3 \frac{|3y+2|}{|-2-3y|} + 2 \frac{|x-y+z|}{|y-x-z|}$

16. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |x-|x|| - |x+|x||$.

17. Να αποδείξετε ότι:

α. $(|\alpha| - \alpha)(|\alpha| + \alpha) = 0$

β. $|\alpha+1|^2 + |\alpha-1|^2 = 2|\alpha|^2 + 2$

Ιδιότητες απόλυτης τιμής

18. Να δείξετε ότι:

α. $|3\alpha| - 6|\frac{\alpha}{2}| = 0$

β. $|2\alpha-6| - 6|1-\frac{\alpha}{3}| = 0$

19. Αν $x < 2$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |3x - 6| - |4 - 2x| + x$

β. $B = 4 \left| \frac{x}{2} - 1 \right| + 8 \left| \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \right|$

Τριγωνική ανισότητα

20. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν:

$$|\alpha| = 2, |\beta| = 3 \text{ και } |\gamma| = 4$$

να δείξετε ότι:

α. $|\alpha + \beta + \gamma| \leq 9$

β. $|\alpha - \beta + 3\gamma| \leq 17$

Εξισώσεις

21. Να βρείτε τις τιμές του x που ικανοποιούν τις σχέσεις:

α. $|x| = 1$

β. $|x| - 3 = 0$

γ. $3|x| - 5 = 0$

δ. $|x| + 2 = 0$

ε. $2|x| - 5| - x| + 6 = 0$

στ. $|2x| - \left| \frac{x}{2} \right| - 1 = 0$

ζ. $x^2 - 2|x| = 0$

22. Να βρείτε τις τιμές του x που ικανοποιούν τις σχέσεις:

α. $|x - 1| = 5$

β. $|x - 2| - 1 = 0$

γ. $3|x - 2| - 2|2 - x| - 5 = 0$

δ. $|3x - 6| - |4 - 2x| = 1$

23. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει:

α. $|2x - 1| = |x - 2|$

β. $|3x - 2| - |2x - 3| = 0$

γ. $3|x - 2| - 2|x| = 0$

Ανισώσεις

24. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει:

α. $|x| < 5$

β. $|x| \geq 2$

γ. $3|x| - 2 < 0$

δ. $2 - 3|x| \leq 0$

25. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει:

α. $|x - 1| < 3$

β. $|x - 2| \geq 5$

γ. $|3x - 2| - 1 < 0$

26. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει:

α. $d(x, -5) \geq 2$

β. $|x - 1| < |x - 3|$

γ. $d(2x, 1) > d(2x, 3)$

δ. $x^2 < 9$

ε. $x^2 > 1$

στ. $4x^2 < 25$

Απόσταση δύο αριθμών

27. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x-1 \leq 3$	$d(x, 1) \leq 3$	$[-2, 4]$
$ x+2 < 4$		
$ x-1 > 2$		
$ x+2 \geq 4$		
	$d(x, 1) < 2$	
	$d(x, -1) \geq 5$	
		$[-1, 7]$
		$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

28. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α. $A = |x-1| - 2x + 3$

β. $B = |x-3| + x - 1$

γ. $\Gamma = \frac{|x+1| + |x-1|}{2}$

δ. $\Delta = |x| - |x-1| + |x-2|$

29. Αν $|a-2\beta| = 1$, να δείξετε ότι $a = 2\beta + 1$ ή $a = 2\beta - 1$.

30. Αν ισχύει:

α. $|2\alpha - \beta| = |\alpha - 2\beta|$, να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ίσοι ή αντίθετοι.

β. $|3\alpha - \beta| - |\alpha + 2\beta| = 0$ και $\beta \neq 0$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{4}$.

31. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{|x|}{x} - \frac{|y|}{y}$.

32. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1| < 1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.

β. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

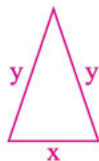
i. $\left| \frac{x}{x-1} \right|$

ii. $|x^2 - x|$

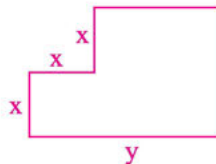
γ. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:
1, x , x^2

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33. Αν $|x-1| < 0,2$ και $|y-2| < 0,3$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου του διπλανού σχήματος.



34. Αν $|x-1| < 0,1$ και $|y-4| < 0,2$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου του διπλανού σχήματος.



35. Αν $|x-3| < 3$ και $|y-3| < 1$, τότε:
α. Να δείξετε ότι $0 < x < 6$ και $2 < y < 4$.

β. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $A = |x-6| + |y-2|$ ii. $B = \left| \frac{x}{y-4} \right|$ iii. $\Gamma = |xy - 4x|$

iv. $\Delta = |x-y-4|$ v. $E = \left| \frac{x}{y} - 3 \right|$

γ. Να δείξετε ότι $|2x-y-3| < 7$.

36. Αν $|x+y-3| < 2$ και $|x-y-5| < 2$, να δείξετε ότι $x \in (2, 6)$ και $y \in (-3, 1)$.

37. Αν $|5x-y+1| < 4$ και $|2x+y-1| < 3$, τότε:

α. Να δείξετε ότι $|x| < 1$ και $y \in (-\frac{16}{7}, \frac{30}{7})$.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |x+1| + |7y+16|$.

38. Να βρείτε τις τιμές των x, y , για τις οποίες ισχύει:

α. $|x+2| + |3x-2y-1| = 0$ β. $|x-y+1| + x^2 = 2x-1$

γ. $|2x+y-3| + |3x-y-2| = 0$

39. Να βρείτε τις τιμές των x, y , για τις οποίες ισχύουν:

α. $y \geq 1$ και $y + |x-2| = 1$ β. $y \leq -2$ και $y+2 = |x-1|$

Αποδεικτικές

40. Να δείξετε ότι:

α. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2|\alpha\beta|$

β. $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

41. Να δείξετε ότι:

α. $\left| \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \right| \leq 1$

β. $\left| \frac{\alpha}{\alpha^2+9} \right| \leq \frac{1}{6}$

- 42.** Αν $-1 \leq x \leq 1$, να δείξετε ότι $|x^3 - 3x^2 + 2x - 1| \leq 7$.
- 43. α.** Αν $|z-1| \leq 3$ και $|w-3| \leq 1$, να δείξετε ότι $|z+w-2| \leq 6$.
- β.** Αν $|z-2| \leq 3$ και $|w+3| \leq 2$, να δείξετε ότι $|z-w+1| \leq 11$.
- 44.** Να βρείτε τις τιμές του x , όταν:
- α.** $\left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 1$ **β.** $\left| \frac{2}{x} - 3 \right| < 1$
- 45.** Αν $\alpha > 1$, να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα, ο αριθμός $\frac{1}{\alpha}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1, από ότι ο αριθμός α .
- 46.** Αν ισχύει $\left| \frac{3\alpha+1}{\alpha+3} \right| < 1$, να δείξετε ότι $|\alpha| < 1$.

Γενικές

- 47.** Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό α , για τον οποίο ισχύει $d(\alpha, 0) < 1$.
- α.** Να δείξετε ότι $|2 - |\alpha - 1|| = \alpha + 1$.
- β.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- i.** $A = |2\alpha - 2| - |3\alpha + 4|$ **ii.** $B = |\alpha^2 - 1|$
- 48.** Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $d(x, 2) < 3$.
- α.** Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 5$.
- β.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- i.** $A = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$ **ii.** $B = \left| \frac{x+2}{x-6} \right|$ **iii.** $\Gamma = |x^2 - 4x - 5|$
- 49.** Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$.
- α.** Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .
- β.** Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
- γ.** Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει $A < 7$.

50. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{|x|^3 - 2x^2}{|x| - 2}$.

- α. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .
- β. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
- γ. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει $A < 9$.

51. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 6|x| + 9}{x^2 - 3|x|}$.

- α. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .
- β. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
- γ. Να λύσετε:

ι. την εξίσωση $|A| = \frac{1}{2}$

β. την ανίσωση $|A| < \frac{1}{3}$

52. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4$$

- α. Να δείξετε ότι $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.
- β. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

53. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

- α. $|a| > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$
- β. $|-a| - |a| = 0$
- γ. $|a| - a \geq 0$
- δ. $|a|^2 = a^2$
- ε. Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$.
- στ. Αν $\theta > 0$, τότε $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$.
- ζ. $|a + \beta| \geq |a| + |\beta|$
- η. Αν $a\beta \geq 0$, τότε $|a + \beta| = |a| + |\beta|$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	η.

25

Γραφική παράσταση συνάρτησης

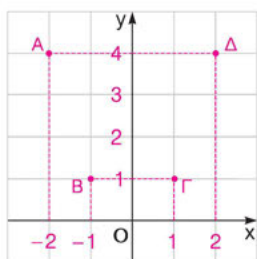
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

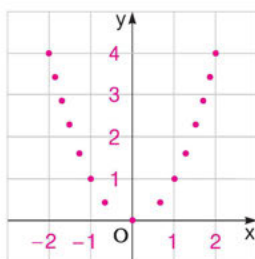
Κατασκευάζουμε το διπλανό πίνακα και σε ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε τα σημεία του (σχ. 1.).

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4
(x, f(x))	(-2, 4)	(-1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(2, 4)
M(x, f(x))	A(-2, 4)	B(-1, 1)	O(0, 0)	Γ(1, 1)	Δ(2, 4)

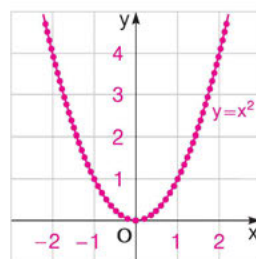
Αν πάρουμε περισσότερα σημεία έχουμε το (σχ. 2.) και αν πάρουμε όλα τα σημεία $M(x, f(x))$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε το (σχ. 3.) που λέγεται *γραφική παράσταση* της f .



σχ. 1.



σχ. 2.



σχ. 3.

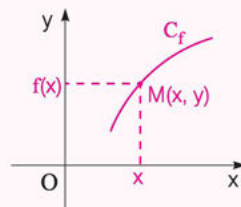
Η εξίσωση $y = x^2$ που επαληθεύεται μόνο από τις συντεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης είναι η *εξίσωση της γραφικής παράστασης*.

Ορισμός

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A .

Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$

δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται *γραφική παράσταση* της f και συμβολίζεται με C_f .

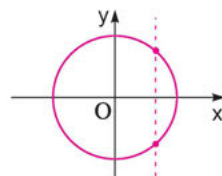
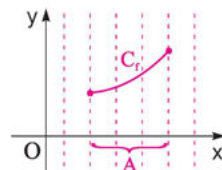


- Η εξίσωση $y = f(x)$ είναι η *εξίσωση της γραφικής παράστασης της f* , αφού επαληθεύεται μόνο από τις συντεταγμένες των σημείων της.
- Είναι $M(a, \beta) \in C_f \Leftrightarrow f(a) = \beta$.

Πότε μία γραμμή είναι γραφική παράσταση συνάρτησης

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Επομένως:

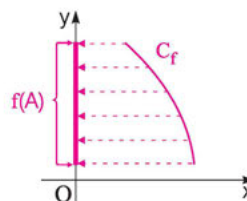
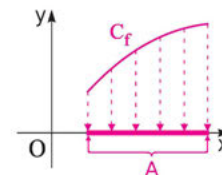
- Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο.
- Ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, αφού υπάρχει κατακόρυφη ευθεία που τον τέμνει σε δύο σημεία.



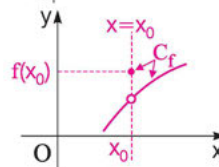
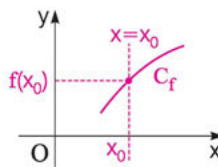
Προσδιορισμός του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών μίας συνάρτησης f από τη γραφική της παράσταση

Αν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , τότε μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

- Το **πεδίο ορισμού** της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
Δηλαδή, η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $x'x$.
- Το **σύνολο τιμών** της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .
Δηλαδή, η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $y'y$.

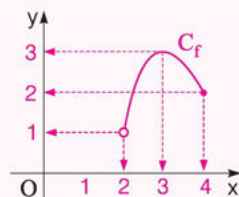


- Η **τιμή** της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f .



παράδειγμα:

Από το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (2, 4]$ και σύνολο τιμών το $f(A) = (1, 3]$.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Προσδιορισμός στοιχείων της f από την C_f

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f . Να βρείτε:

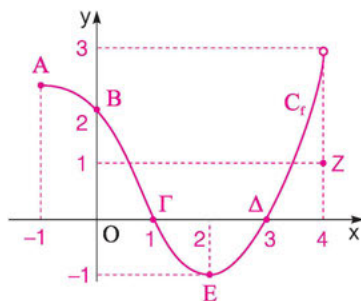
α. Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

β. Τις τιμές: $f(2)$, $f(4)$ και $f(1)$.

γ. Τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ. Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται:

- i. πάνω από τον άξονα $x'x$
- ii. κάτω από τον άξονα $x'x$.



Λύση

α. • Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f . Δηλαδή η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $x'x$.

Άρα $A = [-1, 4]$.

• Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f . Δηλαδή η προβολή της C_f πάνω στον άξονα $y'y$.

Άρα $f(A) = [-1, 3]$.

β. • Το σημείο της C_f με τετμημένη 2 είναι το $E(2, -1)$, οπότε $f(2) = -1$.

• Το σημείο της C_f με τετμημένη 4 είναι το $Z(4, 1)$, οπότε $f(4) = 1$.

• Το σημείο της C_f με τετμημένη 1 είναι το $\Gamma(1, 0)$, οπότε $f(1) = 0$.

γ. Τα κοινά σημεία της C_f με:

• τον άξονα $x'x$ είναι τα σημεία $\Gamma(1, 0)$ και $\Delta(3, 0)$,

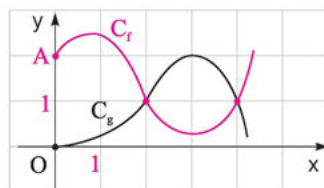
• τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(0, 2)$.

δ. Η C_f βρίσκεται:

• πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [-1, 1) \cup (3, 4]$

• κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν $x \in (1, 3)$.

2. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g που είναι ορισμένες στο $[0, +\infty)$.



- α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται:
- i. πάνω από τη C_g ii. κάτω από τη C_g .
- γ. Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση d των C_f και C_g στο $x_0 = 0$.

Λύση

- α. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα σημεία: $(2, 1)$ και $(4, 1)$.
- β. Η C_f βρίσκεται:
- πάνω από τη C_g , όταν $x \in [0, 2) \cup (4, +\infty)$
 - κάτω από τη C_g , όταν $x \in (2, 4)$.
- γ. Η κατακόρυφη απόσταση d των C_f και C_g στο $x_0 = 0$ είναι:

$$d = (OA) = |f(0) - g(0)| = |2 - 0| = 2$$

Προσδιορισμός στοιχείων της C_f από την f

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$. Να εξετάσετε, ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

α. $A(1, -1)$

β. $B(3, 6)$

γ. $\Gamma(2, 3)$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

- α. Είναι $f(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1 - 2} = -1$. Άρα το σημείο $A(1, -1)$

$$M(a, \beta) \in C_f \Leftrightarrow f(a) = \beta$$

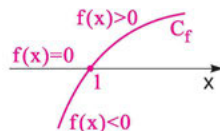
ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

- β. Είναι $f(3) = \frac{2 \cdot 3 - 1}{3 - 2} = 5$. Επειδή $f(3) \neq 6$ το σημείο $B(3, 6)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

- γ. Επειδή η τετμημένη 2 του σημείου $\Gamma(2, 3)$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , το σημείο Γ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

Σχετικές θέσεις της C_f με τον άξονα $x'x$

- Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία που έχουν τεταγμένη 0 , οπότε οι τετμημένες τους είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. [Στο σχήμα είναι $x=1$].
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα του x , που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$. [Στο σχήμα είναι $x>1$].
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα του x , που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$. [Στο σχήμα είναι $x<1$].



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^2-5a+1$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 5)$. Να βρείτε:

- την τιμή του a
- τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $y'y$ και $x'x$.
- τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3, 5)$, έχουμε

$$f(3)=5 \Leftrightarrow a \cdot 3^2 - 5a + 1 = 5 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$$

Άρα $a=1$.

β. Για $a=1$, έχουμε $f(x)=x^2-4$. Είναι:

- $f(0)=-4$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -4)$.
- $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\Gamma(-2, 0)$ και $\Delta(2, 0)$.

γ. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, στα διαστήματα του x που είναι λύσεις της ανίσωσης

$$\begin{aligned} f(x)>0 &\Leftrightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}>\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|>2 \\ &\Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } x>2 \end{aligned}$$

Άρα, τα ζητούμενα διαστήματα είναι τα: $(-\infty, -2)$ και $(2, +\infty)$.

Κοινά σημεία και Σχετικές θέσεις των C_f και C_g

Έστω οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το A .

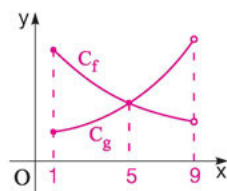
- Τα κοινά σημεία των C_f και C_g έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$

[Στο σχήμα είναι $x = 5$].

- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g στα διαστήματα του x , που είναι λύσεις της ανίσωσης

$f(x) > g(x)$ [Στο σχήμα είναι $1 \leq x < 5$].

- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g στα διαστήματα του x , που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < g(x)$. [Στο σχήμα είναι $5 < x < 9$].



5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$. Να βρείτε:

α. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

β. Τις τετμημένες των σημείων της C_f , που βρίσκονται:

i. πάνω από τη C_g

ii. κάτω από τη C_g .

Λύση

α. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{aligned}$$

Είναι $g(0) = 0$ και $g(1) = 1$.

Άρα οι C_f και C_g έχουν κοινά σημεία τα $(0, 0)$ και $(1, 1)$.

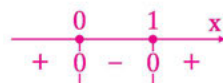
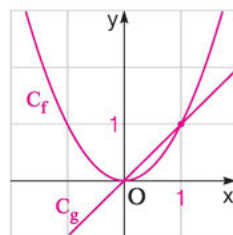
β. • Η C_f είναι πάνω από τη C_g , όταν

$$\begin{aligned} f(x) > g(x) &\Leftrightarrow x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x - 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{aligned}$$

Άρα $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

• Η C_f είναι κάτω από τη C_g , όταν

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$



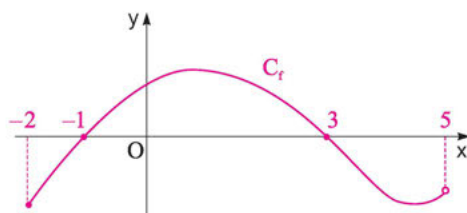
Γραφική επίλυση εξισώσεων - ανισώσεων

6. Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x)}$.



Λύση

α. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που έχουν τεταγμένη 0, δηλαδή τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα των x . Οπότε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 3$$

β. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ είναι τα διαστήματα του x που η C_f είναι πάνω από τον $x'x$. Οπότε

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

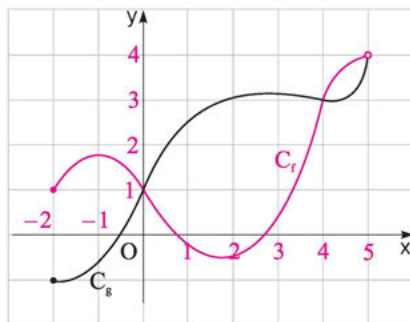
γ. Πρέπει $f(x) \geq 0$. Οι λύσεις της $f(x) \geq 0$ είναι τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω σε αυτόν. Οπότε

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 3]$$

7. Στο διπλανό σχήμα είναι οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g .
Να λύσετε:

α. Την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

β. Την ανίσωση $f(x) > g(x)$.



Λύση

Οι συναρτήσεις f , g ορίζονται στο σύνολο $A = [-2, 5]$.

α. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, $x \in A$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g . Δηλαδή, $x = 0$ ή $x = 4$.

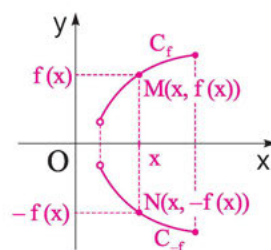
β. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$, $x \in A$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τη C_g . Δηλαδή,

$$x \in [-2, 0) \cup (4, 5)$$

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f(x)$

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ προκύπτει από τη C_f αφού πάρουμε τη συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$, γιατί τα σημεία $N(x, -f(x))$ της C_{-f} είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$ της C_f ως προς τον $x'x$.

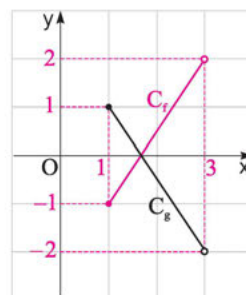
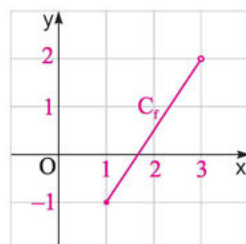


- 8.** Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = -f(x)$$

Λύση

Η C_g είναι η συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα των x και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Β' ΟΜΑΔΑΣ

- 9.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - \lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1,$$

δεν τέμνει τον άξονα $x'x$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η f δεν έχει καμία ρίζα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επειδή ο τύπος της f είναι τριώνυμο, αρκεί να δείξουμε ότι αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta < 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Είναι:
$$\Delta = (-\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 1) = -3\lambda^2 + 4\lambda - 4$$

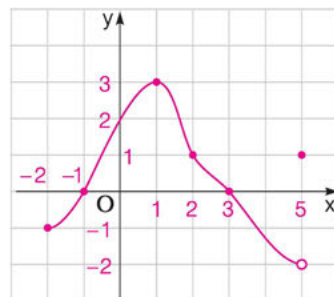
Η Δ είναι τριώνυμο με $a = -3 < 0$ και διακρίνουσα $\Delta' = -32 < 0$.

Άρα είναι $\Delta < 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

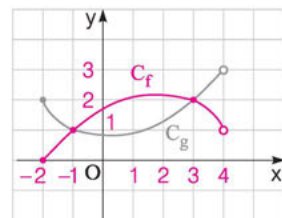
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Προσδιορισμός στοιχείων της f από την C_f

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f . Να βρείτε:



- α. Το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.
 - β. Τις τιμές $f(1)$ και $f(5)$.
 - γ. Τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.
 - δ. Τις τετμημένες των σημείων της C_f που είναι:
 - i. πάνω από τον άξονα $x'x$
 - ii. κάτω από τον άξονα $x'x$.
2. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g . Να βρείτε:



- α. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- β. Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται:
 - i. πάνω από τη C_g
 - ii. κάτω από τη C_g .
- γ. Την κατακόρυφη απόσταση d των C_f και C_g στο $x_0 = -2$.

Προσδιορισμός στοιχείων της C_f από την f

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$.

Να εξετάσετε, ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

- α. $A(2, 1)$ β. $B(3, 4)$ γ. $\Gamma(1, 2)$

4. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

- α. $f(x) = 3x + \lambda$, $M(-1, 2)$ β. $f(x) = \lambda^2 x^2 - \lambda x$, $M(1, 2)$

- γ. $f(x) = 3x - 5$, $M(\lambda, 2\lambda - 1)$

5. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^3 - (a + 1)x^2 - bx - 2$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(-1, 3)$, να βρείτε τις τιμές των a , b και την f .

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha, & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{\alpha}{x-1} + \beta x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(2, 5)$, να βρείτε τις τιμές των α και β και τη συνάρτηση f .

Κοινά σημεία της C_f με τους άξονες

7. Να βρείτε τα κοινά σημεία των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

α. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

β. $f(x) = x^2 + 6x + 9$

γ. $f(x) = x^2 - x + 1$

δ. $f(x) = x^3 - 1$

ε. $f(x) = \sqrt{x} - 2$

στ. $f(x) = |x| - 2$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.

9. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f , όταν:

α. $f(x) = x - 1$ και η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$,

β. $f(x) = |x - 1| - 2$ και η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$,

γ. $f(x) = 2x^2 - x - 1$ και η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$ και $g(x) = 5x - 9$.

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g .

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τη C_g .

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x - 1$ και $g(x) = 2x - 7$. Να βρείτε:

α. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

β. Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τη C_g .

Γραφική επίλυση εξισώσεων - ανισώσεων

- 12.** Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

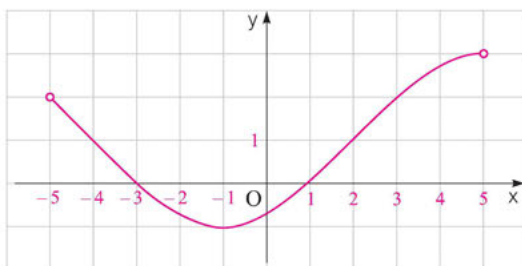
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0$$

γ. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 0$$



δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ και $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

- 13.** Στο διπλανό σχήμα είναι οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g .

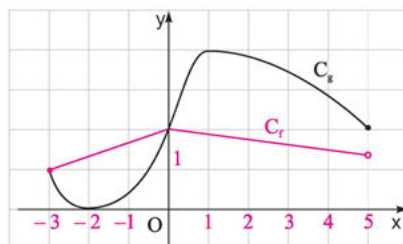
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f και g .

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών των f και g .

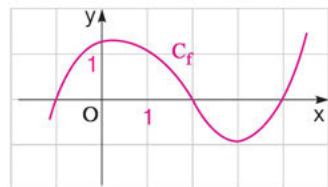
γ. Να λύσετε:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$

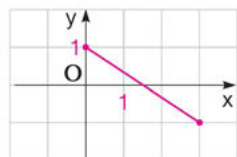
ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.



- 14.** Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$. Να κάνετε τον πίνακα προσήμου της f .



- 15.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$.



- 16.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\lambda - 2)x - 2$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$. Να βρείτε:

α. τη συνάρτηση f

β. τις τιμές του α , για τις οποίες το σημείο $B(\alpha - 1, -2)$ ανήκει στη C_f

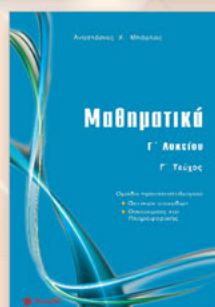
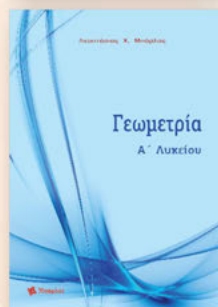
γ. τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

δ. τις τετμημένες των σημείων C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

- 17.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^2 - 2x + \kappa^3 + 1$ και $g(x) = 2x^2 + x - 2$.
Θεωρούμε, επιπλέον, ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε:
- α.** τις τιμές του κ
 - β.** τα κοινά σημεία των C_f και C_g
 - γ.** τα διαστήματα του x που η C_f δεν είναι πάνω από τη C_g
- 18.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = |x - 1| - 1$ και $g(x) = ax$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινό σημείο με τετμημένη 1. Να βρείτε:
- α.** τις τιμές του a ,
 - β.** τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g ,
 - γ.** τα διαστήματα του x που η C_f είναι πάνω από τη C_g .

B' ΟΜΑΔΑΣ

- 19.** Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης:
- $$f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 1$$
- α.** Έχει με τον άξονα $x'x$ δύο διαφορετικά κοινά σημεία.
 - β.** Έχει με τον άξονα $x'x$ ένα μόνο κοινό σημείο.
 - γ.** Δεν έχει με τον άξονα $x'x$ κοινά σημεία.
- 20.** Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης
- $$f(x) = x^2 - \lambda x + \lambda^2 + \lambda + 1$$
- δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
- 21.** Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης:
- α.** $f(x) = x^2 - (3\lambda - 1)x + 1 - 3\lambda$, βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
 - β.** $f(x) = (\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 1)x - 2\lambda$, $\lambda \neq 1$, βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- 22.** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης
- $$f(x) = \lambda x^2 - 4\lambda x - 2, \quad \lambda \neq 3$$
- βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 3x^2 - 7x + \lambda$.



Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α' Λυκείου
- Γεωμετρία Α' Λυκείου
- Άλγεβρα Β' Λυκείου
- Γεωμετρία Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Β' Λυκείου Θετικών Σπουδών
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α', Β', Γ'
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα
- Μαθηματικά Γ' ΕΠΑ.Λ.

ISBN: 978-618-83984-1-2



Λ.Τ. 22,70 €