

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Μαθηματικά

Γ' Λυκείου

Β' Τεύχος

Ομάδα προσανατολισμού

- Θετικών σπουδών
- Οικονομίας και Πληροφορικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ τάξης Λυκείου ομάδας προσανατολισμού Θετικών σπουδών και ομάδας προσανατολισμού σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.

Περιέχει:

- ✓ **Αναλυτική θεωρία.**
- ✓ **Παρατηρήσεις στη θεωρία**, στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ✓ **Μεθοδολογία** και **Σχόλια** για τη λύση ασκήσεων.
- ✓ **Λυμένες ασκήσεις**, ως υποδείγματα τρόπου λύσης.
- ✓ **Ασκήσεις για λύση.**
- ✓ **Θέματα** που καλύπτουν όλο το φάσμα των γνώσεων που πρέπει να έχει ο μαθητής, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των εξετάσεων.
- ✓ **Διαγωνίσματα** ανά διδακτική ενότητα.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν:

- **Λύσεις των ασκήσεων για λύση** του βιβλίου αυτού .
- Τα **θέματα των Πανελλήνιων εξετάσεων**.

Σεπτέμβριος 2018

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

20. Θεώρημα Rolle	6
21. Θεώρημα Μέσης Τιμής	20
22. • Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής • Σταθερή Συνάρτηση	38
23. Μονοτονία συνάρτησης	51
24. Εφαρμογές μονοτονίας	77
25. Θεώρημα Fermat	108
26. Κριτήριο τοπικών ακροτάτων	128
27. Σύνολο τιμών	150
28. Προβλήματα ακροτάτων	176
29. • Κυρτότητα • Σημεία Καμπής συνάρτησης.....	194
30. Εφαρμογές κυρτότητας	218
31. Ασύμπτωτες	240
32. Μελέτη και Χάραξη της Γραφικής Παράστασης μιας Συνάρτησης	257

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

33. Παράγουσες Συνάρτησης	274
34. Ορισμένο Ολοκλήρωμα	301
35. Μέθοδοι Ολοκλήρωσης	319
36. Εμβαδόν επίπεδου χωρίου	345
37. Ολοκληρώματα και Ανισότητες	371
38. Μελέτη παράγουσας	395
ΘΕΜΑΤΑ	422
Λύσεις των Ασκήσεων για λύση και Θεμάτων	476
Θέματα Πανελληνίων εξετάσεων	671

20

Θεώρημα Rolle

Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:

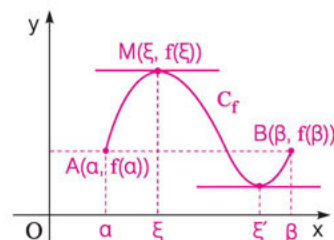
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Rolle

- Γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[0, 2]$, αφού είναι:

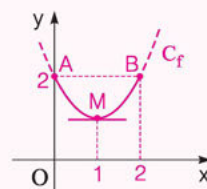
- συνεχής στο $[0, 2]$
- παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f'(x) = 2x - 2$ και
- ισχύει $f(0) = f(2) = 2$.

Οπότε, θα υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, 2)$, ώστε

$$f'(\xi) = 0$$

Για την εύρεση του ξ , έχουμε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 2 = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Υποθέσεις - Συμπέρασμα του Θ. Rolle

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

α. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο $\Delta = [0, 3]$.

β. Να βρείτε τα $\xi \in (0, 3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Λύση

α. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι:

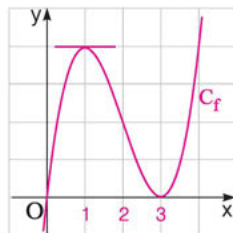
- συνεχής στο $[0, 3]$ ως πολωνυμική
- παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ με $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ και
- ισχύει $f(0) = f(3) = 0$.

Επομένως, η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο $\Delta = [0, 3]$.

β. Από το ερώτημα α. προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε:

$$\begin{aligned} f'(\xi) = 0 &\Leftrightarrow 3\xi^2 - 12\xi + 9 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 - 4\xi + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \xi = 1 \quad \text{ή} \quad \xi = 3, \text{ που απορρίπτεται.} \end{aligned}$$

Άρα $\xi = 1$.



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\eta\mu x$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(2, \pi)$.

β. Η εξίσωση $\epsilon\phi x = 2 - x$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(2, \pi)$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[2, \pi]$, αφού είναι:

- συνεχής στο $[2, \pi]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- παραγωγίσιμη στο $(2, \pi)$ με $f'(x) = \eta\mu x + (x-2)\sigma\upsilon\nu x$ και
- ισχύει $f(2) = f(\pi) = 0$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (2, \pi)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(2, \pi)$.

β. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα η εξίσωση $f'(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον, ρίζα στο $(2, \pi)$. Για $x \in (2, \pi)$, έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \eta\mu x + (x-2)\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -(x-2)\sigma\upsilon\nu x \\ &\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2 - x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 2 - x \end{aligned}$$

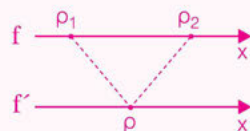
Άρα, η εξίσωση $\epsilon\phi x = 2 - x$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(2, \pi)$.

B. Σχέση πλήθους ριζών των f και f'

Με εφαρμογή του Θ. Rolle προκύπτει ότι:

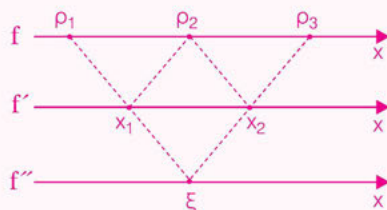
1. Αν η f έχει δύο ρίζες, τότε:

- η f' έχει μία τουλάχιστον ρίζα.



2. Αν η f έχει τρεις ρίζες, τότε:

- η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και
- η f'' μία τουλάχιστον ρίζα.



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Λύση

α. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$, αφού:

- είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 0]$, $[0, 1]$ και
- ισχύουν $f(-1) \cdot f(0) < 0$ και $f(0) \cdot f(1) < 0$, διότι

$$f(-1) = -2 < 0, \quad f(0) = 1 > 0 \quad \text{και} \quad f(1) = -44 < 0$$

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$.

β. Έστω $x_1 \in (-1, 0)$ και $x_2 \in (0, 1)$ ρίζες της f από το ερώτημα α. .

Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, αφού είναι:

- συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και
- ισχύει $f(x_1) = f(x_2) = 0$.



$$\text{Άρα η εξίσωση } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(x_1, x_2) \subseteq (-1, 1)$.

Γ. $f'(x) \neq 0 \longrightarrow \eta f \text{ έχει μία, το πολύ, ρίζα}$

Βασική άσκηση

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, το πολύ ρίζα.

Απόδειξη

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες, τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Τότε για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$, αφού είναι:

- συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και
- ισχύει $f(x_1) = f(x_2) [= 0]$.

Οπότε, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, το πολύ ρίζα.

4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$, (1), έχει μία, το πολύ ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow g(x) = 0$.

Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Για την g ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$, αφού είναι:

- συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και
- ισχύει $g(x_1) = g(x_2) = 0$.

Οπότε η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο (x_1, x_2) , που είναι άτοπο, αφού $g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει μία, το πολύ, ρίζα.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$.

α. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, 1]$.

β. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο, το πολύ ρίζες.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

Λύση

α. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, 1]$, αφού είναι:

- συνεχής στο $[0, 1]$,
- παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και
- ισχύει $f(0) = f(1)$, διότι $f(0) = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ και $f(1) = 2 + 1 - 2 - 1 = 0$.

β. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει τρεις ρίζες, τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Έχουμε: • $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2, x \in \mathbb{R}$

$$\bullet f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$, αφού είναι συνεχής σε αυτά, παραγωγίσιμη στα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$ και ισχύει $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) [= 0]$.

Οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = 0 \text{ και } f'(\xi_2) = 0$$

- Για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$, αφού είναι συνεχής σε αυτό, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και ισχύει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) [= 0]$.

Οπότε, υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$, που είναι άτοπο,

αφού $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f έχει δύο, το πολύ, ρίζες.

γ. Τα κοινά σημεία των C_g και C_h έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow 2^x = 2x - x^2 + 1 \Leftrightarrow 2^x + x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Επειδή η συνάρτηση f έχει δύο το πολύ ρίζες και ισχύει $f(0) = f(1) = 0$,

η f έχει ρίζες μόνο τις 0 και 1 .

Άρα, τα κοινά σημεία των C_g και C_h είναι τα:

$$A(0, 1) \text{ και } B(1, 2)$$

Β' ΟΜΑΔΑ

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$ και στη συνέχεια, να βρείτε όλα τα $\xi \in (0, \pi)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Λύση

- Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$ και ισχύει $f(0) = f(\pi) [= 0]$.

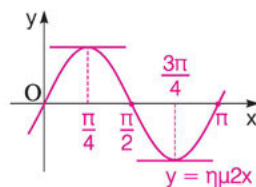
Άρα η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, \pi]$.

- Οπότε υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2\xi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\xi = 0 \Leftrightarrow 2\xi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad 2\xi = \frac{3\pi}{2}, \quad \text{αφού} \quad 0 < 2\xi < 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \xi = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \xi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Άρα} \quad \xi = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \xi = \frac{3\pi}{4}.$$



7. Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha^\beta = \beta^\alpha$, να δείξετε ότι:

α. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

β. $1 < \alpha < e < \beta$

Λύση

- α. Έχουμε $\alpha^\beta = \beta^\alpha \Rightarrow \ln \alpha^\beta = \ln \beta^\alpha \Rightarrow \beta \ln \alpha = \alpha \ln \beta$

$$\Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} = \frac{\ln \beta}{\beta} \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta)$$

Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, αφού είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,

παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x > 0$ και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.

- β. Από το ερώτημα α. προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \ln \xi = 1 \Leftrightarrow \xi = e$$

- Είναι $\alpha < \xi < \beta$, οπότε $\alpha < e < \beta$.

- Επειδή $\beta > e$ είναι $\ln \beta > 1 > 0$, οπότε $f(\beta) = \frac{\ln \beta}{\beta} > 0$, επομένως και

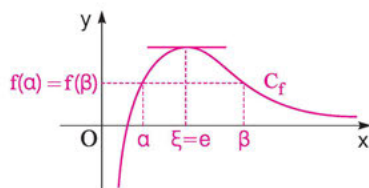
$$f(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \ln \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Άρα $1 < \alpha < e < \beta$.

Αν δίνεται μία ισότητα

$$g_1(\alpha, \beta) = g_2(\alpha, \beta),$$

τότε τη μετασχηματίζουμε σε $f(\alpha) = f(\beta)$ και εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$.



8. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

Λύση

Έστω ότι η f δεν είναι συνάρτηση $1-1$.

Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$, αφού είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι συνάρτηση $1-1$.

9. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f'(x) \neq 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $1 < f(x) < 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, ώστε $f(x_0) = x_0^2 + 1$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) - x^2 - 1 = 0$, (1)

έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η (1) $\Leftrightarrow g(x) = 0$.

► Για την g ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[0, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει $g(0) \cdot g(1) < 0$, διότι:

- $g(0) = f(0) - 1 > 0$, επειδή $f(0) > 1$
- $g(1) = f(1) - 2 < 0$, επειδή $f(1) < 2$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

► Είναι $g'(x) = f'(x) - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$f'(x) \neq 2x \Leftrightarrow f'(x) - 2x \neq 0 \Leftrightarrow g'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ στο $(0, 1)$.

Για την g ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, αφού είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $g(x_1) = g(x_2) = 0$.

Οπότε η εξίσωση $g'(x) = 0$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο (x_1, x_2) , που είναι άτοπο, αφού $g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία, το πολύ ρίζα στο $(0, 1)$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$, οπότε και η (1), έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Υπαρξη σημείου $M(\xi, f(\xi))$ της C_f , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$

10. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

Να αποδείξετε ότι:

α. για τη συνάρτηση $G(x) = \frac{f(x)}{x-3}$ εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[1, 2]$,

β. υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από το σημείο $A(3, 0)$.

Λύση

α. Επειδή η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, έχουμε $f(1) = 0$ και $f(2) = 0$.

Η συνάρτηση G είναι:

- συνεχής στο $[1, 2]$
- παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και
- ισχύει $G(1) = G(2)$, αφού $G(1) = \frac{f(1)}{-2} = 0$ και $G(2) = \frac{f(2)}{-1} = 0$.

Οπότε, για την G εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[1, 2]$.

β. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

και διέρχεται από το σημείο $A(3, 0)$, αν και μόνο αν

$$0 - f(\xi) = f'(\xi)(3 - \xi) \Leftrightarrow f(\xi) = f'(\xi)(\xi - 3)$$

Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο, ώστε

$$f(\xi) = f'(\xi)(\xi - 3)$$

$$\text{Είναι } G'(x) = \frac{f'(x)(x-3) - f(x)}{(x-3)^2}, \quad x \neq 3.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$G'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)(\xi-3) - f(\xi)}{(\xi-3)^2} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-3) - f(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\xi) = f'(\xi)(\xi-3)$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Υπαρξη ρίζας – Πλήθος ριζών εξίσωσης

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει:

♦ ► **Τουλάχιστον, μία ρίζα στο (a, β) , τότε:**

- Βρίσκουμε προφανή ρίζα της f , αν υπάρχει, ή
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f και το 0 να ανήκει σε αυτό, ή
- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano, για την f στο $[a, \beta]$.

► **Το πολύ, μία ρίζα στο (a, β) , τότε:**

- Βρίσκουμε τη μονοτονία της f ή
- Αν έχουμε $f'(x) \neq 0$, $x \in (a, \beta)$, τότε υποθέτουμε ότι η f έχει δύο ρίζες και καταλήγουμε σε άτοπο.

► **Ακριβώς, μία ρίζα στο (a, β) , τότε αρκεί να δείξουμε ότι έχει:**

- τουλάχιστον μία, και
 - το πολύ, μία ρίζα,
- με κατάλληλο συνδυασμό των δύο προηγούμενων περιπτώσεων.

♦ ► **Τουλάχιστον, δύο ρίζες στο (a, β) , τότε:**

- Βρίσκουμε δύο προφανείς ρίζες, αν υπάρχουν ή
- Αποδεικνύουμε ότι $0 \in f((a, x_0])$ και $0 \in f([x_0, \beta))$ ή
- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την f με κατάλληλο $x_0 \in (a, \beta)$ στα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

► **Το πολύ, δύο ρίζες, τότε:**

- Βρίσκουμε τη μονοτονία της f στα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$ με $x_0 \in (a, \beta)$ ή
- Υποθέτουμε ότι έχει και τρίτη ρίζα και καταλήγουμε σε άτοπο, εφαρμόζοντας το Θ. Rolle.

► **Ακριβώς, δύο ρίζες στο (a, β) , τότε αρκεί να δείξουμε ότι έχει τουλάχιστον δύο και το πολύ δύο με κατάλληλο συνδυασμό των δύο προηγούμενων περιπτώσεων.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Α. α. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle.

β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα του Rolle;

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α.** Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, ώστε $f'(\xi) = 0$.
- β.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και ισχύει $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .
- γ.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε $f(a) \neq f(b)$.
- δ.** Αν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση f στο $[a, b]$, τότε για την f ισχύουν και οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[a, b]$.
- ε.** Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- i.** Αν η f έχει δύο ρίζες, τότε η f' έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα.
- ii.** Αν $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει μία, το πολύ ρίζα.
- στ.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f(a)f(b) < 0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f έχει μία, ακριβώς ρίζα στο (a, b) .
- ζ.** Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και δεν ισχύουν για αυτήν οι υποθέσεις του θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών στο $[a, b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- η.** Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και δεν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[a, b]$, τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.i.	ε.ii.	στ.	ζ.	η.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Υποθέσεις - Συμπέρασμα του Θ. Rolle

2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $\Delta = [a, \beta]$ που αναφέρεται, και στη συνέχεια, να βρείτε τα $\xi \in (a, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

α. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $\Delta = [-2, 0]$

β. $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $\Delta = [\ln 2, \ln 4]$
3. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα Δ , όταν:

α. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$ και $\Delta = [-1, 1]$

β. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ και $\Delta = [0, 2]$
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.
 β. Η εξίσωση $\epsilon\phi x = -x - 1$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^3 + \lambda x^2 - \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, 1]$.
 β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 3x^2 + 2\lambda x - \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \ln x$. Να δείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\xi \in (1, \frac{\pi}{2})$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 β. Η εξίσωση $\sigma\phi x = x \ln x$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, \frac{\pi}{2})$.
7. Έστω $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$. Να δείξετε ότι:

α. Η $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, \pi]$.
 β. Η εξίσωση $f'(x) = -f(x) \cdot \sigma\phi x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, \pi)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi)$$

9. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0, a]$, παραγωγίσιμη στο $(0, a)$ και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, a]$. Αν $f(a) = ef(0)$ και για την $g(x) = \ln f(x) - ax$, $x \in [0, a]$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, a]$, τότε:

α. Να βρείτε την τιμή του a .

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, a)$, ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

B. Σχέση πλήθους ριζών των f και f'

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 10x^3 - 15x^2 - x + 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{10x^3 + 15x^2 + x}{x^4 + 1} = 1$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία, τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 30x^2 - 30x - 1 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

α. $2x^4 + \lambda^2(x^2 - 1) = x$, $\lambda \neq 0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο $(-1, 1)$

β. $8x^3 + 2\lambda^2x = 1$, $\lambda \neq 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(-1, 1)$.

Γ. $f'(x) \neq 0 \longrightarrow$ η f έχει μία, το πολύ, ρίζα

12. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq 3x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^3$, έχει μία, το πολύ, ρίζα.

13. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq -1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η C_f και η ευθεία $\varepsilon: y = -x$ έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο.

14. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0)=0$, $f(1)=1$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) \neq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, 1]$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^2$ έχει δύο, το πολύ, ρίζες.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της παραβολής $y=x^2$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^x+x^2-3x-1$.

α. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, 1]$.

β. Να δείξετε ότι η f έχει δύο, το πολύ, ρίζες.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

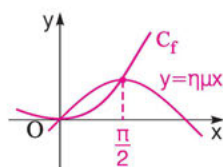
$$g(x)=3^x \text{ και } h(x)=-x^2+3x+1$$

B' ΟΜΑΔΑ

16. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $\Delta=[a, b]$ που αναφέρεται, και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (a, b)$, για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

α. $f(x)=\begin{cases} x^2-6x+3, & x>2 \\ -2x-1, & x\leq 2 \end{cases}, \Delta=[-2, 6]$ **β.** $f(x)=1+\eta\mu 3x, \Delta=[0, \pi]$

17. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και g με $g(x)=\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:



α. Υπάρχει $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο, ώστε οι εφαπτομένες των

C_f και C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ να είναι παράλληλες.

β. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και $h(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχουν ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

18. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x)-f(x)=0$.

γ. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(-2, 9)$ και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f(x)-6)=1$.

24

Εφαρμογές Μονοτονίας

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. f : γνησίως μονότονη – Ανισότητες, ισότητες

Σχόλιο

Απόδειξη ανισοτήτων

Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως μονότονη και $\alpha, \beta \in \Delta$.

Από τον ορισμό της μονοτονίας έχουμε:

- Αν $f \uparrow \Delta$, τότε $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$
- Αν $f \downarrow \Delta$, τότε $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta)$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x - 3$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(e)$ και $f(2)$.

γ. i. Αν $x \in (0, 1)$, να δείξετε ότι $f(x) < 0$.

ii. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^5 - \beta^5}{\alpha - \beta} > -2$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)}$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

β. Επειδή $f \uparrow \mathbb{R}$, έχουμε $e > 2 \Rightarrow f(e) > f(2)$.

γ. Επειδή $f \uparrow \mathbb{R}$, έχουμε:

i. Αν $x \in (0, 1)$, τότε $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$, αφού $f(1) = 1^5 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$.

ii. $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow \alpha^5 + 2\alpha - 3 < \beta^5 + 2\beta - 3 \Rightarrow \alpha^5 - \beta^5 < 2\beta - 2\alpha$

$$\Rightarrow \alpha^5 - \beta^5 < -2(\alpha - \beta) \Rightarrow \frac{\alpha^5 - \beta^5}{\alpha - \beta} > -2, \text{ αφού } \alpha - \beta < 0$$

δ. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0$. Για $x < 1 \xrightarrow{f \uparrow \mathbb{R}} f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$.

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Σχόλιο Επίλυση ανισώσεων της μορφής $f(x) < f(x_0)$

Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως μονότονη.

- Αν $f \uparrow \Delta$, τότε:
 - $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow x < x_0$ και $x \in \Delta$
 - $f(g(x)) < f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) < h(x)$, με $g(x), h(x) \in \Delta$
- Αν $f \downarrow \Delta$, τότε:
 - $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$ και $x \in \Delta$
 - $f(g(x)) < f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) > h(x)$, με $g(x), h(x) \in \Delta$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$.

- α. Να λύσετε:**
- i.** την εξίσωση $x^5 + x = 2$
 - ii.** την ανίσωση $x > \frac{2}{x^4 + 1}$.
- β. Να λύσετε:**
- i.** την εξίσωση $f(x^2 - 2) + 2 - x = x^5$
 - ii.** την ανίσωση $f(x^5 + 2) + x^5 < -x - 2$.
 - iii.** την εξίσωση $f^5(x) + f(x) = x^5 + x$.

Λύση

Είναι $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

άρα $f \uparrow \mathbb{R}$, οπότε η f είναι συνάρτηση 1-1. Έχουμε:

α. i. $x^5 + x = 2 \Leftrightarrow x^5 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$. Άρα $x = 1$.

ii. $x > \frac{2}{x^4 + 1} \Leftrightarrow x(x^4 + 1) > 2 \Leftrightarrow x^5 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 1$.

Άρα $x \in (1, +\infty)$.

β. i. $f(x^2 - 2) + 2 - x = x^5 \Leftrightarrow f(x^2 - 2) = x^5 + x - 2 \Leftrightarrow f(x^2 - 2) = f(x)$
 $\stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1$

Άρα $x = 2$ ή $x = -1$.

ii. $f(x^5 + 2) + x^5 < -x - 2 \Leftrightarrow f(x^5 + 2) < -x^5 - x - 2$
 $\Leftrightarrow f(x^5 + 2) < f(-x) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^5 + 2 < -x \Leftrightarrow x^5 + x - 2 < -4$
 $\Leftrightarrow f(x) < f(-1) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x < -1$

Άρα $x \in (-\infty, -1)$.

γ. $f^5(x) + f(x) = x^5 + x \Leftrightarrow f^5(x) + f(x) - 2 = x^5 + x - 2 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x)$
 $\stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow x^5 + x - 2 = x \Leftrightarrow x^5 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε: i. την εξίσωση $x^2 + 1 = 2e^{x-1}$

ii. την ανίσωση $f(x^2 + 1) < f(5e^{x-2})$.

iii. την ανίσωση $\ln(1 + f^2(x)) < f(x) + \ln 2 - 1$.

γ. Να δείξετε ότι $e^\pi f(e^\pi) < \pi^2 + 1$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(2x) - f(x)}$.

Λύση

α. Είναι $f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2 + 1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{e^x} = -\frac{(x-1)^2}{e^x} < 0$, για κάθε $x \neq 1$.

Επειδή επιπλέον, η f είναι συνεχής στο 1, έχουμε $f \downarrow \mathbb{R}$.

β. Είναι $f \downarrow \mathbb{R}$, οπότε η f είναι συνάρτηση 1-1 και έχουμε:

i. $x^2 + 1 = 2e^{x-1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \frac{e^x}{e} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{e^x} = \frac{2}{e} \Leftrightarrow f(x) = f(1) \xrightarrow{f \downarrow} x = 1$

Άρα $x = 1$.

ii. $f(x^2 + 1) < f(5e^{x-2}) \xrightarrow{f \downarrow} x^2 + 1 > 5e^{x-2} \Leftrightarrow x^2 + 1 > 5 \frac{e^x}{e^2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{e^x} > \frac{5}{e^2} \Leftrightarrow f(x) > f(2) \xrightarrow{f \downarrow} x < 2$

Άρα $x \in (-\infty, 2)$.

iii. $\ln(1 + f^2(x)) < f(x) + \ln 2 - 1 \Leftrightarrow \ln \frac{1 + f^2(x)}{2} < f(x) - 1 \Leftrightarrow \frac{1 + f^2(x)}{2} < e^{f(x)-1} \Leftrightarrow \frac{1 + f^2(x)}{e^{f(x)}} < \frac{2}{e} \Leftrightarrow f(f(x)) < f(1) \xrightarrow{f \downarrow} f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \xrightarrow{f \downarrow} x < 0$

γ. Είναι $e^\pi f(e^\pi) < \pi^2 + 1 \Leftrightarrow f(e^\pi) < \frac{\pi^2 + 1}{e^\pi} \Leftrightarrow f(e^\pi) < f(\pi) \xrightarrow{f \downarrow} e^\pi > \pi$, που ισχύει,

αφού είναι $e^x \geq x + 1 > x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για $x = \pi$ έχουμε $e^\pi > \pi$.

δ. • Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (f(2x) - f(x)) = f(0) - f(0) = 0$

• Για $x > 0$ είναι $2x > x \xrightarrow{f \downarrow} f(2x) < f(x) \Rightarrow f(2x) - f(x) < 0$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(2x) - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{f(2x) - f(x)} \cdot \ln x \right) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.

4. α. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2+1} + \ln(1+x^2) = e$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{2x-1}{x^2} < e^{x^2} - e^{2x-1}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} + \ln x = e^x$.

Λύση

α. Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε: $e^{x^2+1} + \ln(1+x^2) = e$, (1).

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα $f \uparrow (0, +\infty)$, οπότε η f είναι συνάρτηση 1-1.

Επειδή, επιπλέον $f(1) = e$, η (1) $\Leftrightarrow f(x^2+1) = f(1) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$.

β. Η ανίσωση ορίζεται, όταν

$$\frac{2x-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow (2x-1)x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad \text{και} \quad 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\text{Για } x > \frac{1}{2}, \text{ έχουμε: } \ln \frac{2x-1}{x^2} < e^{x^2} - e^{2x-1} \Leftrightarrow \ln(2x-1) - \ln x^2 < e^{x^2} - e^{2x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x-1) + e^{2x-1} < \ln x^2 + e^{x^2} \stackrel{a.}{\Leftrightarrow} f(2x-1) < f(x^2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 2x-1 < x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{Άρα } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty).$$

$$\gamma. \text{ Για } x > 0 \text{ έχουμε } e^{x^2} + \ln x = e^x \Leftrightarrow e^{x^2} + \ln \frac{x^2}{x} = e^x \Leftrightarrow e^{x^2} + \ln x^2 - \ln x = e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} + \ln x^2 = e^x + \ln x \stackrel{a.}{\Leftrightarrow} f(x^2) = f(x) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2 = x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$$

$$\text{Άρα } x=1.$$

Μετασχηματισμός εξίσωσης – ανίσωσης

Αν θέλουμε να λύσουμε μία εξίσωση $f(x) = g(x)$, (1) ή, μία ανίσωση $f(x) > g(x)$ σε ένα σύνολο A , η οποία δεν λύνεται με αλγεβρικές μεθόδους ή δεν βρίσκεται η μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$, τότε:

- Αν $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$, τότε η (1) $\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ και θεωρούμε τη

συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$, της οποίας βρίσκουμε τις ρίζες ή το πρόσημό της.

- Αν $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, για κάθε $x \in A$, τότε η (1) $\Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln f(x) - \ln g(x)$, της οποίας βρίσκουμε τις ρίζες ή το πρόσημό της.

5. α. Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x = 1 - x^2$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1} \cdot x^x < 1$ στο $(0, +\infty)$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = x^2$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1, 0)$.

Λύση

α. Η εξίσωση ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln x = \frac{1}{x} - x \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} + x = 0, \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + x$, $x > 0$. Οπότε η $(1) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Είναι $f(1) = 0$, οπότε το 1 είναι ρίζα της f .

Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1 > 0$, για κάθε $x > 0$, οπότε $f \uparrow (0, +\infty)$.

Άρα το 1 είναι η μοναδική ρίζα της f , οπότε και της εξίσωσης (1).

β. Η ανίσωση είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} x^x < e^{1-x^2} &\Leftrightarrow \ln x^x < \ln e^{1-x^2} \Leftrightarrow x \ln x < 1 - x^2 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x < \frac{1}{x} - x \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} + x < 0 \\ &\stackrel{a.}{\Leftrightarrow} f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Άρα $x \in (0, 1)$.

γ. Για $x \in (-1, 0)$ έχουμε $e^x = x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^x} - 1 = 0$, (2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε η $(2) \Leftrightarrow f(x) = 0$

• Είναι $f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x} = -\frac{x(x-2)}{e^x} < 0$, για κάθε $x \in (-1, 0)$.

Οπότε $f \downarrow (-1, 0)$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-1, 0)$.

• Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[-1, 0]$, αφού είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και $f(-1) = \frac{1}{e^{-1}} - 1 = e - 1 > 0$, $f(0) = -1 < 0$, άρα $f(-1) \cdot f(0) < 0$.

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-1, 0)$.

6. Έστω $f:(1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ και $f(2) = 0$. Να λύσετε την εξίσωση

$$(x-1)f(x) + 2 = x$$

Λύση

Για $x > 1$ έχουμε

$$(x-1)f(x) + 2 = x \Leftrightarrow (x-1)f(x) = x-2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x-2}{x-1} \Leftrightarrow f(x) - \frac{x-2}{x-1} = 0, \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x-2}{x-1}$, $x > 1$.

Οπότε η $(1) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(2)$, (2) .

Είναι

$$g'(x) = f'(x) - \frac{x-1-x+2}{(x-1)^2} = f'(x) - \frac{1}{(x-1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 1,$$

οπότε $g \downarrow (1, +\infty)$, άρα η g είναι συνάρτηση 1-1.

Επομένως η $(2) \Leftrightarrow x = 2$.

Άρα $x = 2$.

7. Έστω $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(e) < e \ln 2$ και $f'(x) < 0$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι $f(1) > \ln \frac{2^{e+1}}{e+1}$.

Λύση

Είναι

$$\begin{aligned} f(1) > \ln \frac{2^{e+1}}{e+1} &\Leftrightarrow f(1) > \ln 2^{e+1} - \ln(e+1) \Leftrightarrow f(1) > (e+1) \ln 2 - \ln(e+1) \\ &\Leftrightarrow f(1) > e \ln 2 + \ln 2 - \ln(e+1) \Leftrightarrow f(1) > f(e) + \ln 2 - \ln(e+1) \\ &\Leftrightarrow f(1) - \ln 2 > f(e) - \ln(e+1), \quad (1) \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \ln(x+1)$, $x > 0$.

Οπότε η $(1) \Leftrightarrow g(1) > g(e)$, (2) .

Είναι $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x+1} < 0$, για κάθε $x > 0$,

οπότε $g \downarrow (0, +\infty)$, άρα η $(2) \Leftrightarrow 1 < e$, που ισχύει.

Εξισώσεις με προφανείς ρίζες

8. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$.

Λύση

Η εξίσωση έχει προφανή λύση την $x=2$, αφού $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$.

Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0$, (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow f(x) = 0$ και έχουμε $f(2) = 0$.

Είναι $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

αφού $0 < \frac{3}{5}, \frac{4}{5} < 1$, οπότε $\ln \frac{3}{5} < 0$, $\ln \frac{4}{5} < 0$.

Επομένως $f \downarrow \mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$, οπότε και η (1) έχει μοναδική ρίζα το 2.

Για να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής:

$$κα^x + λβ^x = μγ^x$$

με $0 < α < β < γ$, βρίσκουμε την προφανή ρίζα και διαιρούμε όλους τους όρους με τη δύναμη που έχει τη μεγαλύτερη βάση, δηλαδή το $γ^x$.

9. Να λύσετε την εξίσωση $(\pi - 2x)\sin x + 2\eta\mu x - \pi = 0$, στο διάστημα $[0, \pi]$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = (\pi - 2x)\sin x + 2\eta\mu x - \pi$, $x \in [0, \pi]$.

Οπότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται $f(x) = 0$, $x \in [0, \pi]$.

Είναι: • $f'(x) = -2\sin x - (\pi - 2x)\eta\mu x + 2\sin x = (2x - \pi)\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$

$$\bullet \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = \pi$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f'	0	-	0
f	0		0

• Στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$, είναι $f(0) = \pi \cdot 1 + 2 \cdot 0 - \pi = 0$ και $f \downarrow [0, \frac{\pi}{2}]$.

Οπότε το 0 είναι μοναδική ρίζα της f στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.

• Στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, είναι $f(\pi) = (-\pi) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 - \pi = 0$ και $f \uparrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Οπότε το π είναι μοναδική ρίζα της f στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο, ακριβώς, ρίζες τους αριθμούς: 0 και π .

10. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = 2^x$ στο $(0, +\infty)$.

Λύση

Στο $(0, +\infty)$ η εξίσωση $x^2 = 2^x$ έχει προφανείς ρίζες τις $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ και γράφεται ισοδύναμα

$$\ln x^2 = \ln 2^x \Leftrightarrow 2 \ln x = x \ln 2 \Leftrightarrow 2 \ln x - x \ln 2 = 0, \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x - x \ln 2$, $x > 0$.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow f(x) = 0$. Είναι $f'(x) = \frac{2 - x \ln 2}{x}$, $x > 0$.

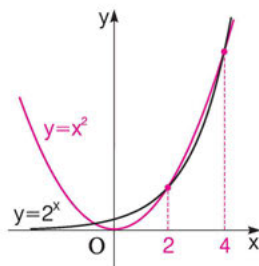
Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\ln 2}$.

Η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα

$(0, \frac{2}{\ln 2}]$, $(\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$, οπότε έχει δύο το πολύ ρίζες.

Άρα η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

x	0	$\frac{2}{\ln 2}$	$+\infty$	
f'		+	0	-
f				



11. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = f(1) = 0$ και $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Λύση

α. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει $f(0) = f(1)$.

Οπότε, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Επειδή $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα το ξ είναι μοναδικό.

β. • Αν $x \in (-\infty, \xi)$, τότε $x < \xi \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0$, οπότε $f \downarrow (-\infty, \xi)$, επομένως το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(-\infty, \xi)$.

• Αν $x \in (\xi, +\infty)$, τότε

$x > \xi \Leftrightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0$, οπότε $f \uparrow [\xi, +\infty)$,
επομένως το 1 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $[\xi, +\infty)$.

x	$-\infty$	0	ξ	1	$+\infty$
f'	-	-	0	+	+
f		↘	↗	↗	↗

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις 0 και 1.

B. f: γνησίως μονότονη σε διαστήματα**12.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 5$.**α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.**β.** Να συγκρίνετε τις τιμές:

i. $f(\pi)$ και $f(e)$

ii. $f\left(\frac{1}{7}\right)$ και $f\left(\frac{1}{9}\right)$

γ. Αν $x > 2$, να δείξετε ότι $f(x) > 13$.**δ.** Αν $x \in [0, 1)$, να δείξετε ότι $2 < f(x) \leq 5$.**ε.** Αν $x > 1$, να δείξετε ότι:

i. $f(\sqrt{x}) > 2$

ii. $f(x^2) > f(x)$

iii. $f(f(x)) > 13$

Λύση**α.** Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής.

Είναι: $f'(x) = 4x^3 - 4, x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f

φαίνονται στο διπλανό πίνακα. Δηλαδή

$f \downarrow (-\infty, 1] \text{ και } f \uparrow [1, +\infty)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\swarrow$		$\searrow$

β. i. Επειδή $\pi, e \in [1, +\infty)$ και $f \uparrow [1, +\infty)$ έχουμε $\pi > e \Rightarrow f(\pi) > f(e)$.**ii.** Επειδή $\frac{1}{7}, \frac{1}{9} \in (-\infty, 1]$ και $f \downarrow (-\infty, 1]$ έχουμε $\frac{1}{7} > \frac{1}{9} \Rightarrow f\left(\frac{1}{7}\right) < f\left(\frac{1}{9}\right)$.**γ.** Αν $x > 2$, τότε $x, 2 \in [1, +\infty)$. Επειδή επιπλέον $f \uparrow [1, +\infty)$ έχουμε

$$x > 2 \Rightarrow f(x) > f(2) \Rightarrow f(x) > 16 - 8 + 5 \Rightarrow f(x) > 13$$

δ. Επειδή $f \downarrow (-\infty, 1]$ για $x \in [0, 1)$ έχουμε

$$0 \leq x < 1 \Leftrightarrow f(0) \geq f(x) > f(1) \Leftrightarrow 5 \geq f(x) > 2$$

Άρα $2 < f(x) \leq 5$, για κάθε $x \in [0, 1)$.**ε. i.** Αν $x > 1$, τότε $\sqrt{x} > 1$, οπότε $\sqrt{x}, 1 \in [1, +\infty)$.Επειδή επιπλέον $f \uparrow [1, +\infty)$, έχουμε $\sqrt{x} > 1 \xRightarrow{f \uparrow} f(\sqrt{x}) > f(1) \Rightarrow f(\sqrt{x}) > 2$.**ii.** Αν $x > 1$, τότε $x^2 > x > 1$, οπότε $x^2, x \in [1, +\infty)$.Επειδή επιπλέον $f \uparrow [1, +\infty)$, έχουμε $x^2 > x \xRightarrow{f \uparrow} f(x^2) > f(x)$.**iii.** Είναι $x > 1 \xRightarrow{f \uparrow [1, +\infty)} f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 2 \xRightarrow{f \uparrow [1, +\infty)} f(f(x)) > f(2) \Rightarrow f(f(x)) > 13$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε:

i. την εξίσωση $e^{x^2} - f(2x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1)$

ii. την ανίσωση $\ln \varepsilon \phi x > e^{\eta \mu x - 1} - e^{\sigma \upsilon \nu x - 1}$, στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής.

Είναι: • $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $f'(1) = 0$

• $f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα $f' \uparrow (0, +\infty)$.

• Για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$.

• Για $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα. Δηλαδή

$f \downarrow (0, 1]$ και $f \uparrow [1, +\infty)$

x	0	1	$+\infty$
f'		- 0 +	
f		↘ ↗	↗

β. i. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{x^2} - f(2x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow e^{x^2} - \ln(x^2 + 1) = f(2x^2 + 1)$

$\Leftrightarrow f(x^2 + 1) = f(2x^2 + 1)$, (1).

Είναι $2x^2 + 1, x^2 + 1 \in [1, +\infty)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $f \uparrow [1, +\infty)$, η f είναι συνάρτηση 1-1 στο $[1, +\infty)$.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Άρα $x = 0$.

ii. Για $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι

$$\ln \varepsilon \phi x > e^{\eta \mu x - 1} - e^{\sigma \upsilon \nu x - 1} \Leftrightarrow \ln \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} > e^{\eta \mu x - 1} - e^{\sigma \upsilon \nu x - 1} \Leftrightarrow \ln \eta \mu x - \ln \sigma \upsilon \nu x > e^{\eta \mu x - 1} - e^{\sigma \upsilon \nu x - 1}$$

$$\Leftrightarrow e^{\sigma \upsilon \nu x - 1} - \ln \sigma \upsilon \nu x > e^{\eta \mu x - 1} - \ln \eta \mu x \Leftrightarrow f(\sigma \upsilon \nu x) > f(\eta \mu x), \quad (2)$$

Είναι $\eta \mu x, \sigma \upsilon \nu x \in (0, 1)$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $f \downarrow (0, 1)$. Οπότε

$$\eta \quad (2) \Leftrightarrow \sigma \upsilon \nu x < \eta \mu x \Leftrightarrow \eta \mu x > \sigma \upsilon \nu x \xLeftrightarrow \varepsilon \phi x > 1 \Leftrightarrow \varepsilon \phi x > \varepsilon \phi \frac{\pi}{4} \xLeftrightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

Άρα $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \leq 0 \\ x^2 - 2x & , x > 0 \end{cases}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(-3x) < f(-x^2)$, στο διάστημα $(0, +\infty)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{-x}) < f\left(\frac{1}{2}\right)$, στο διάστημα $(0, 1)$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) > f(x+1)$, για κάθε $x > 0$.

Λύση

α. Εξετάζουμε την f ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$.

Είναι $f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Άρα η f είναι συνεχής στο 0 .

• Αν $x < 0$, τότε $f'(x) = 3x^2 > 0$.

• Αν $x > 0$, τότε $f'(x) = 2x - 2$ και
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα. Δηλαδή
 $f \uparrow (-\infty, 0]$, $f \downarrow [0, 1]$ και $f \uparrow [1, +\infty)$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	+		- 0 +	+
f				

β. Για $x \in (0, +\infty)$ είναι: $x > 0 \Rightarrow -3x < 0$ και $x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0$.

Επειδή $-3x, -x^2 \in (-\infty, 0]$ και $f \uparrow (-\infty, 0]$, έχουμε:

$$f(-3x) < f(-x^2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} -3x < -x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow x(x-3) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

Άρα $x \in (0, 3)$.

γ. Για $x \in (0, 1)$ είναι: $0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0 \Rightarrow e^{-1} < e^{-x} < 1$.

Επειδή $e^{-x}, \frac{1}{2} \in [0, 1]$ και $f \downarrow [0, 1]$, έχουμε:

$$f(e^{-x}) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow e^{-x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x > \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \ln 2$$

Άρα $x \in (0, \ln 2)$, αφού $\ln 2 < 1$.

δ. Για κάθε $x > 0$ είναι: $e^x > 1$ και $x+1 > 1$.

Επειδή $e^x, x+1 \in [1, +\infty)$ και $f \uparrow [1, +\infty)$ έχουμε:

$$f(e^x) > f(x+1) \Leftrightarrow e^x > x+1, \text{ η οποία ισχύει για κάθε } x > 0.$$

15. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν: $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(1) = 0$.

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $f(3-x) = f(0)$, στο διάστημα $[2, +\infty)$.

ii. $f(e^{1-x}) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, στο διάστημα $(0, 1]$.

Λύση

α. Έχουμε $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f' \uparrow \mathbb{R}$.

• Για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$

• Για $x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παραπάνω πίνακα.

Δηλαδή $f \downarrow (-\infty, 1]$ και $f \uparrow [1, +\infty)$.

β. i. Για $x \in [2, +\infty)$, είναι $x \geq 2 \Rightarrow -x \leq -2 \Rightarrow 3-x \leq 1$.

Επομένως $3-x, 0 \in (-\infty, 1]$, για κάθε $x \geq 2$.

Επειδή $f \downarrow (-\infty, 1]$, η f είναι συνάρτηση 1-1 στο $(-\infty, 1]$.

Οπότε $f(3-x) = f(0) \Leftrightarrow 3-x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Άρα $x = 3$.

ii. Για $x \in (0, 1]$, είναι $0 < x \leq 1$, οπότε:

• $-1 \leq -x < 0 \Rightarrow 0 \leq 1-x < 1 \Rightarrow 1 \leq e^{1-x} < e$

• $\frac{1}{x} \geq 1$

Επομένως $e^{1-x}, \frac{1}{x} \in [1, +\infty)$, για κάθε $x \in (0, 1]$.

Επειδή $f \uparrow [1, +\infty)$, η f είναι συνάρτηση 1-1 στο $[1, +\infty)$.

Οπότε $f(e^{1-x}) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow e^{x-1} = x$

$$\stackrel{y=x-1}{\Leftrightarrow} e^y = y+1 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1,$$

αφού $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

Απόδειξη ανισοτήτων με βοηθητική συνάρτηση

16. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $f(0) = g(0)$ για τις οποίες ισχύει $f'(x) < g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $h(0) = f(0) - g(0) = 0$.

Έχουμε $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $h \downarrow \mathbb{R}$, οπότε η h είναι συνάρτηση 1-1.

Είναι: $\bullet f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = h(0) \Leftrightarrow x = 0$

$\bullet f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow x < 0$

$\bullet f(x) < g(x) \Leftrightarrow x > 0$

Επομένως: $\bullet$ Η C_f και η C_g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x = 0$.

$\bullet$ Η C_f είναι πάνω από τη C_g , όταν $x \in (-\infty, 0)$ και κάτω από τη C_g , όταν $x \in (0, +\infty)$.

17. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = 1$, για την οποία ισχύει

$$xf'(x) + 1 < xe^{x-1}, \text{ για κάθε } x > 0$$

Να δείξετε ότι $f(x) < e^{x-1} - \ln x$, για κάθε $x > 1$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(x) < e^{x-1} - \ln x \Leftrightarrow f(x) - e^{x-1} + \ln x < 0, \text{ για κάθε } x > 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{x-1} + \ln x$, $x > 0$. Είναι $g(1) = 0$.

Έχουμε $g'(x) = f'(x) - e^{x-1} + \frac{1}{x} < 0$, για κάθε $x > 0$, αφού για κάθε $x > 0$, είναι

$$xf'(x) + 1 < xe^{x-1} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) + \frac{1}{x} < e^{x-1} \Leftrightarrow f'(x) - e^{x-1} + \frac{1}{x} < 0$$

Οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως, για κάθε $x > 1$ είναι

$$g(x) < g(1) \Rightarrow f(x) - e^{x-1} + \ln x < 0 \Rightarrow f(x) < e^{x-1} - \ln x$$

- 18.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύουν:

$$f'(0) > 0 \text{ και } f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(\varepsilon\phi x) > f(x)$, στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) + e^x = f(x) + 1$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) \neq 0$.

Οπότε η f' διατηρεί πρόσημο.

Επειδή επιπλέον ισχύει $f'(0) > 0$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

β. Για $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ έχουμε $f(\varepsilon\phi x) > f(x) \stackrel{f \uparrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \varepsilon\phi x > x \Leftrightarrow \varepsilon\phi x - x > 0$, (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \varepsilon\phi x - x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Είναι $g(0) = 0$, οπότε η (1) $\Leftrightarrow g(x) > g(0)$, (2).

Έχουμε

$$g'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x}{\sin^2 x} = \varepsilon\phi^2 x > 0, \text{ για κάθε } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}).$$

Επειδή επιπλέον η g είναι συνεχής στο 0, έχουμε ότι $g \uparrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Οπότε η (2) $\Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$. Άρα $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

γ. Είναι $f(2x) + e^x = f(x) + 1 \Leftrightarrow f(2x) - f(x) + e^x - 1 = 0$, (1).

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το 0.

• Αν $x > 0$, τότε:

$$\bullet \quad 2x > x \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(2x) > f(x) \Leftrightarrow f(2x) - f(x) > 0 \text{ και}$$

$$\bullet \quad e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$

Οπότε $f(2x) - f(x) + e^x - 1 > 0$.

• Αν $x < 0$, τότε όμοια έχουμε $f(2x) - f(x) + e^x - 1 < 0$.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το 0.

Επίλυση εξισώσεων – ανισώσεων με τη βοηθητική συνάρτηση $F(x) = f(x+c) - f(x)$

Σχόλιο Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f' \uparrow \Delta$ και η συνάρτηση

$$F(x) = f(x+c) - f(x), \quad x \in \Delta \quad \text{και} \quad c > 0$$

Είναι: • $F'(x) = f'(x+c) - f'(x), \quad x \in \Delta$.

$$\bullet \quad x+c > x \Rightarrow f'(x+c) > f'(x) \Rightarrow F'(x) > 0, \quad x \in \Delta, \quad \text{οπότε} \quad F \uparrow \Delta.$$

Τη συνάρτηση F την χρησιμοποιούμε για την επίλυση εξισώσεων της μορφής:

- $f(x+c) - f(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0$
- $f(g(x)+c) - f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow F(g(x)) = 0$
- $f(g_1(x)+c) - f(g_1(x)) = f(g_2(x)+c) - f(g_2(x)) \Leftrightarrow F(g_1(x)) = F(g_2(x))$

Όμοια, λύνονται και ανισώσεις της παραπάνω μορφής.

19. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(3) = f(2)$ και $f' \uparrow \mathbb{R}$. Να λύσετε:

α. την εξίσωση $f(x+1) - f(x) = 0$ **β.** την ανίσωση $f(5x+1) > f(5x)$

γ. την εξίσωση $f(x^2+2) = f(x^2+1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x+1) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}$.

Είναι: • $F'(x) = f'(x+1) - f'(x), \quad x \in \mathbb{R}$ και

$$\bullet \quad x+1 > x \Rightarrow f'(x+1) > f'(x) \Rightarrow F'(x) > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \text{οπότε} \quad F \uparrow \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

α. $f(x+1) - f(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = F(2) \stackrel{F:1-1}{\Leftrightarrow} x = 2 \quad [F(2) = f(3) - f(2) = 0]$

β. $f(5x+1) > f(5x) \Leftrightarrow f(5x+1) - f(5x) > 0 \Leftrightarrow F(5x) > F(2) \stackrel{F \uparrow}{\Leftrightarrow} 5x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$

γ. $f(x^2+2) = f(x^2+1) \Leftrightarrow f((x^2+1)+1) - f(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow F(x^2+1) = F(2)$

$$\stackrel{F:1-1}{\Leftrightarrow} x^2+1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2+2)$.

α. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f' είναι γνησίως αύξουσες.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^4+2) + f(x^2+3) > f(x^4+1) + f(x^2+4)$, (1).

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^4+2) - f(2x^2+2) = f(x^4+1) - f(x^2+1)$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Είναι:

- $f'(x) = e^x(x^2 + 2) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x + 2) = e^x[(x+1)^2 + 1] > 0$,
για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f \uparrow \mathbb{R}$.
- $f''(x) = e^x(x^2 + 2x + 2) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 2x + 2 + 2x + 2)$
 $= e^x(x^2 + 4x + 4) = e^x(x+2)^2 > 0$, για κάθε $x \neq -2$.

Αφού επιπλέον η f' είναι συνεχής στο -2 , έχουμε ότι $f' \uparrow \mathbb{R}$.

β. Η ανίσωση (1) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x^4 + 2) - f(x^4 + 1) > f(x^2 + 4) - f(x^2 + 3), \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι:

- $F'(x) = f'(x+1) - f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η (2) $\Leftrightarrow F(x^4 + 1) > F(x^2 + 3)$, (3)
- $x+1 > x \Rightarrow f'(x+1) > f'(x) \Rightarrow f'(x+1) - f'(x) > 0 \Rightarrow F'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα.

$$\begin{aligned} \text{Άρα η (3)} &\Leftrightarrow x^4 + 1 > x^2 + 3 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 2) > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

γ. Η δοσμένη εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} f(2(x^4 + 1)) - f(2(x^2 + 1)) &= f(x^4 + 1) - f(x^2 + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(2(x^4 + 1)) - f(x^4 + 1) = f(2(x^2 + 1)) - f(x^2 + 1), \quad (4) \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = f(2x) - f(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

Οπότε η (4) $\Leftrightarrow G(x^4 + 1) = G(x^2 + 1)$, (5). Είναι

$$G'(x) = 2f'(2x) - f'(x) = (f'(2x) - f'(x)) + f'(2x) > 0, \quad x > 0, \text{ αφού, για } x > 0 \text{ είναι:}$$

- $2x > x \Rightarrow f'(2x) > f'(x) \Rightarrow f'(2x) - f'(x) > 0$
- $f'(2x) > 0$

Οπότε η G είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, επομένως είναι 1-1, άρα

$$\begin{aligned} \text{η (5)} &\Leftrightarrow x^4 + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1) + 3$ και $g(x) = e^x - x^2$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε στη γραφική παράσταση της f που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

β. Να δείξετε ότι η παραπάνω ευθεία ε εφάπτεται της C_g σε ένα, ακριβώς σημείο, το οποίο να βρείτε.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (1, +\infty)$.

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x > 1.$$

• Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και ε η εφαπτομένη της C_f σε αυτό.

$$\text{Έχουμε } \varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \ln(x_0 - 1) - 3 = \frac{1}{x_0 - 1}(x - x_0).$$

• Είναι $A(0, 1) \in \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \ln(x_0 - 1) - 3 = \frac{1}{x_0 - 1}(0 - x_0)$

$$\Leftrightarrow \ln(x_0 - 1) - \frac{x_0}{x_0 - 1} + 2 = 0, \quad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln(x-1) - \frac{x}{x-1} + 2, \quad x \in A$.

Είναι $h(2) = 0$, οπότε η $(1) \Leftrightarrow h(x_0) = h(2)$, (2) .

$$\text{Έχουμε } h'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} > 0, \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα η h είναι συνάρτηση 1-1.

Επομένως η $(2) \Leftrightarrow x_0 = 2$.

$$\text{Η εξίσωση της εφαπτομένης } \varepsilon \text{ είναι } y - \ln(2-1) - 3 = \frac{1}{2-1}(x-2) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Οπότε $\varepsilon: y = x + 1$.

β. Είναι $g'(x) = e^x - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Η ευθεία ε εφάπτεται της C_g στο σημείο της $M(x, g(x))$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} M \in \varepsilon \\ g'(x) = \lambda_\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x + 1 \\ g'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - x^2 = x + 1, & (3) \\ e^x - 2x = 1, & (4) \end{cases}$$

$$\text{Η } (4) \Leftrightarrow e^x = 2x + 1, \text{ οπότε η } (3) \Leftrightarrow 2x + 1 - x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Δεκτή είναι η τιμή του $x = 0$ που επαληθεύει τις (3) και (4).

Άρα η ευθεία ε εφάπτεται της C_g , μόνο στο σημείο $M(0, 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. f : γνησίως μονότονη – Ανισότητες, ισότητες

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^7 + 5x - 6$.
 - α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\pi)$ και $f(3)$.
 - γ. i. Αν $x \in (1, 2)$, να δείξετε ότι $f(x) > 0$.
 ii. Αν $\lambda > \mu$, να δείξετε ότι $\frac{\lambda^7 - \mu^7}{\lambda - \mu} > -5$.
 - δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^7 + 2x - 3$. Να λύσετε:
 - α. την εξίσωση $x^7 + 2x = 3$
 - β. τις ανισώσεις:
 - i. $x < \frac{3}{x^6 + 2}$
 - ii. $e^{7x} + 2e^x > 3$
 - γ. τις εξισώσεις:
 - i. $f(e^x - 1) - 2x = x^7 - 3$
 - ii. $f(x^7 + x - 3) + x^7 = -2x - 3$
 - δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.
 - α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 - β. Να λύσετε:
 - i. την εξίσωση $x = \ln(x^2 + 1)$
 - ii. την ανίσωση $f(x^2 + 1) > f(e^x)$
 - iii. την εξίσωση $e^{f(x)} - 1 = f^2(x)$
 - γ. Να δείξετε ότι $\ln(\pi^2 + 1) + f(\ln \pi) < \pi$.
 - δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(3x) - f(2x)}$.
 - ε. Αν $f(a) < 0$, να δείξετε ότι $e^a < 1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x - 1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f .

β. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 + 1)^2 + \ln(x^2 + 1) = 1$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $xe^{x^2} > e$, στο $(0, +\infty)$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{x^2 + 1}{x + 1} > (x + 1)^2 - (x^2 + 1)^2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε:

i. την ανίσωση $f(5x^3) > f(8x^2 + 8)$

ii. την εξίσωση $(x^2 + 1)f(e^x - 1) - x^3 = 0$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(2x + 1) - f(x + 1)}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$.

α. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε:

i. την ανίσωση $2f'(f(x) + \ln 2) < 1$

ii. την εξίσωση $f'\left(\ln \frac{1 + e^x}{1 + e^{x^2}}\right) = f'(x - x^2)$

iii. την εξίσωση $f(x) + 2f'(1 - e^x) = \ln \frac{e}{2}$

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(x) + \ln 2}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x > 0$.

Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + 1 > e + \ln f(x)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x} + \ln x - 1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

β. Να λύσετε:

i. την εξίσωση $e^{1-\eta\mu x} - e^{1-\sigma\upsilon\nu x} = -\ln \epsilon\phi x$, στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$

ii. την ανίσωση $e^{1-x} - e^{1-x^2} > \ln x$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{(x-1)f(x)}$.

9. Να λύσετε:

α. την εξίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) = 1$

β. την ανίσωση $\ln \frac{x^2 + 1}{x + 1} > e^x - e^{x^2}$

γ. την εξίσωση $e^{x^2-1} + \ln x = e^{x-1}$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(\epsilon\phi x) - e^x > x + \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

ii. $f(e^{x-1} - 1) > f(\ln x^x)$, για κάθε $x > 1$

iii. $f(e^x) > f(1 + \eta\mu x)$, για κάθε $x > 0$

11. Να λύσετε:

α. την εξίσωση $x \ln x = 1 - x^3$

β. την ανίσωση $e^{x^3-1} x^x > 1$, στο $(0, +\infty)$.

12. α. Να λύσετε την εξίσωση $e^x = x^2 + 1$.

β. Να αποδείξετε ότι $2e^{\eta\mu\theta} \leq e(2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta)$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x + \alpha & , x > 0 \\ \eta\mu x + \ln(1 + \alpha^2), & x \leq 0 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

- 14.** Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , όταν:

α. $f(x) = x^2 + 3 \ln x$ και $g(x) = 1 + \ln x$

β. $f(x) = x^2 + 7 + \ln x$ και $g(x) = 8x - 7 \ln x$

γ. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$

δ. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{2}$

- 15.** Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα Δ .

α. $x^3 + x = \sin x$, $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$

β. $\ln(e^x - x) = \sin x$, $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$

γ. $e^x = x^4$, $\Delta = (-1, 0)$

- 16.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 3 \sin x$.

Να δείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $\frac{e^x - x}{\sin x} = 3$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

β. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

- 17.** Έστω $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(3) = 0$, για την οποία ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 2$. Να λύσετε την εξίσωση

$$(x-2)f(x) + 3 = x$$

- 18.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. $f(2) - f(1) < e^2 - e$

β. $f(3) - \sin 2 < f(2) - \sin 3$

γ. $f(2) + e^2 < f(1) + e^3$

δ. $f(2) - \sin 2 < f(1) - \sin 3$

- 19.** Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

Να δείξετε ότι:

α. $f(\pi) < e + \sin e + 1$, αν $f(e) = e$

β. $f(1) > \ln \frac{3^{e+1}}{e+2}$, αν $f(e) = e \ln 3$

γ. $f(e) < \ln \frac{1+e^2}{5^{1-e}}$, αν $f(2) = e \ln 5$.

Εξισώσεις με προφανείς ρίζες

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $5^x + 12^x = 13^x$

β. $3^{x-1} + 4^{x-1} = 5^{x-1}$

21. Να λύσετε την εξίσωση $2\chi\eta\mu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi = \pi$, στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

22. Να λύσετε την εξίσωση $x^4 = 4^x$, στο διάστημα $(0, +\infty)$.

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $e^x = (e-1)x + 1$

β. $3^x = 2x + 1$

24. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = f(2) = 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

B. f: γνησίως μονότονη σε διαστήματα

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 6x + 7$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές:

i. $f\left(\frac{1}{5}\right)$ και $f\left(\frac{1}{7}\right)$

ii. $f(\pi)$ και $f(3)$

γ. Αν $x < 1$, να δείξετε $f(x) > 2$.

δ. Αν $x \in [1, 2)$, να δείξετε ότι $2 \leq f(x) < 59$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(e)$ και $f(3)$.

γ. Να λύσετε:

i. την εξίσωση $f(\eta\mu\chi) = f(\sigma\upsilon\nu\chi)$

ii. την ανίσωση $f(3 + x^2) < f(3 + 2x^2)$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- β. Να λύσετε την ανίσωση $e^{\eta\mu x} < e^{\eta\mu x}$ στο διάστημα $(0, \pi)$.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{x^2 + 3}{2x^2 + 1} = 2 - x^2$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^3, & x < 0 \\ 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- β. Να λύσετε την ανίσωση $f(-2x) > f(-x^2)$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ στο διάστημα $(-1, 0)$.
- δ. Να αποδείξετε ότι $f(x+1) > f(e^x)$, για κάθε $x > 0$.

29. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(1) = 0$

- α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- β. Να λύσετε την εξίσωση
 - i. $f(2-x) = f(3)$ στο $(-\infty, 0)$
 - ii. $f(e^{2-x}) = f\left(\frac{1}{x-1}\right)$ στο $(1, 2)$
- γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{x-2}) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, 2)$.

Γ. Απόδειξη ανισοτήτων με βοηθητική συνάρτηση

30. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $f(1) = g(1)$ και ισχύει $f'(x) > g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .

31. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$ και $f'(x) < 2x - \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι $f(x) > x^2 - \eta\mu x$, για κάθε $x < 0$.
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2 - \eta\mu x$.
- γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- 32.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0)=0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x)+f'(x) > e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α.** Να δείξετε ότι $f(x) < \frac{x}{e^x}$, για κάθε $x < 0$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 33.** Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1)=0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $x^2 f'(x) > 1 - xf(x)$, για κάθε $x > 0$.
- α.** Να δείξετε ότι $f(x) < \frac{\ln x}{x}$, για κάθε $x \in (0, 1)$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 34.** Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\pi) = 0$. Αν, για κάθε $x > 0$ ισχύει $xf'(x) < f(x) + x^2 \sin x$, να δείξετε ότι $f(x) < x \eta \mu x$, για κάθε $x > \pi$.
- 35.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύουν
- $$f'(0) < 0 \text{ και } f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- α.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- β.** Να λύσετε την ανίσωση $f(\epsilon \phi x) > f(\eta \mu x)$, στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- γ.** Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) - \ln x = f(x)$.
- 36.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1$.
- α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- β.** Να λύσετε την εξίσωση
- $$f(e^x - 1) + f(2x) = f(x)$$
- 37.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + x - 1$. Να λύσετε:
- α.** την ανίσωση $f(x) < f(x^2) + \ln x$
- β.** την εξίσωση $e^{x-1} - 1 + f(x^5) = f(x^3)$, στο διάστημα $[-1, +\infty)$.

Επίλυση εξισώσεων – ανισώσεων με τη βοηθητική συνάρτηση
 $F(x) = f(x+c) - f(x)$

38. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα. Αν $f(5) = f(4)$, να λύσετε:

- α.** την εξίσωση $f(x+1) - f(x) = 0$
- β.** την ανίσωση $f(2x+1) > f(2x)$
- γ.** την εξίσωση $f(x^4 + 5) = f(x^4 + 4)$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2(x-2)\ln x + 2x^2 - 1$.

- α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα.
- β.** Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^3 + 2) + f(x^2) < f(x^2 + 2) + f(x^3)$$

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2 + 3)$.

- α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα.
- β.** Να λύσετε την ανίσωση

$$f(2x^2) + 2f(x+2) > f(2x+4) + 2f(x^2), \text{ στο } (0, +\infty)$$

- γ.** Να λύσετε την εξίσωση

$$f(2x^4 + 6) - f(2x^2 + 6) = 2f(x^4 + 3) - 2f(x^2 + 3)$$

Εφαπτομένες

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6\ln x$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$,

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο $A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

43. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-2) + 4$ και $g(x) = e^x - x^2$.

- α.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.
- β.** Να δείξετε ότι η παραπάνω ευθεία ε εφάπτεται της C_g , ακριβώς σε ένα σημείο.

44. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των συναρτήσεων:

$$f(x) = 2e^x - 1, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2$$

Β' ΟΜΑΔΑ

- 45.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in (0, \pi)$.
- α.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- β.** Να δείξετε ότι:
- i.** $\frac{\eta\mu x}{\eta\mu y} > \frac{x}{y}$, για κάθε $x, y \in (0, \pi)$ με $x < y$
- ii.** $\eta\mu x < \frac{2x}{\pi}$, για κάθε $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$
- γ.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi x}{\pi \eta\mu x - 2x}$.
- 46.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \ln(x+1) - 1$.
- α.** Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- β.** Να λύσετε:
- i.** την εξίσωση $\frac{1}{e^{x^2-1}} + 2 \ln x = 1$ **ii.** την ανίσωση $\ln \frac{x^2+1}{x+1} > \frac{e^{x^2} - e^x}{e^{x^2+x}}$
- γ.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(e^x) - f(x+1)}$.
- 47.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(x^2+1)$.
- α.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- β.** Να λύσετε την ανίσωση $x - 2 < \ln \frac{(2x-1)^2+1}{x^2+2x+2}$.
- γ.** Να δείξετε ότι $f\left(\ln(x^4+1+\frac{1}{x^4+1})\right) < f((x^4+1)-x^2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- δ.** Να λύσετε την εξίσωση $(4x^2+1)e^{-2x} = 1$.
- 48. α.** Να δείξετε ότι $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- β.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
- $$h(x) = e^x - x \quad \text{και} \quad \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$
- δέχονται κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

49. Για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι:

$$3\eta\mu x < x(2 + \sigma\upsilon\nu x)$$

50. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x > 0$ ισχύει:

α. $(1+x)^v > 1+vx$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 2$

β. $(1+x)^v > 1+vx + \frac{v(v-1)}{2}x^2$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 3$

51. α. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $e^{x^3+x} - e^{2x} = x - x^3$

ii. $e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 = 0$

β. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1} + x^2 > 2$.

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$, είναι πάνω από τη C_f στο διάστημα $(0, +\infty)$.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

54. Έστω $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}$ και $f'(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Να δείξετε ότι: $f(1) > 1 + \eta\mu 1$.

55. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(e) = e \ln 2$, $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, $x > 0$.

Να δείξετε ότι: $f(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1}$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

α. Να δείξετε ότι, για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[4, 16]$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = 2^{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x > 0$.

α. Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[\ln 2, \ln 4]$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $2^{e^x} = e^{2x}$, στο διάστημα $(0, +\infty)$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να δείξετε ότι $(a+1)^a > a^{a-1}$, για κάθε $a > 1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{(\eta\mu x)^{\eta\mu x}}{(\sigma\upsilon\nu x)^{\sigma\upsilon\nu x}} = \epsilon\phi x$, στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\ln x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ να λύσετε την ανίσωση $\ln \sigma\phi^3 x < \sigma\upsilon\nu^3 x - \eta\mu^3 x$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 3) + 3\ln(x^4 + 1) = (x^4 + 1)^3$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - 1, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^{-2x} - 1) < f(-2x)$, για κάθε $x > 0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^{2-x}) = f(6-2x)$ στο διάστημα $[0, 2]$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{4}{x}\right) > f\left(\frac{8}{x^2}\right)$, για κάθε $x > 2$.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha - \frac{\eta\mu x}{x} & , -\pi < x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -2e^{1-x} - \frac{x^3}{3} - x + \beta & , x > 0 \end{cases}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των α , β για τις οποίες η f είναι συνεχής.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{-x^2} - 3) = f(-2)$.

62. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύουν:

- $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(0) < 0$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να δείξετε ότι $f(2e^x) < f(1 - x^2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $f(3x+1)+1=f(x+1)+e^x$

ii. $f(x^7) - \ln x = f(x^6)$

iii. $f(\eta\mu^2 x) + e^{x^2} = f(x^2) + 1$

63. Για κάθε $x > e$, να δείξετε ότι

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} < \frac{\ln^2(x+1) - \ln^2 x}{2} < \frac{\ln x}{x}$$

64. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \eta\mu 3x - \eta\mu x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{3}) \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \in (0, \frac{\pi}{3}) \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) > 2x \sin 3x$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{3})$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

65. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad F(x) = f(2x) - f(x), \quad x \geq 0$$

α. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f' και F είναι γνησίως αύξουσες.

β. Να δείξετε ότι $F(x) < x f'(2x)$, για κάθε $x > 0$.

γ. Να δείξετε ότι η $g(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2) + f(x) < f(x^2) + f(2x)$, στο $(0, +\infty)$.

66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + \sin x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση

$$x^2 + 2f(\varepsilon\phi x) > 2(e^x + \sin x), \quad \text{στο διάστημα } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)(f(\ln x) - f(x-1))}$.

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x - x + \ln(\sin x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) > f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.

68. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^x - \alpha^{-x} - 1$, $\alpha > 1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

β. Να λύσετε την εξίσωση

$$3^x + 5^x + 7^x = 3 + 2^x + 4^x + 6^x$$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{3x}{x^2 + 1}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{x^3 + 4x}{x^2 + 1} - \frac{5}{2}\right) = 0$.

γ. Να δείξετε ότι $f(x^2 - \sin x + 1) > 0$, για κάθε $x > 0$.

δ. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(x)}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x(f(2x) - f(x))}$

70. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = 1$, για την οποία ισχύει

$$x^2 f'(x) + x f(x) = 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

γ. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x^2}\right) < f\left(\frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 + 1)^2 = e^{x^2} [1 + \ln(x^2 + 1)]$.

71. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x}}{x} + \alpha, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 1, & x = 0 \\ x^x, & x > 0 \end{cases}$.

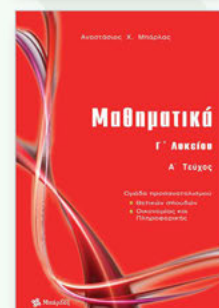
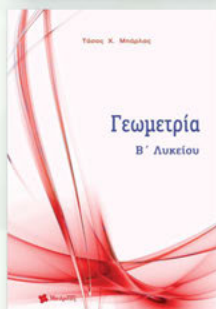
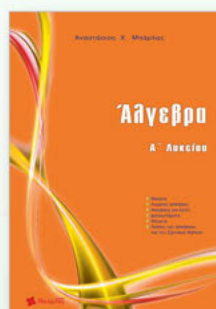
α. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία η f είναι συνεχής.

Αν $\alpha = 0$, τότε:

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e^{1-x^2}$, στο διάστημα $(0, +\infty)$.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(-\frac{\pi x}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2e^x}\right)$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.



Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α' Λυκείου
- Άλγεβρα Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Α', Β', Γ' ΕΠΑ.Λ.
- Γεωμετρία Α' Λυκείου
- Γεωμετρία Β' Λυκείου
- Θετικών Σπουδών
- Γενικής Παιδείας
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α' & Β'
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα

ISBN: 978-618-83984-0-5



Λ.Τ. 23,90 €