

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Μαθηματικά

Β΄ Λυκείου

Ομάδα προσανατολισμού
Θετικών σπουδών

2016 – 2017

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ τάξης Λυκείου ομάδας προσανατολισμού Θετικών σπουδών

Περιέχει:

- ✓ **Αναλυτική θεωρία.**
- ✓ **Παρατηρήσεις στη θεωρία**, στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ✓ **Μεθοδολογία** και **Σχόλια** για τη λύση ασκήσεων.
- ✓ **Λυμένες ασκήσεις**, ως υποδείγματα τρόπου λύσης.
- ✓ **Ασκήσεις για λύση.**
- ✓ **Θέματα** που καλύπτουν όλο το φάσμα των γνώσεων που πρέπει να έχει ο μαθητής, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των εξετάσεων.
- ✓ **Διαγωνίσματα** ανά διδακτική ενότητα.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν:

- **Οι λύσεις των ασκήσεων για λύση** του βιβλίου αυτού .

Ιούνιος 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Η Έννοια του Διανύσματος	6
2. Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων	15
3. Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα	26
4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο	53
5. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων.....	87

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

6. Εξίσωση ευθείας	122
7. Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας.....	162
8. Απόσταση Σημείου από Ευθεία – Εμβαδόν Τριγώνου	181

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

9. Ο Κύκλος	200
10. Η Παραβολή	241
11. Η Έλλειψη	258
12. Η Υπερβολή	279

ΘΕΜΑΤΑ	300
--------------	-----

Λύσεις των Ασκήσεων για λύση και Θεμάτων	324
--	-----

3

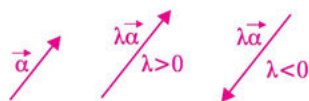
Πολλαπλασιασμός αριθμού
με διάνυσμα

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ορισμός

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{a}$** και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{a}$ ή $\lambda \vec{a}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι **ομόρροπο του $\vec{a}$** , αν $\lambda > 0$ και **αντίρροπο του $\vec{a}$** , αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda| |\vec{a}|$.

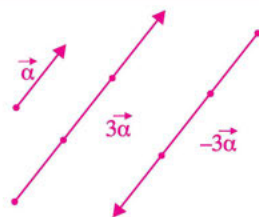


Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{a}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{a}$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{a}}{\lambda}$.

παράδειγμα: Αν το διάνυσμα $\vec{a}$ του διπλανού σχήματος έχει μέτρο 2, τότε:

- το διάνυσμα $3\vec{a}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{a}$ και έχει μέτρο $|3\vec{a}| = 3|\vec{a}| = 3 \cdot 2 = 6$
- το διάνυσμα $-3\vec{a}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{a}$, αλλά έχει και αυτό μέτρο $|-3\vec{a}| = -3|\vec{a}| = 3 \cdot 2 = 6$



Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα

♦ Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$$1. \lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta} \quad 2. (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \quad 3. \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$$

♦ Ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε:

$$i. \lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{a} = \vec{0}$$

$$ii. (-\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a}) = -(\lambda\vec{a})$$

$$iii. \lambda(\vec{a} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{\beta}$$

$$iv. (\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$$

v. Αν $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$ (νόμος διαγραφής για τον πραγματικό παράγοντα)

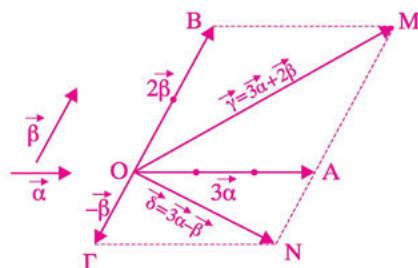
vi. Αν $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$ (νόμος διαγραφής για το διανυσματικό παράγοντα)

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Από τα διανύσματα αυτά «παράγονται», για παράδειγμα, τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{\delta} = 3\vec{a} - \vec{b}$, κτλ.

Καθένα από τα διανύσματα αυτά λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.



Ορισμός

Κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{a} + \lambda\vec{b}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων.

παράδειγμα: το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{\gamma}$.

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Θεώρημα

Αν $\vec{a}, \vec{b}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{b} \neq \vec{0}$, τότε: $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

► Έστω $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Από τον ορισμό του γινομένου πραγματικού αριθμού με διάνυσμα, έχουμε: $\vec{a} // \vec{b}$.

► Αντιστρόφως

Έστω $\vec{a} // \vec{b}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$. Θέτουμε $\kappa = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, οπότε $|\vec{a}| = \kappa |\vec{b}|$. Συνεπώς:

- Αν $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, τότε $\vec{a} = \kappa\vec{b}$. (είναι: $\lambda = \kappa$)
- Αν $\vec{a} \downarrow \vec{b}$, τότε $\vec{a} = -\kappa\vec{b}$. (είναι: $\lambda = -\kappa$)
- Αν $\vec{a} = \vec{0}$, τότε $\vec{a} = 0 \cdot \vec{b}$. (είναι: $\lambda = 0$)

Σε κάθε περίπτωση υπάρχει λ και μάλιστα μοναδικός, τέτοιος, ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

Πρόταση

Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα.

Αν $\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε $\lambda = 0$ και $\mu = 0$ και αντιστρόφως.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι ένας τουλάχιστον από τους λ, μ είναι διαφορετικός από το μηδέν π.χ.

$$\lambda \neq 0. \text{ Είναι } \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{a} = -\mu\vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} // \vec{\beta}, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα $\lambda = 0$ και $\mu = 0$.

($\Leftarrow$) Αν $\lambda = 0$ και $\mu = 0$, τότε προφανώς $\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$.

Εφαρμογή

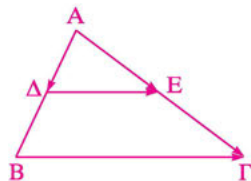
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E των πλευρών του $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι: $\Delta E // \frac{B\Gamma}{2}$

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\Delta E} = \frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{\Delta E} &= \vec{AE} - \vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{A\Gamma} - \frac{1}{2}\vec{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}\vec{B\Gamma} \end{aligned}$$



Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

Αν M το μέσον του τμήματος AB και O σημείο αναφοράς, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

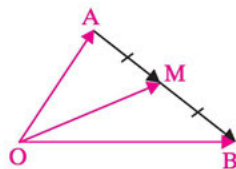
Απόδειξη

Είναι: (M : το μέσον του AB) $\Rightarrow \vec{AM} = \vec{MB}$

$$\Rightarrow \vec{OM} - \vec{OA} = \vec{OB} - \vec{OM}$$

$$\Rightarrow 2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$



Γεωμετρικοί Τόποι

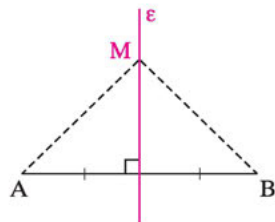
Μεσοκάθετος

Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

Οπότε, αν A και B είναι δύο σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M που ικανοποιούν τη σχέση

$$|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$$

είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AB .



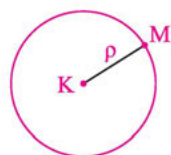
Κύκλος

Ο κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το K απόσταση ίση με ρ .

Οπότε, αν K είναι ένα σταθερό σημείο, τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M που ικανοποιούν τη σχέση:

$$|\vec{MK}| = \rho$$

είναι ο κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ .



Παρατηρήσεις

- Αν C είναι ο γεωμετρικός τόπος και I η κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα, τότε το τυχαίο σημείο M που έχει την ιδιότητα I ανήκει στο C και αντιστρόφως το τυχαίο σημείο του C έχει την ιδιότητα I .

Οπότε, για την εύρεση ενός γεωμετρικού τόπου που τα σημεία του έχουν μία κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα I , υποθέτουμε ότι C είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος και M τυχαίο σημείο του, που έχει την ιδιότητα I .

- Ισχύει $M \in C \Leftrightarrow M: \text{έχει την ιδιότητα } I$

$$\Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow M: \text{έχει μία βασική ιδιότητα}$$

Από τη βασική ιδιότητα που έχει το M προσδιορίζεται και ο γεωμετρικός τόπος C .

► Αν θέλουμε να βρούμε:

- που **βρίσκονται ή ανήκουν τα σημεία** M του επιπέδου που έχουν μία κοινή ιδιότητα I ,

ή

- που **κινείται ένα σημείο** M που έχει μία ιδιότητα I ,

τότε με την υπόθεση ότι το σημείο M έχει την ιδιότητα I και με συνεπαγωγές, καταλήγουμε ότι το M έχει μία από τις βασικές ιδιότητες, οπότε προσδιορίζεται το σύνολο C που βρίσκεται το M .

Στις περιπτώσεις αυτές δε χρειάζονται ισοδυναμίες, διότι δεν είναι απαραίτητο όλα τα σημεία που ανήκουν στο C να έχουν την ιδιότητα I .

Συνοπτική θεωρία

♦ Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\lambda \neq 0$ και $\vec{\beta} = \lambda \vec{a}$ έχουμε:

- $\vec{\beta} // \vec{a}$
- Αν $\lambda > 0$, τότε $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{a}$
- Αν $\lambda < 0$, τότε $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{a}$
- $|\vec{\beta}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

♦ Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$ και $\vec{\beta} = \lambda \vec{a}$, τότε $\vec{\beta} = \vec{0}$

♦ Ιδιότητες

A. 1. $\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$

2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

3. $\lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$

B. i. $\lambda \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$

ii. $(-\lambda)\vec{a} = \lambda(-\vec{a}) = -(\lambda \vec{a})$

iii. $\lambda(\vec{a} - \vec{\beta}) = \lambda \vec{a} - \lambda \vec{\beta}$

iv. $(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} - \mu \vec{a}$

v. Αν $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$

vi. Αν $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$

♦ Θεώρημα

Αν $\vec{a} // \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει μοναδικός $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$.

Παρατηρήσεις

► Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \text{ και } \lambda \leq 0$
- $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \text{ και } \lambda \geq 0$

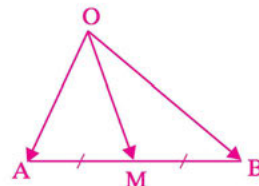
► Αν $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ και } \mu = 0$$

► Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, όταν δύο οποιαδήποτε διανύσματα με άκρα δύο σημεία από τα A, B, Γ είναι παράλληλα, π.χ. $\vec{AB} // \vec{A\Gamma}$.

► (M: το μέσον του AB) $\Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$
 $\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$

[Δηλαδή, το άθροισμα δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή ισούται με το διπλάσιο του διανύσματος, που έχει αρχή την κοινή αρχή των διανυσμάτων και πέρας το μέσον του τμήματος που ορίζουν τα πέρατα αυτών].

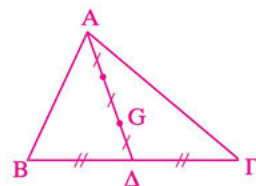


► Το διάνυσμα $\vec{\alpha}_0 = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} = \frac{1}{|\vec{\alpha}|} \cdot \vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο και ομόρροπο του $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, αφού

$$|\vec{\alpha}_0| = \left| \frac{1}{|\vec{\alpha}|} \cdot \vec{\alpha} \right| = \frac{1}{|\vec{\alpha}|} \cdot |\vec{\alpha}| = 1 \text{ και } \frac{1}{|\vec{\alpha}|} > 0$$

*► Αποδεικνύεται ότι ένα σημείο G είναι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ABΓ, αν και μόνο αν ισχύει $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} = \vec{0}$ και ότι για οποιονδήποτε σημείο O ισχύει

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}}{3}$$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Πράξεις διανυσμάτων

Για να βρούμε ένα άθροισμα διανυσμάτων, βρίσκουμε τα διανύσματα που έχουν τον ίδιο πραγματικό παράγοντα και κάνουμε την πρόσθεση ή αφαίρεση.

π.χ. • $\lambda \vec{AB} + \lambda \vec{BG} = \lambda (\vec{AB} + \vec{BG}) = \lambda \vec{AG}$

• $\lambda \vec{AB} - \lambda \vec{GB} = \lambda (\vec{AB} - \vec{GB}) = \lambda (\vec{AB} + \vec{BG}) = \lambda \vec{AG}$

• $\lambda \vec{AB} - \lambda \vec{AG} = \lambda (\vec{AB} - \vec{AG}) = \lambda \vec{GB}$

• $\lambda \vec{AB} + \lambda \vec{AG} = \lambda (\vec{AB} + \vec{AG}) = 2\lambda \vec{AM}$ (M το μέσον του BG)

• $\lambda \vec{AB} + \lambda \vec{GB} = -\lambda (\vec{BA} + \vec{BG}) = -2\lambda \vec{BM}$ (M το μέσον του AG)

Αν δεν υπάρχουν διανύσματα με τον ίδιο πραγματικό παράγοντα, τότε: παίρνουμε σημείο αναφοράς και γράφουμε τα διανύσματα σαν διαφορές διανυσματικών ακτίνων.

π.χ. $5\vec{OA} + 2\vec{AB} + \vec{AG} = 5\vec{OA} + 2(\vec{OB} - \vec{OA}) + \vec{OG} - \vec{OA} = \dots$

Ειδικά, αν έχουμε άθροισμα διανυσματικών ακτίνων και το άθροισμα των πραγματικών παραγόντων είναι μηδέν, τότε, εκτός από τον προηγούμενο τρόπο, μπορούμε να γράφουμε τον έναν πραγματικό παράγοντα συναρτηήσει των άλλων.

π.χ. $5\vec{OA} - 3\vec{OB} - 2\vec{OG} = 3\vec{OA} + 2\vec{OA} - 3\vec{OB} - 2\vec{OG}$

$$= 3(\vec{OA} - \vec{OB}) + 2(\vec{OA} - \vec{OG}) = 3\vec{BA} + 2\vec{GA}$$

1. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να δείξετε ότι:

$$3\vec{AG} + 2\vec{BD} + \vec{BA} = 3\vec{BG} - 2\vec{DA}$$

Λύση

Είναι: $3\vec{AG} + 2\vec{BD} + \vec{BA} = 3\vec{BG} - 2\vec{DA} \Leftrightarrow 3\vec{AG} - 3\vec{BG} + 2\vec{BD} + 2\vec{DA} + \vec{BA} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3(\vec{AG} - \vec{BG}) + 2(\vec{BD} + \vec{DA}) + \vec{BA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3(\vec{AG} + \vec{GB}) + 2\vec{BA} + \vec{BA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{AB} + 3\vec{BA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3(\vec{AB} + \vec{BA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \vec{0} = \vec{0}, \text{ που ισχύει.}$$

2. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να δείξετε ότι:

$$7\vec{AG} + 6\vec{GB} - 5\vec{AB} = 2\vec{AD} - \vec{GD} + \vec{DB}$$

Λύση

Θεωρούμε το A ως σημείο αναφοράς και έχουμε:

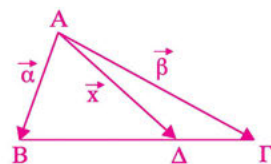
$$\begin{aligned} 7\vec{AG} + 6\vec{GB} - 5\vec{AB} &= 2\vec{AD} - \vec{GD} + \vec{DB} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7\vec{AG} + 6(\vec{AB} - \vec{AG}) - 5\vec{AB} &= 2\vec{AD} - (\vec{AD} - \vec{AG}) + (\vec{AB} - \vec{AD}) \\ \Leftrightarrow 7\vec{AG} + 6\vec{AB} - 6\vec{AG} - 5\vec{AB} &= 2\vec{AD} - \vec{AD} + \vec{AG} + \vec{AB} - \vec{AD} \\ \Leftrightarrow \vec{AG} + \vec{AB} &= \vec{AG} + \vec{AB}, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

3. Στο διπλανό σχήμα είναι $\vec{BD} = 2\vec{DG}$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $\vec{BG} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

ii. $\vec{BD} = \frac{2}{3}\vec{BG}$



β. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Λύση

α. Είναι:

i. $\vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

ii. $\vec{BD} = 2\vec{DG} \Leftrightarrow \vec{BD} = 2(\vec{BG} - \vec{BD})$

$$\Leftrightarrow \vec{BD} = 2\vec{BG} - 2\vec{BD}$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{BD} = 2\vec{BG}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BD} = \frac{2}{3}\vec{BG}$$

β. Είναι $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BG}$

$$= \vec{\alpha} + \frac{2}{3}(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \frac{3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}}{3}$$

$$= \frac{\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}}{3} = \frac{1}{3}\vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$$

Άρα $\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$.

Σταθερό διάνυσμα

Έστω ότι έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{u}$ που είναι εκφρασμένο συναρτήσει διανυσμάτων που το ένα τουλάχιστον έχει το ένα άκρο του μεταβλητό. Για να δείξουμε ότι το $\vec{u}$ είναι σταθερό, κάνουμε μετασχηματισμούς στα διανύσματα, ώστε μετά τις πράξεις να γίνει απαλοιφή του μεταβλητού σημείου.

4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να δείξετε ότι, για οποιοδήποτε σημείο M, το διάνυσμα

$$\vec{u} = 5\vec{MA} - 3\vec{MB} - 2\vec{MG}$$

είναι σταθερό.

Λύση

[Είναι $5 - 3 - 2 = 0$, οπότε γράφουμε το 5 σαν $3 + 2$].

$$\begin{aligned}\text{Έχουμε } \vec{u} &= 5\vec{MA} - 3\vec{MB} - 2\vec{MG} = 3\vec{MA} + 2\vec{MA} - 3\vec{MB} - 2\vec{MG} \\ &= 3(\vec{MA} - \vec{MB}) + 2(\vec{MA} - \vec{MG}) \\ &= 3\vec{BA} + 2\vec{GA}, \text{ που είναι σταθερό.}\end{aligned}$$

B1. Παράλληλα διανύσματα

Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, για να αποδείξουμε ότι:

- $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$
- $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda > 0$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$
- $\vec{\alpha} \downarrow \vec{\beta}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda < 0$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$

5. Αν ισχύει $4\vec{AP} + 3\vec{AD} - 2\vec{AG} = 4\vec{BP} + \vec{BD}$ και $\vec{GD} \neq \vec{0}$, να δείξετε ότι

$$\vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{GD}$$

Λύση

[Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda < 0$, τέτοιος, ώστε $\vec{AB} = \lambda \vec{GD}$]. Έχουμε:

$$\begin{aligned}4\vec{AP} + 3\vec{AD} - 2\vec{AG} &= 4\vec{BP} + \vec{BD} \Rightarrow 4\vec{AP} + 3\vec{AD} - 2\vec{AG} = 4(\vec{AP} - \vec{AB}) + (\vec{AD} - \vec{AB}) \\ &\Rightarrow 4\vec{AP} + 3\vec{AD} - 2\vec{AG} = 4\vec{AP} - 4\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AB} \\ &\Rightarrow 2\vec{AD} - 2\vec{AG} = -5\vec{AB} \Rightarrow 2(\vec{AD} - \vec{AG}) = -5\vec{AB} \\ &\Rightarrow 2\vec{GD} = -5\vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} = -\frac{2}{5}\vec{GD}\end{aligned}$$

Άρα $\vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{GD}$.

B2. Συνευθειακά σημεία

Γνωρίζουμε ότι, αν δύο διανύσματα έχουν ένα κοινό σημείο και είναι παράλληλα, τότε έχουν τον ίδιο φορέα.

Οπότε, αν θέλουμε να δείξουμε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε π.χ.

$$\vec{AB} // \vec{A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \vec{AB} = \lambda \vec{A\Gamma}$$

6. Αν ισχύει $3\vec{OA} - 8\vec{OB} + 5\vec{OG} = \vec{0}$

α. να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά

β. να βρείτε τη σχετική θέση των A, B, Γ .

Λύση

$$\begin{aligned} \text{α. Έχουμε} \quad 3\vec{OA} - 8\vec{OB} + 5\vec{OG} &= \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{OA} - 3\vec{OB} - 5\vec{OB} + 5\vec{OG} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 3(\vec{OA} - \vec{OB}) - 5(\vec{OB} - \vec{OG}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 3\vec{BA} - 5\vec{GB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{AB} = \frac{5}{3}\vec{BG} \quad (1) \end{aligned}$$

Οπότε, τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{BG}$ είναι συγγραμμικά και επειδή, έχουν κοινό άκρο το B , έχουν τον ίδιο φορέα. Άρα, τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

β. Από την ισότητα (1) έχουμε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{BG}$ είναι ομόρροπα. Άρα, τα A, Γ είναι εκατέρωθεν του B .



7. Αν οι διανυσματικές θέσεις των σημείων A, B, Γ ως προς ένα σημείο O είναι:

$$2\vec{a} - \vec{\beta}, \quad 5\vec{a} - 3\vec{\beta}, \quad -4\vec{a} + 3\vec{\beta}$$

αντίστοιχα, να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{AB} // \vec{A\Gamma}$.

$$\text{Έχουμε} \quad \vec{OA} = 2\vec{a} - \vec{\beta}, \quad \vec{OB} = 5\vec{a} - 3\vec{\beta}, \quad \vec{OG} = -4\vec{a} + 3\vec{\beta}.$$

Είναι:

- $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 5\vec{a} - 3\vec{\beta} - (2\vec{a} - \vec{\beta}) = 3\vec{a} - 2\vec{\beta}$
- $\vec{A\Gamma} = \vec{OG} - \vec{OA} = -4\vec{a} + 3\vec{\beta} - (2\vec{a} - \vec{\beta}) = -6\vec{a} + 4\vec{\beta} = -2(3\vec{a} - 2\vec{\beta})$

Οπότε $\vec{A\Gamma} = -2\vec{AB}$. Άρα $\vec{AB} // \vec{A\Gamma}$.

Βασικά διανύσματα ενός σχήματος

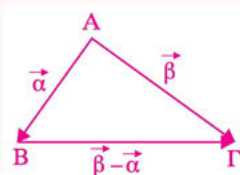
Όταν έχουμε ένα σχήμα π.χ. τρίγωνο ή παραλληλόγραμμο, ονομάζουμε τα διανύσματα

$$\vec{AB} = \vec{a}, \quad \vec{AG} = \vec{\beta}$$

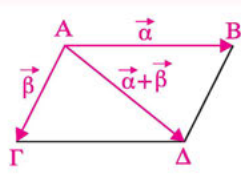
και εκφράζουμε οποιοδήποτε άλλο

διάνυσμα των σχημάτων συναρτήσει των $\vec{a}, \vec{\beta}$.

π.χ. $\vec{BG} = \vec{\beta} - \vec{a}$, (σχ. 1.) $\vec{AD} = \vec{a} + \vec{\beta}$, (σχ. 2.)



σχ. 1.



σχ. 2.

8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z , ώστε να ισχύουν:

$$\vec{A\Delta} = \frac{1}{2}\vec{AB}, \quad \vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{BZ} = 2\vec{B\Gamma}$$

Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε $\vec{\Delta E} \parallel \vec{\Delta Z}$.

Αν $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε

$$\vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB} = \vec{\beta} - \vec{a}$$

Είναι:

$$\bullet \quad \vec{\Delta E} = \vec{AE} - \vec{A\Delta} = \frac{2}{3}\vec{A\Gamma} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

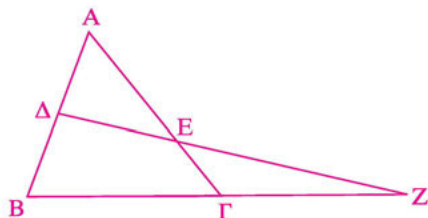
$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{\beta} = \frac{-3\vec{a} + 4\vec{\beta}}{6}$$

$$\bullet \quad \vec{\Delta Z} = \vec{BZ} - \vec{B\Delta} = 2\vec{B\Gamma} - \frac{1}{2}\vec{BA} = 2(\vec{\beta} - \vec{a}) + \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$= (-2 + \frac{1}{2})\vec{a} + 2\vec{\beta}$$

$$= -\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{\beta} = \frac{-3\vec{a} + 4\vec{\beta}}{2} = 3 \cdot \frac{-3\vec{a} + 4\vec{\beta}}{6} = 3\vec{\Delta E}$$

Άρα $\vec{\Delta Z} \parallel \vec{\Delta E}$.



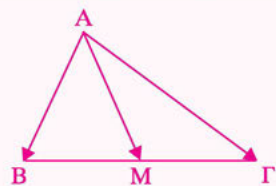
Γ. Διανυσματική ακτίνα του μέσου τμήματος

- Αν έχουμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και το μέσο M της $B\Gamma$,

τότε $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AG}}{2}$ ή $\vec{AB} + \vec{AG} = 2\vec{AM}$

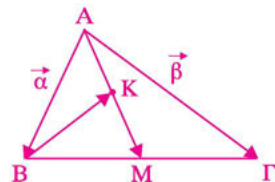
- Αν έχουμε το άθροισμα δύο διανυσματικών ακτίνων

$\vec{OA} + \vec{OB}$, τότε παίρνουμε το μέσον M του AB και έχουμε $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$.



9. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία M , K είναι τα μέσα των $B\Gamma$, AM αντίστοιχα. Αν $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, τα διανύσματα:

$\vec{AM}$ και $\vec{BK}$

**Λύση**

- Επειδή το M είναι το μέσον του $B\Gamma$, έχουμε $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AG}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$.
- Αφού το K είναι το μέσον του AM , έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{BK} &= \frac{\vec{BA} + \vec{BM}}{2} = \frac{\vec{BA} + \vec{BA} + \vec{AM}}{2} = \frac{-2\vec{AB} + \vec{AM}}{2} = \frac{-2\vec{a} + \frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}}{2} \\ &= \frac{-4\vec{a} + \vec{a} + \vec{\beta}}{4} = \frac{-3\vec{a} + \vec{\beta}}{4}\end{aligned}$$

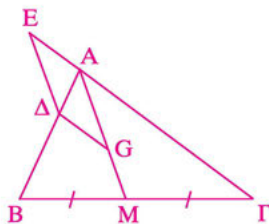
10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , για τα οποία ισχύουν

$$\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB} \quad \text{και} \quad \vec{AE} = -\frac{1}{3}\vec{AG}$$

Αν G το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AG\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

- Είναι:
- $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM}$, όπου M το μέσο του $B\Gamma$
 - $\vec{E\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AG})$
 $= \frac{1}{3} \cdot 2\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AM}$



Άρα $\vec{E\Delta} = \vec{AG}$, επομένως το τετράπλευρο $AG\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

11. Αν K, Λ τα μέσα των διαγωνίων AG, BD αντίστοιχα, ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι

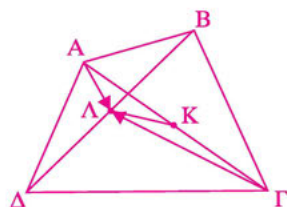
$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{GB} + \vec{GD} = 4\vec{K\Lambda}$$

Λύση

Επειδή το Λ είναι το μέσο του $B\Delta$, έχουμε:

$$\bullet \vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{A\Lambda}, \quad (1)$$

$$\bullet \vec{GB} + \vec{GD} = 2\vec{G\Lambda}, \quad (2)$$



Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{GB} + \vec{GD} = 2(\vec{A\Lambda} + \vec{G\Lambda}) = -2(\vec{\Lambda A} + \vec{\Lambda G}) = -2 \cdot 2\vec{\Lambda K} = 4\vec{K\Lambda}$$

12. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB και το σημείο του M , ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$.

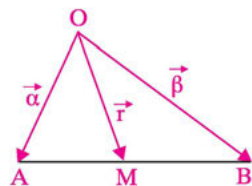
Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ τα διανύσματα θέσεως των σημείων A, B αντίστοιχα, να βρείτε το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ του σημείου M .

Λύση

Έχουμε $MA = \frac{2}{3}MB$. Επειδή το σημείο M είναι εσωτερικό

του AB , έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{MA} = -\frac{2}{3}\vec{MB} &\Leftrightarrow 3\vec{MA} = -2\vec{MB} \Leftrightarrow 3(\vec{a} - \vec{r}) = -2(\vec{\beta} - \vec{r}) \\ &\Leftrightarrow 3\vec{a} - 3\vec{r} = -2\vec{\beta} + 2\vec{r} \Leftrightarrow -3\vec{r} - 2\vec{r} = -3\vec{a} - 2\vec{\beta} \\ &\Leftrightarrow 5\vec{r} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{r} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{\beta}}{5} \end{aligned}$$



Δ. Γενικές

Εύρεση αριθμού από διανυσματική ισότητα

Αν έχουμε μία διανυσματική ισότητα και θέλουμε,

- να αποδείξουμε μία ισότητα πραγματικών αριθμών ή
- να λύσουμε μία εξίσωση με ένα άγνωστο ή δύο αγνώστους, τότε μετασχηματίζουμε τη διανυσματική ισότητα στη μορφή:
 - $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a} \quad (1) \text{ με } \vec{a} \neq \vec{0}, \text{ οπότε η } (1) \Leftrightarrow \lambda = \mu$
 - $\kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \quad (2) \text{ με } \vec{a} \nparallel \vec{\beta}, \text{ οπότε η } (2) \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ και } \lambda = 0$

13. Δίνονται τα συνευθειακά σημεία A, B και Γ ($A \neq B$), για τα οποία ισχύει

$$\vec{MB} = \vec{MA} + x\vec{B\Gamma},$$

Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το Γ είναι το μέσο του AB .

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{MB} = \vec{MA} + x\vec{B\Gamma} &\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{MA} = x\vec{B\Gamma} \\ &\Leftrightarrow \vec{AB} = x\vec{B\Gamma}, \quad (1)\end{aligned}$$



Το σημείο Γ είναι το μέσο του AB , όταν $\vec{B\Gamma} = \frac{1}{2}\vec{BA}$.

Οπότε η (1) γίνεται

$$\begin{aligned}\vec{AB} = x \cdot \frac{1}{2}\vec{BA} &\Leftrightarrow \vec{AB} = -\frac{x}{2}\vec{AB} \\ &\Leftrightarrow 1 = -\frac{x}{2}, \text{ αφού } \vec{AB} \neq \vec{0} \\ &\Leftrightarrow x = -2\end{aligned}$$

14. Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε τα διανύσματα $\vec{v} = 4\vec{a} + (\lambda - 3)\vec{\beta}$ και $\vec{u} = \lambda\vec{a} + \vec{\beta}$, να είναι αντίρροπα.

Λύση

Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ είναι αντίρροπα, υπάρχει $\mu < 0$ ώστε:

$$\vec{v} = \mu\vec{u} \Rightarrow 4\vec{a} + (\lambda - 3)\vec{\beta} = \lambda\mu\vec{a} + \mu\vec{\beta} \Rightarrow (4 - \lambda\mu)\vec{a} + (\lambda - 3 - \mu)\vec{\beta} = \vec{0} \quad (1)$$

Επειδή $\vec{a} \nparallel \vec{\beta}$ από την (1) έχουμε

$$\begin{cases} 4 - \lambda\mu = 0 \\ \lambda - 3 - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \lambda(\lambda - 3) = 0 \\ \mu = \lambda - 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Η (2)} \Leftrightarrow 4 - \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 4$$

- Για $\lambda = -1$, έχουμε $\mu = -1 - 3 = -4 < 0$
- Για $\lambda = 4$, έχουμε $\mu = 4 - 3 = 1 > 0$, που απορρίπτεται.

Άρα $\lambda = -1$.

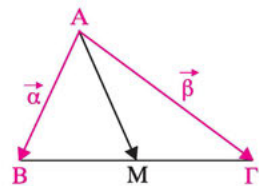
15. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM η διάμέσός του. Αν ισχύει,

$$\kappa \vec{AB} + \lambda \vec{A\Gamma} = 3\vec{B\Gamma} + 2\vec{AM},$$

να βρείτε τα κ, λ .

Λύση

Έστω $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$.



$$\text{Είναι} \quad \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{A\Gamma} = 3\vec{B\Gamma} + 2\vec{AM} \Rightarrow \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} = 3(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) + \vec{\alpha} + \vec{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} = 4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} \Rightarrow (\kappa + 2)\vec{\alpha} + (\lambda - 4)\vec{\beta} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \kappa + 2 = 0 \text{ και } \lambda - 4 = 0, \quad [\text{αφού } \vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}]$$

$$\Rightarrow \kappa = -2 \text{ και } \lambda = 4$$

Άρα $\kappa = -2$ και $\lambda = 4$.

16. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τα σημεία Δ και E , ώστε το Δ

να είναι το μέσο του $B\Gamma$ και για το E να ισχύει $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{A\Gamma}$. Αν P το σημείο

τομής των $A\Delta$ και BE και ισχύουν $\vec{AP} = \lambda \vec{A\Delta}$ και $\vec{BP} = \mu \vec{BE}$, τότε:

α. να δείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\mu = \frac{3}{4}$

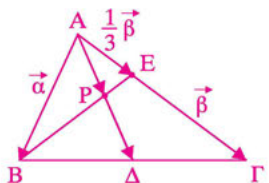
β. να γράψετε το $\vec{AP}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση

α. Έχουμε:

$$\bullet \quad \vec{AP} = \lambda \vec{A\Delta} = \lambda \cdot \frac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma}}{2} = \lambda \cdot \frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2} = \frac{\lambda}{2}\vec{\alpha} + \frac{\lambda}{2}\vec{\beta}, \quad (1)$$

$$\bullet \quad \vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{\alpha} + \mu \vec{BE} = \mu(\vec{BA} + \vec{AE}) + \vec{\alpha} = \mu(-\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}) + \vec{\alpha}, \quad (2)$$



Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\frac{\lambda}{2}\vec{\alpha} + \frac{\lambda}{2}\vec{\beta} = -\mu\vec{\alpha} + \frac{\mu}{3}\vec{\beta} + \vec{\alpha} \Leftrightarrow 3\lambda\vec{\alpha} + 3\lambda\vec{\beta} = -6\mu\vec{\alpha} + 2\mu\vec{\beta} + 6\vec{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (3\lambda + 6\mu - 6)\vec{\alpha} + (3\lambda - 2\mu)\vec{\beta} = \vec{0}, \quad (3)$$

Επειδή $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ από τη σχέση (3) έχουμε

$$\begin{cases} 3\lambda + 6\mu - 6 = 0 \\ 3\lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu - 2 = 0 \\ 3\lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\lambda - 2 = 0 \\ \mu = \frac{3\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{3}{4} \end{cases}$$

β. Από τη σχέση (1) είναι $\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta}$.

Ε. Γεωμετρικοί τόποι

17. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{M\Gamma} - \vec{A\Gamma}| - |\vec{A\Gamma} - \vec{BM} + \vec{BA}| = 0$$

Λύση

Έστω C_1 ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Είναι

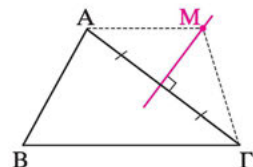
$$M \in C_1 \Leftrightarrow |\vec{M\Gamma} - \vec{A\Gamma}| - |\vec{A\Gamma} - \vec{BM} + \vec{BA}| = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{M\Gamma} + \vec{GA}| - |\vec{BA} + \vec{A\Gamma} - \vec{BM}| = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{MA}| - |\vec{B\Gamma} - \vec{BM}| = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{MA}| - |\vec{M\Gamma}| = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{MA}| = |\vec{M\Gamma}|$$



Άρα ο C_1 είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$.

18. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσον της πλευράς $B\Gamma$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{MB} - \vec{\Gamma\Delta}| = |\vec{A\Delta} - \vec{B\Gamma} + \vec{BA}|$$

Λύση

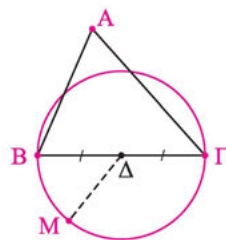
Έστω C ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Είναι

$$M \in C \Leftrightarrow |\vec{MB} - \vec{\Gamma\Delta}| = |\vec{A\Delta} - \vec{B\Gamma} + \vec{BA}|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{MB} - \vec{\Delta B}| = |\vec{BA} + \vec{A\Delta} - \vec{B\Gamma}|, [\text{αφού } \vec{\Gamma\Delta} = \vec{\Delta B}]$$

$$\Leftrightarrow |\vec{MB} + \vec{B\Delta}| = |\vec{B\Delta} - \vec{B\Gamma}|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{M\Delta}| = |\vec{\Gamma\Delta}|$$



Άρα ο C είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\rho = |\vec{\Gamma\Delta}| = \frac{1}{2}(B\Gamma)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{a}$ και το συμβολίζουμε με ή ένα διάνυσμα το οποίο:

είναι ομόρροπο του $\vec{a}$, αν και του $\vec{a}$, αν $\lambda < 0$ και έχει μέτρο

β. Αν $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, τότε ή

γ. Αν $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε

δ. Αν $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε

ε. Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής, όπου

στ. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με, τότε $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \dots, \dots$

ζ. Αν M το μέσον του τμήματος AB , τότε $\vec{OM} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν $\lambda \neq 0$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $|\lambda \vec{a}| = \lambda |\vec{a}|$.

β. Αν $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, τότε $\vec{a} = \vec{0}$.

γ. Αν $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$.

δ. Αν $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$, τότε $\lambda = \mu$.

ε. Αν $\vec{a} // \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

στ. Αν M το μέσον του τμήματος AB , τότε $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} - \vec{OB}}{2}$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, με $\lambda > 0$.

β. Αν $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, τότε $|\vec{a}| = \lambda |\vec{\beta}|$.

γ. Αν $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} // \vec{\beta}$.

δ. Αν M το μέσον του τμήματος AB, τότε $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$.

ε. Αν $\vec{a} + 2\vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \pi$.

στ. Αν $|\vec{a} - 2\vec{\beta}| = 0$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

ζ. Το διάνυσμα $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ είναι μοναδιαίο στην κατεύθυνση του $\vec{a}$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.

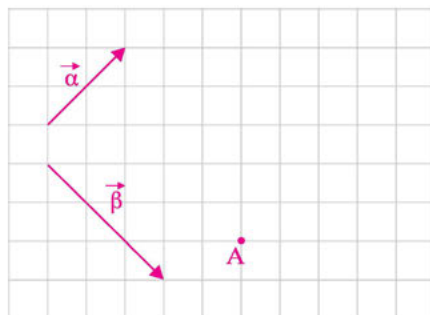
4. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και το σημείο A.

Να βρείτε τα σημεία B, Γ, Δ, όταν:

α. $\vec{AB} = 2\vec{a}$

β. $\vec{AG} = -\frac{1}{3}\vec{\beta}$

γ. $\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{\beta}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Πράξεις διανυσμάτων

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

α. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$, ώστε $2(\vec{x} - \vec{a}) - \frac{1}{2}(3\vec{x} - \vec{\beta}) = 2\vec{a}$

β. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$, ώστε
$$\begin{cases} \vec{x} - 2\vec{y} = \vec{a} \\ \vec{x} - \vec{y} = \vec{\beta} \end{cases}$$

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και σημείο Δ της $B\Gamma$, ώστε

$$\vec{B\Delta} = 3\vec{\Delta\Gamma}$$

α. Να δείξετε ότι:

i. $\vec{\Gamma B} = \vec{a} - \vec{\beta}$

ii. $\vec{\Delta B} = \frac{3}{4}\vec{\Gamma B}$

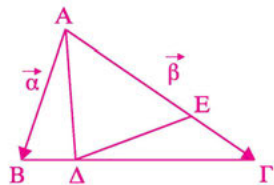
β. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{A\Delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

7. Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{A\Gamma} = \vec{\beta}, \vec{AE} = 2\vec{E\Gamma} \text{ και } 2\vec{B\Delta} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{0}$$

α. Να δείξετε ότι:

$$\vec{A\Gamma} = \frac{2}{3}\vec{\beta} \text{ και } \vec{B\Delta} = \frac{\vec{\beta} - \vec{a}}{3}$$



β. Να γράψετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ τα διανύσματα:

$$\vec{A\Delta} \text{ και } \vec{\Delta E}$$

8. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$

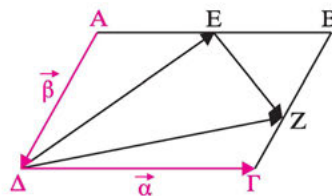
στο διπλανό σχήμα και είναι $\vec{\Delta\Gamma} = \vec{a}$,

$\vec{A\Delta} = \vec{\beta}$. Αν E είναι το μέσον του AB

και ισχύει $\vec{BZ} = \frac{2}{3}\vec{B\Gamma}$, να εκφράσετε

συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ τα

διανύσματα $\vec{\Delta E}, \vec{\Delta Z}, \vec{EZ}$.



9. Έστω τα σημεία A, B, Γ, Δ . Να δείξετε ότι:

$$5\vec{AB} - 3\vec{A\Gamma} + 2\vec{\Delta A} = 3\vec{\Gamma\Delta} - 5\vec{B\Delta}$$

10. Αν ισχύει $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MG} = \vec{NA} + 2\vec{NB} + 3\vec{NG}$, να δείξετε ότι τα σημεία M, N ταυτίζονται.

11. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ. Αν ισχύει

$$5\vec{BG} + 2\vec{BA} = 6\vec{AD} + \vec{GA} + \vec{GD}$$

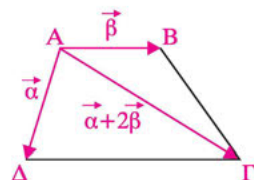
να δείξετε ότι το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

12. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να δείξετε ότι, για οποιοδήποτε σημείο M το διάνυσμα $\vec{v} = 7\vec{MA} - 5\vec{MB} - 2\vec{MG}$ είναι σταθερό.

B1. Παράλληλα διανύσματα

13. Αν $\vec{OA} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$, $\vec{OB} = 3\vec{a} - \vec{\beta}$, $\vec{OG} = \vec{a} - 4\vec{\beta}$ και $\vec{OD} = -3\vec{a} + 2\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $\vec{AB} \updownarrow \vec{GD}$.

14. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ στο διπλανό σχήμα είναι τραπέζιο.



15. Αν ισχύει $2\vec{BG} + 5\vec{DB} = 2\vec{BA} + \vec{GA}$, να δείξετε ότι: $\vec{AG} \upuparrows \vec{BD}$.

16. Αν ισχύουν ότι $\vec{AB} = 5\vec{AE} + 2\vec{AD}$ και $\vec{AG} = 2\vec{AE} + 5\vec{AD}$, να δείξετε ότι: $\vec{BG} \updownarrow \vec{DE}$

17. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Αν $\vec{AD} = \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{AG}$ και $\vec{AE} = \lambda \vec{AB} + \kappa \vec{AG}$, να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$.

18. Έστω ότι το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι μοναδιαίο και $\vec{a} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$, $\vec{\beta} = 5\vec{v} - 2\vec{u}$.

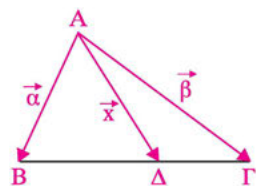
α. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ συναρτήσει των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{v}$

ii. το διάνυσμα $\vec{\delta} = -5\vec{a} + 2\vec{\beta}$ είναι ομόρροπο του $\vec{u}$ και να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\delta}$.

19. Στο διπλανό σχήμα είναι $2(B\Delta) = 3(\Gamma\Delta)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



20. Αν τα διανύσματα θέσεως των σημείων A, B, Γ, Δ είναι αντίστοιχα,

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\alpha} + 2\vec{\beta},$$

να δείξετε ότι:

α. $\vec{\Gamma\Delta} = -3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

β. $\vec{AB} \uparrow \uparrow \vec{\Gamma\Delta}$

B2. Συνευθειακά σημεία

21. Αν για τα σημεία M, A, B, Γ ισχύει: $3\vec{MA} + 4\vec{MB} - 7\vec{M\Gamma} = \vec{0}$,

α. να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά,

β. να βρείτε τη σχετική θέση των A, B, Γ .

22. Δίνονται τα σημεία O, A, B και Γ , για τα οποία ισχύει

$$13\vec{OA} = 5\vec{OB} + 8\vec{O\Gamma}$$

α. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

β. Να βρείτε τη σχετική θέση των A, B και Γ .

γ. Αν $|\vec{B\Gamma}| = 13$, να βρείτε τα μέτρα: $|\vec{AB}|$ και $|\vec{A\Gamma}|$.

23. Αν ισχύει $3\vec{OM} + 2\vec{OK} = 5\vec{OL}$, να αποδείξετε ότι:

α. τα σημεία K, L και M είναι συνευθειακά

β. $2\vec{AL} - \vec{AK} + 2\vec{MB} - \vec{AM} = \vec{BK} - 3\vec{BL}$

24. Αν για τα σημεία O, A, B και Γ ισχύει

$$\vec{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{OB} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} \text{ και } \vec{O\Gamma} = 4\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

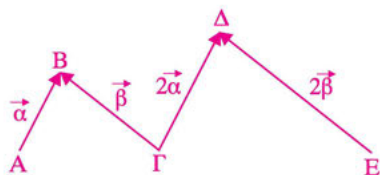
25. Αν ισχύει $(\kappa + 2)\vec{MA} + 3\vec{MB} = (\kappa + 5)\vec{MG}$, να αποδείξετε ότι:

α. τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά,

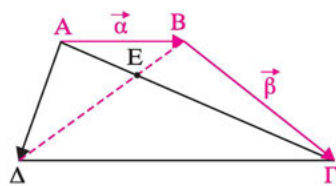
β. να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε το Γ να είναι μεταξύ των A και B.

26. Αν ισχύει: $2\vec{AL} + 3\vec{BL} + 2\vec{MB} = \vec{AK} + \vec{AM} + \vec{BK}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ, M είναι συνευθειακά.

27. Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι τα σημεία A, Γ, E είναι συνευθειακά.



28. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ABΓΔ είναι τραπέζιο. Αν $(\Gamma\Delta) = 3(AB)$, $E\Gamma = 3EA$, $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$,

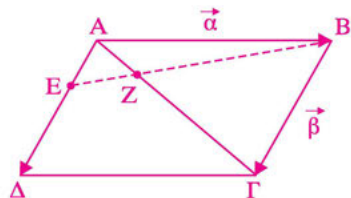


α. να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα

$$\vec{A\Gamma}, \vec{AE}, \vec{BE}, \vec{B\Delta}$$

β. να δείξετε ότι τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.

29. Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία E, Z, ώστε $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{A\Delta}$ και $\vec{AZ} = \frac{1}{4}\vec{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, Z και B είναι συνευθειακά.



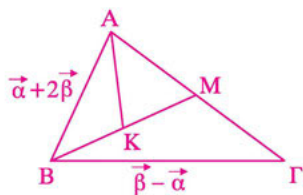
30. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία K, Λ, M για τα οποία ισχύουν:

$$7\vec{AK} = 3\vec{AB}, \quad \vec{A\Gamma} = 3\vec{A\Lambda} \quad \text{και} \quad \vec{BM} + 2\vec{B\Gamma} = \vec{0}$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ, M είναι συνευθειακά.

Γ. Διανυσματική ακτίνα μέσου

31. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία M, K είναι τα μέσα των $A\Gamma, BM$ αντίστοιχα. Αν $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{a}$, να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{a}, \vec{\beta}$ τα διανύσματα: $\vec{BM}$ και $\vec{AK}$.



32. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$. Αν η AM είναι διάμεσος και για το σημείο A ισχύει $2\vec{A\Delta} = \vec{AM}$, να δείξετε ότι $\vec{B\Delta} = \frac{-3\vec{a} + \vec{\beta}}{4}$.

33. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και το σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\vec{B\Delta} = 2\vec{\Delta\Gamma}$. Αν M το μέσο του $A\Delta$, να δείξετε ότι $\vec{BM} = \frac{-5\vec{a} + 2\vec{\beta}}{6}$.

34. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και K, Λ τα μέσα των πλευρών του $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν το σημείο O είναι μέσον του $K\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta} = 4\vec{MO}$$

35. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα K, Λ των $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} = 2\vec{K\Lambda}$.

36. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $5\vec{A\Delta} - 3\vec{A\Gamma} = \vec{0}$, $\vec{AE} = 3\vec{EM}$ και η διάμεσος AM . Να αποδείξετε ότι:

α. $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AM}$

β. τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.

37. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το μέσον Z της διαμέσου του AM . Αν ισχύουν:

$$\vec{AB} = \vec{\beta} - \vec{a}, \vec{A\Gamma} = \vec{a}, \vec{A\Delta} = 3\vec{\Delta B} \text{ και } \vec{AE} = \frac{3}{5}\vec{E\Gamma}$$

α. να γράψετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}, \vec{\beta}$ τα $\vec{AM}, \vec{\Delta Z}, \vec{\Delta E}$

β. να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Z, E είναι συνευθειακά.

38. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα σημείο M εξωτερικό του AB , έτσι, ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ τα διανύσματα θέσεως των σημείων A, B αντίστοιχα, να βρείτε το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ του σημείου M .

Δ. Εύρεση αριθμού από διανυσματική ισότητα

39. Αν τα σημεία B, Γ δεν συμπίπτουν και ισχύει $\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + x\vec{\Gamma A}$, να βρείτε την τιμή του x , ώστε το A να είναι μέσο του $B\Gamma$.
40. Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Να βρείτε την τιμή του λ , αν τα διανύσματα $\vec{v} = 2\vec{a} + (\lambda + 1)\vec{\beta}$ και $\vec{u} = \lambda\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.
41. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\vec{BM} = 2\vec{M\Gamma}$,
- α. να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + 2\vec{A\Gamma}}{3}$
- β. να βρείτε τα κ, λ , ώστε $\kappa\vec{AB} + \lambda\vec{A\Gamma} = 3\vec{AM} + \vec{B\Gamma}$.
42. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{AB}$. Να βρείτε τα κ, λ , ώστε να ισχύει:
- $$\kappa\vec{A\Gamma} + \lambda\vec{B\Delta} = 5\vec{AB} + \vec{A\Delta}$$
43. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, τέτοιο, ώστε $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{a}$. Έστω M το σημείο τομής των διαγωνίων του.
- α. Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{A\Delta}, \vec{B\Delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}, \vec{\beta}$.
- β. Αν $\vec{AM} = \lambda\vec{A\Gamma}$ και $\vec{BM} = \mu\vec{B\Delta}$, να βρείτε τα λ, μ .
44. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E , τέτοια, ώστε το Δ το μέσον του AB και $\vec{AE} = \frac{\vec{A\Gamma}}{3}$.
- α. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Gamma\Delta}, \vec{BE}, \vec{\Delta E}$, συναρτήσει των $\vec{A\Delta} = \vec{a}$ και $\vec{AE} = \vec{\beta}$.
- β. Έστω P το σημείο τομής των BE και $\Gamma\Delta$. Αν $\vec{\Delta P} = \lambda\vec{\Delta\Gamma}$ και $\vec{EP} = \mu\vec{EB}$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ και το λόγο $\frac{|\vec{\Delta P}|}{|\vec{P\Gamma}|}$.

Ε. Γεωμετρικοί τόποι

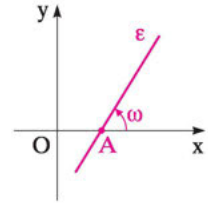
45. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta}|$.
46. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $|\vec{MB} - \vec{\Delta\Gamma} - \vec{\Gamma B} + \vec{\Delta A}| = 3$.
47. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $|\vec{MA} + \vec{M\Gamma} + 2\vec{M\Delta}| = |\vec{MA} + \vec{M\Gamma} - 2\vec{M\Delta}|$.

6

Εξίσωση ευθείας

Γωνία που σχηματίζει μία ευθεία με τον άξονα $x'x$

- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μία ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A . Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$, όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε , τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον $x'x$** .



- Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι η ε σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία

$$\omega = 0$$

Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω , ισχύει:

$$0^\circ \leq \omega < 180^\circ \quad \text{ή} \quad 0 \leq \omega < \pi$$



Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

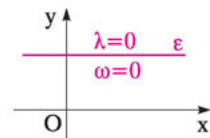
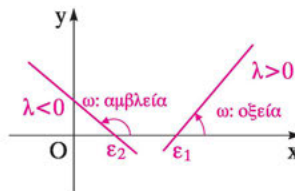
Ορισμός

Αν μία ευθεία ε δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, τότε ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή **κλίση** μίας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$ και τον συμβολίζουμε με λ_ε ή λ . Δηλαδή

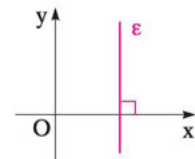
$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon \varphi \omega$$

Είναι:

- ▶ • $\lambda_{\varepsilon_1} > 0 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \omega > 0 \Leftrightarrow \omega$: οξεία
- $\lambda_{\varepsilon_2} < 0 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \omega < 0 \Leftrightarrow \omega$: αμβλεία
- $\lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$



- ▶ Αν $\omega = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $\varepsilon \parallel y'y$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία ε .



Είναι:

ω	30° ή $\frac{\pi}{6}$	45° ή $\frac{\pi}{4}$	60° ή $\frac{\pi}{3}$	120° ή $\frac{2\pi}{3}$	135° ή $\frac{3\pi}{4}$	150° ή $\frac{5\pi}{6}$
$\varepsilon\varphi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

παράδειγμα:

- Αν η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{5\pi}{6}$, τότε

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

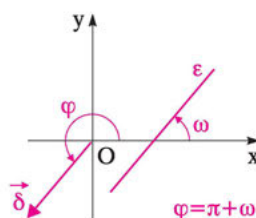
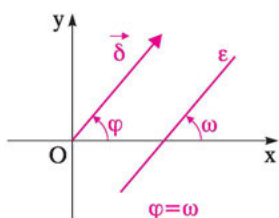
- Αν ο συντελεστής διεύθυνσης μίας ευθείας ε είναι -1 , τότε για τη γωνία ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \lambda_\varepsilon = -1 \text{ και επειδή } 0^\circ \leq \omega < 180^\circ, \text{ είναι } \omega = 135^\circ.$$

Όταν γνωρίζουμε ένα σημείο μίας ευθείας και το συντελεστή διεύθυνσής της, τότε μπορούμε να τη σχεδιάσουμε.

Διάνυσμα παράλληλο σε ευθεία

Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία ε . Αν φ και ω είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το $\vec{\delta}$ και η ε με τον $x'x$ αντιστοίχως, τότε θα ισχύει $\varphi = \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$, οπότε $\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\omega$ ή $\lambda_{\vec{\delta}} = \lambda_\varepsilon$



Άρα:

«Όταν μία ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης».

παράδειγμα:

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-2, 3)$, τότε $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{\delta}} = -\frac{3}{2}$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία

Αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες δύο σημείων μίας ευθείας ε που δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, τότε μπορούμε να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής.

Πρόταση

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μίας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Απόδειξη

Επειδή, $x_1 \neq x_2$ η ευθεία δεν είναι κατακόρυφη. Αφού ο φορέας του $\vec{AB}$ είναι η ευθεία AB , το $\vec{AB}$ είναι παράλληλο στην ευθεία AB . Άρα, $\lambda = \lambda_{\vec{AB}}$.

Είναι $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ και $\lambda_{\vec{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Άρα $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

παράδειγμα: Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

$$A(3, -1) \text{ και } B(1, 5), \text{ είναι } \lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-1)}{1 - 3} = \frac{6}{-2} = -3$$

Συνθήκες Καθετότητας και Παραλληλίας Ευθειών

Με τη βοήθεια του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας, μπορούμε να έχουμε συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών.

Πρόταση

Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντιστοίχως, τότε:

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Απόδειξη

Έστω $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$. Τότε $\lambda_{\vec{\delta}_1} = \lambda_1$ και $\lambda_{\vec{\delta}_2} = \lambda_2$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε έχουμε:} \quad & \bullet \quad \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 // \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\delta}_1} = \lambda_{\vec{\delta}_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ & \bullet \quad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\delta}_1} \cdot \lambda_{\vec{\delta}_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

παράδειγμα: Αν η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 2$, τότε η κάθετη σε αυτή ε_2 θα έχει συντελεστή διεύθυνσης, (αφού $\varepsilon_1 \nparallel x'x$) και θα είναι

$$\lambda_{\varepsilon_2} \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon_1}} = -\frac{1}{2}$$

Εξίσωση Ευθείας

Μία ευθεία ορίζεται, όταν δίνονται:

- ένα σημείο της και ο συντελεστής διεύθυνσής της ή
- δύο σημεία της.

Εξίσωση ευθείας που ορίζεται από ένα σημείο της και το συντελεστή διεύθυνσής της.

Πρόταση

Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

Απόδειξη

- Έστω ότι το $M(x, y)$ είναι διαφορετικό του A .

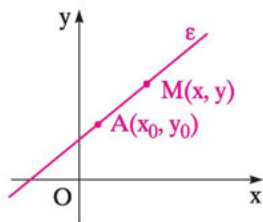
Έχουμε:

$$M \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{AM} // \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{\vec{AM}} = \lambda_{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0) \quad (1).$$



- Επειδή η (1) επαληθεύεται και από τις συντεταγμένες του σημείου $A(x_0, y_0)$, αυτή είναι η εξίσωση της ευθείας ε .

παράδειγμα:

Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$, είναι:

$$y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - 3 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 7$$

Εξίσωση ευθείας που ορίζεται από δύο σημεία της

Πρόταση

Μία ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει εξίσωση:

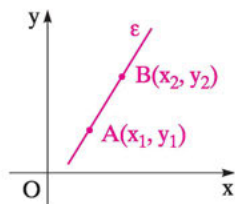
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{ή} \quad x = x_1$$

Απόδειξη

- Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $\lambda_\varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Επειδή, η ε διέρχεται από το $A(x_1, y_1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \lambda_\varepsilon$, η εξίσωσή της είναι:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$



- Αν $x_1 = x_2$, τότε η ε είναι κατακόρυφη. Οπότε κάθε σημείο της έχει τετμημένη x_1 . Άρα, η εξίσωση της ε είναι $x = x_1$.
Ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x = 0$.

παράδειγμα: Η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία:

- $A(1, 3)$ και $B(0, 5)$ έχει εξίσωση: $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$, (αφού $x_A \neq x_B$).

$$\text{Δηλαδή} \quad y - 3 = \frac{5 - 3}{0 - 1}(x - 1) \Leftrightarrow y - 3 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 5.$$

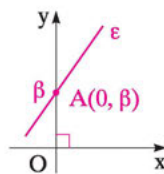
- $\Gamma(2, 3)$ και $\Delta(2, 5)$ έχει εξίσωση $x = 2$, (αφού $x_\Gamma = x_\Delta$).

Ειδικές περιπτώσεις ευθείας

- Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι:

$$y - \beta = \lambda(x - 0) \quad \text{ή} \quad y = \lambda x + \beta$$

Οπότε η εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ παριστάνει ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, \beta)$.



- Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι: $y - 0 = \lambda(x - 0)$. Δηλαδή,

$$y = \lambda x$$

- Επειδή η ευθεία:

- ε_1 της διχοτόμου της γωνίας $\hat{xOy}$ έχει

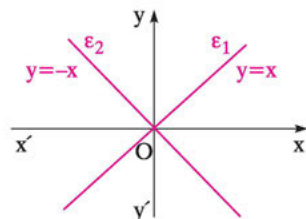
$$\lambda_{\varepsilon_1} = \tan 45^\circ = 1, \text{ θα έχει εξίσωση}$$

$$y = x$$

- ε_2 της διχοτόμου της γωνίας $\hat{x'Oy}$ έχει

$$\lambda_{\varepsilon_2} = \tan 135^\circ = -1, \text{ θα έχει εξίσωση}$$

$$y = -x$$

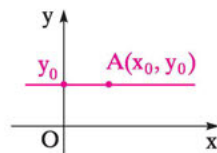


- Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση

$$y - y_0 = 0 \cdot (x - x_0)$$

Δηλαδή, $y = y_0$.

Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $y = 0$.



παραδείγματα: Η εξίσωση της ευθείας η οποία:

- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -3)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$, είναι $y = 2x - 3$
- διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -5$ είναι $y = -5x$
- είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ είναι

$$y = -4$$

Συνοπτική θεωρία

► Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, τότε:

- $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$
- $\lambda_\varepsilon = \tan \omega$
- $\varepsilon // x'x \Rightarrow \lambda_\varepsilon = 0$
- $\varepsilon // \bar{\delta} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\bar{\delta}}, (\varepsilon \nparallel y'y)$

► Αν η ευθεία ε διέρχεται από τα $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, ($x_1 \neq x_2$), τότε:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

► • $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$ • $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \nparallel y'y)$

► Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται:

- από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

- από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$, είναι

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- από το σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι

$$y = \lambda x + \beta$$

- από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι

$$y = \lambda x$$

- από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη:

- στον άξονα $y'y$ είναι $x = x_0$
- στον άξονα $x'x$ είναι $y = y_0$

► Η εξίσωση της ευθείας της διχοτόμου

- της γωνίας $\hat{xOy}$ είναι $y = x$
- της γωνίας $\hat{x'Oy}$ είναι $y = -x$

► Η εξίσωση του άξονα:

- $x'x$ είναι $y = 0$
- $y'y$ είναι $x = 0$

Παρατηρήσεις

- Ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ ή η ε διέρχεται από το σημείο A , αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε . Δηλαδή

$$y_0 = \lambda x_0 + \beta, \text{ οπότε } A(x_0, \lambda x_0 + \beta)$$

- Αν η ευθεία ε διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο, τότε έχουμε τους περιορισμούς ότι η ε δεν είναι παράλληλη στους άξονες και δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Οπότε η εξίσωση της είναι:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \quad \text{με } \lambda \neq 0 \quad \text{και} \quad \lambda \neq \frac{y_0}{x_0}$$

- Μία ευθεία ε σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, όταν:

- δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και
- σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$ ή $\frac{3\pi}{4}$.

- Αν ισχύουν οι σχέσεις: $y_1 = ax_1 + \beta$ και $y_2 = ax_2 + \beta$, όπου $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $A \neq B$, τότε η εξίσωση της ευθείας AB είναι $y = ax + \beta$.

- Με το συμβολισμό $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, θα εννοούμε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1. Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μίας ευθείας ε η οποία:

- σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω είναι

$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega$$

- είναι παράλληλη σε ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι

$$\lambda = \lambda_{\vec{\delta}}$$

- διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, $(x_1 \neq x_2)$ είναι

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- είναι παράλληλη στην ευθεία ζ είναι

$$\lambda = \lambda_{\zeta}$$

- είναι κάθετη στην ευθεία ζ είναι

$$\lambda = -\frac{1}{\lambda_{\zeta}} \quad [\text{αφού } \lambda \cdot \lambda_{\zeta} = -1]$$

1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας η οποία:

α. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{3}$

β. είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (2, -4)$

γ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(3, 6)$.

Λύση

α. Επειδή η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{3}$, έχουμε

$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

β. Αφού η ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (2, -4)$, έχουμε

$$\lambda = \lambda_{\vec{a}} = \frac{-4}{2} = -2$$

γ. Επειδή η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(3, 6)$, έχουμε

$$\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 3}{3 - 1} = \frac{3}{2}$$

2. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία:

α. $A(1, 0)$ και $B(2, \sqrt{3})$

β. $A(2, 3)$ και $B(1, 3)$

Λύση

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

α. Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\sqrt{3} - 0}{2 - 1} = \sqrt{3}$$

Είναι $\varepsilon\varphi\omega = \lambda \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$, αφού $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$.

β. Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 3}{1 - 2} = -\frac{0}{1} = 0$$

Είναι $\varepsilon\varphi\omega = \lambda \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 0^\circ$, αφού $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$.

A2. Συνθήκες καθετότητας και παραλληλίας ευθειών

3. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας ε , η οποία:

α. είναι παράλληλη στην ευθεία ε_1 που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 120^\circ$

β. είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(3, 5)$.

Λύση

α. Επειδή η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία ε_1 έχουμε

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon_1} = \varepsilon\varphi 120^\circ = -\sqrt{3}$$

β. Αφού η ευθεία ε είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 έχουμε

$$\lambda \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 2} = 2.$$

Οπότε η σχέση (1) γίνεται $\lambda \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$.

4. Έστω η ευθεία ε που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$ και η ευθεία ζ που διέρχεται από τα σημεία $A(3, \alpha)$ και $B(5, 3\alpha - 2)$.

Να βρείτε την τιμή του α , ώστε:

- α. Οι ευθείες ε και ζ να είναι παράλληλες
 β. Οι ευθείες ε και ζ να είναι κάθετες

Λύση

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$$

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ζ είναι:

$$\lambda_\zeta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3\alpha - 2 - \alpha}{5 - 3} = \frac{2\alpha - 2}{2} = \frac{2(\alpha - 1)}{2} = \alpha - 1$$

- α. Για να είναι οι ευθείες ε και ζ παράλληλες, πρέπει:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow 1 = \alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

- β. Για να είναι οι ευθείες ε και ζ κάθετες, πρέπει:

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow 1 \cdot (\alpha - 1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

B1. Εξίσωση ευθείας με γνωστό ένα σημείο της και το συντελεστή διεύθυνσης

Αν σε μία ευθεία ε γνωρίζουμε ένα σημείο της $A(x_0, y_0)$ και το συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε η ευθεία ε έχει εξίσωση

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

5. Θεωρούμε την ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$. Να βρείτε:

- α. Την εξίσωση της ευθείας ε .
 β. Την τιμή του λ , για την οποία το σημείο $M(\lambda - 1, 2\lambda)$ ανήκει στην ευθεία ε .

Λύση

- α.** Η ευθεία ε που διέρχεται από το $A(1, 2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$ έχει εξίσωση

$$y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 3 + 2 \Leftrightarrow y = 3x - 1$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι $y = 3x - 1$.

- β.** Το σημείο $M(\lambda - 1, 2\lambda)$ ανήκει στην ευθεία ε , όταν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή

$$2\lambda = 3(\lambda - 1) - 1 \Leftrightarrow 2\lambda = 3\lambda - 3 - 1 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

Άρα $\lambda = 4$.

- 6.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$ και:

α. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$

β. είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (2, -4)$

γ. είναι κάθετη στην ευθεία ζ με συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{2}$.

Λύση

Η ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει εξίσωση

$$y - y_A = \lambda(x - x_A)$$

- α.** Επειδή η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$, είναι $\lambda = \tan 45^\circ = 1$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας ε είναι

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = x - 3 + 2 \Leftrightarrow y = x - 1$$

- β.** Αφού η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (2, -4)$, είναι

$$\lambda = \lambda_{\vec{a}} = \frac{-4}{2} = -2$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι

$$y - 2 = -2(x - 3) \Leftrightarrow y = -2x + 6 + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -2x + 8$$

- γ.** Επειδή η ευθεία ε είναι κάθετη στην ευθεία ζ , έχουμε

$$\lambda \cdot \lambda_{\zeta} = -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας ε είναι

$$y - 2 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y = 2x - 6 + 2 \Leftrightarrow y = 2x - 4$$

7. Έστω μία ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $M(a, 2a+1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

β. Αν επιπλέον, η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $N(1, -2)$, να βρείτε:

i. την τιμή του a

ii. τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε

iii. το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία ε και τους άξονες.

Λύση

α. Η εξίσωση της ευθείας ε είναι:

$$\begin{aligned} y - y_M &= \lambda(x - x_M) \Leftrightarrow y - (2a+1) = 1 \cdot (x - a) \\ &\Leftrightarrow y - 2a - 1 = x - a \\ &\Leftrightarrow y = x + a + 1 \end{aligned}$$

β. i. Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $N(1, -2)$, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή

$$-2 = 1 + a + 1 \Leftrightarrow a = -4$$

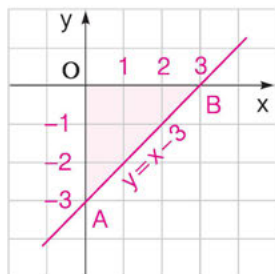
Άρα $a = -4$.

ii. Για $a = -4$ η εξίσωση της ευθείας ε είναι

$$y = x - 4 + 1 \Leftrightarrow y = x - 3$$

- Για $x = 0$, είναι $y = -3$, οπότε η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -3)$.
- Για $y = 0$, είναι $0 = x - 3 \Leftrightarrow x = 3$, οπότε η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(3, 0)$.

Η ευθεία ε φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



iii. Το ζητούμενο εμβαδόν E είναι

$$E = \frac{1}{2}(\text{OA}) \cdot (\text{OB}) = \frac{1}{2} \cdot |3| \cdot |-3| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, -3)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(2, 3)$. Να βρείτε την εξίσωση:

- της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία $B\Gamma$
- του ύψους AD
- της διαμέσου BM .

Λύση

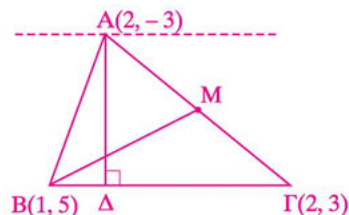
Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$ είναι $\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_{\Gamma} - y_B}{x_{\Gamma} - x_B} = \frac{3-5}{2-1} = -2$.

α. Επειδή η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία $B\Gamma$ έχουμε

$$\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{B\Gamma} = -2$$

Η εξίσωση της ευθείας ε είναι

$$\begin{aligned} y - y_A &= \lambda_{\varepsilon}(x - x_A) \Leftrightarrow y + 3 = -2(x - 2) \\ &\Leftrightarrow y = -2x + 4 - 3 \\ &\Leftrightarrow y = -2x + 1 \end{aligned}$$



β. Επειδή $AD \perp B\Gamma$ έχουμε

$$\lambda_{AD} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AD} \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AD} = \frac{1}{2}$$

Η εξίσωση του ύψους AD είναι

$$y - y_A = \lambda_{AD}(x - x_A) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 4$$

γ. • Το σημείο M έχει συντεταγμένες:

$$x_M = \frac{x_A + x_{\Gamma}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \quad \text{και} \quad y_M = \frac{y_A + y_{\Gamma}}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0$$

Άρα $M(2, 0)$.

• Η διάμεσος BM έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{0-5}{2-1} = -5$$

και διέρχεται από το σημείο B .

Οπότε η εξίσωση της διαμέσου BM είναι

$$y - y_B = \lambda_{BM}(x - x_B) \Leftrightarrow y - 5 = -5(x - 1) \Leftrightarrow y = -5x + 10$$

9. Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(3, -6)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετου ε του τμήματος AB .

Λύση

1^{ος} τρόπος

Η μεσοκάθετος ε του τμήματος AB διέρχεται από το μέσον P του AB και είναι κάθετη σε αυτό.

$$\text{Είναι } x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{και} \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4-6}{2} = -1. \quad \text{Άρα } P(2, -1).$$

$$\text{Έχουμε } \lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-6-4}{3-1} = -5.$$

$$\text{Είναι } \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot (-5) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{1}{5}.$$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας ε είναι

$$y - y_P = \lambda_\varepsilon \cdot (x - x_P) \Leftrightarrow y + 1 = \frac{1}{5}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$$

2^{ος} τρόπος

Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος AB , αν και μόνο αν, ισαπέχει από τα άκρα του A και B .

$$\begin{aligned} \text{Δηλαδή } (MA) &= (MB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 12y + 36 \\ &\Leftrightarrow 20y = 4x - 28 \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5} \end{aligned}$$

B2. Εξίσωση ευθείας που είναι γνωστά δύο σημεία της

10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

α. $A(3, 2)$ και $B(-1, 6)$

β. $\Gamma(5, -3)$ και $\Delta(5, -4)$

Λύση

α. Επειδή $x_A \neq x_B$, η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, 6)$ είναι:

$$\begin{aligned} y - y_A &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{6-2}{-1-3} (x-3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y - 2 = \frac{4}{-4} (x-3) \Leftrightarrow y - 2 = -(x-3) \\ &\Leftrightarrow y = -x + 3 + 2 \Leftrightarrow y = -x + 5 \end{aligned}$$

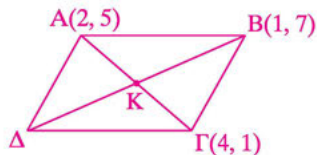
β. Επειδή $x_\Gamma = x_\Delta = 5$, η εξίσωση της ευθείας $\Gamma\Delta$ είναι $x = 5$.

11. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(2, 5)$, $B(1, 7)$ και $\Gamma(4, 1)$.

Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$.

Λύση

Αν K το κέντρο του παραλληλογράμμου, το K είναι το μέσο του $A\Gamma$ και έχουμε:



$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{και} \quad y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

Άρα $K(3, 3)$.

Η εξίσωση της ευθείας BK είναι

$$\begin{aligned} y - y_B &= \frac{y_K - y_B}{x_K - x_B} (x - x_B) \Leftrightarrow y - 7 = \frac{3-7}{3-1} (x-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y - 7 = \frac{-4}{2} (x-1) \Leftrightarrow y - 7 = -2(x-1) \\ &\Leftrightarrow y = -2x + 2 + 7 \Leftrightarrow y = -2x + 9 \end{aligned}$$

Άρα η διαγώνιος $B\Delta$ έχει εξίσωση $y = -2x + 9$.

B3. Ειδικές περιπτώσεις εξίσωσης ευθείας

12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , όταν:

- η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -3)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$
- η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{2}{3}$
- η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 4)$ και $B(\lambda^2, 4)$.

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι μία ευθεία που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$.

Άρα, η εξίσωση της ευθείας ε είναι: $y = 2x - 3$.

β. Γνωρίζουμε ότι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , έχει εξίσωση: $y = \lambda x$.

Άρα, η εξίσωση της ευθείας ε είναι: $y = -\frac{2}{3}x$.

γ. Επειδή $y_A = y_B = 4$ και $x_A \neq x_B$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, (αφού $\lambda^2 \neq -1$), έχουμε ότι η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, άρα έχει εξίσωση: $y = 4$.

Γ. Συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y = ax + \beta$

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας που έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$ είναι $\lambda = a$.

13. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y = \frac{x}{2} - 1$ και $\zeta: y = (|\mu| - 2)x - 5$.

Να βρείτε τις τιμές του μ , ώστε η ευθεία ε να είναι:

α. παράλληλη στην ευθεία ζ

β. κάθετη στην ευθεία ζ

Λύση

Είναι $\varepsilon: y = \frac{x}{2} - 1$ ή $y = \frac{1}{2}x - 1$, άρα $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ζ είναι $\lambda_\zeta = |\mu| - 2$.

α. Για να είναι η ευθεία ε παράλληλη στην ευθεία ζ πρέπει και αρκεί:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow \frac{1}{2} = |\mu| - 2 \Leftrightarrow |\mu| = \frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow |\mu| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \mu = \pm \frac{5}{2}$$

$$\text{Άρα } \mu = \frac{5}{2} \text{ ή } \mu = -\frac{5}{2}.$$

β. Για να είναι η ευθεία ε κάθετη στην ευθεία ζ πρέπει και αρκεί:

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (|\mu| - 2) = -1 \Leftrightarrow |\mu| - 2 = -2 \Leftrightarrow |\mu| = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$$

$$\text{Άρα } \mu = 0.$$

14. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το $A(-1, 2)$ και :

α. είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1: y = 3x + 1$

β. είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2: y = -2x + 3$

Λύση

α. Είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = 3$.

Επειδή $\zeta \parallel \varepsilon_1$, έχουμε: $\lambda_\zeta = \lambda_{\varepsilon_1} = 3$, οπότε η εξίσωση της ευθείας ζ είναι

$$y - 2 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 5$$

β. Είναι $\lambda_{\varepsilon_2} = -2$.

Επειδή $\zeta \perp \varepsilon_2$ έχουμε: $\lambda_\zeta \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = \frac{1}{2}$.

$$\text{Άρα } \zeta: y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Δ1. Σημείο τομής ευθειών

Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$ τέμνονται, τότε το σημείο τομής τους έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος με εξισώσεις, τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Δηλαδή, τη λύση του συστήματος
$$\begin{cases} y = \lambda_1 x + \beta_1 \\ y = \lambda_2 x + \beta_2 \end{cases}$$

15. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x - 1$ και $\varepsilon_2: y = x + 1$.

α. Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών ε_1 και ε_2 .

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$.

γ. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\zeta: y = 5x - 7$ συντρέχουν.

Λύση

α. Το σημείο τομής M των ευθειών ε_1 και ε_2 έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x = 1 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

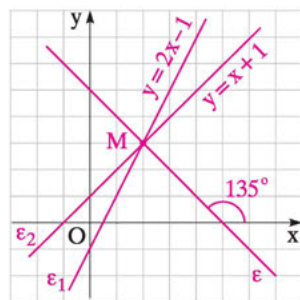
Άρα $M(2, 3)$.

β. Είναι $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 135^\circ = -1$, οπότε η εξίσωση της ευθείας ε είναι

$$y - y_M = \lambda_\varepsilon \cdot (x - x_M) \Leftrightarrow y - 3 = -1(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 2 + 3$$

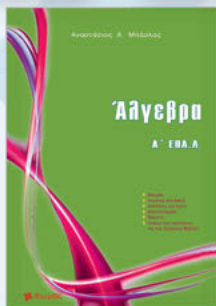
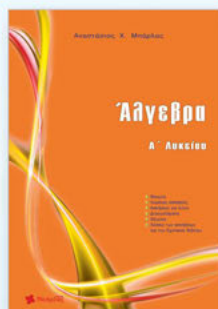
$$\Leftrightarrow y = -x + 5$$



γ. Αρκεί να δείξουμε ότι η ευθεία ζ διέρχεται από το σημείο τομής $M(2, 3)$ των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Είναι $3 = 5 \cdot 2 - 7 \Leftrightarrow 3 = 10 - 7$, που ισχύει.

Άρα οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ζ συντρέχουν.



Κυκλοφορούν

- | | |
|-----------------------------------|--|
| ■ Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου | ■ Γεωμετρία Α' Λυκείου |
| ■ Άλγεβρα Α' Λυκείου | ■ Γεωμετρία Β' Λυκείου |
| ■ Άλγεβρα Β' Λυκείου | ■ Μαθηματικά Β' Λυκείου Θετικών Σπουδών |
| ■ Μαθηματικά Β' Λυκείου | ■ Μαθηματικά Γ' Λυκείου Γενικής Παιδείας |
| ■ Μαθηματικά Γ' Λυκείου | ■ Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α' & Β' |
| ■ Μαθηματικά Γ' Λυκείου | ■ Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα |
| ■ Μαθηματικά Α', Β', Γ' ΕΠΑ.Α. | |

ISBN: 978-618-82023-6-8



Λ.Τ. 20,70 €