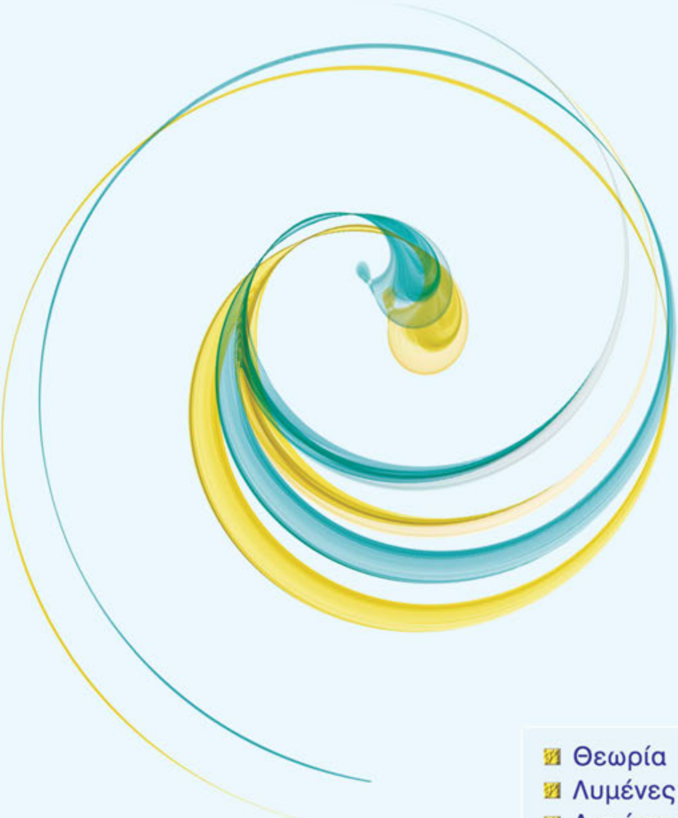
Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Μαθηματικά

Β΄ Γυμνασίου

όλων των επιπέδων



- Θεωρία
- Λυμένες ασκήσεις
- Ασκήσεις για λύση
- Διαγωνίσματα
- Θέματα
- Λύσεις των ασκήσεων και του Σχολικού Βιβλίου

ΕΚΔΟΣΗ Μπάρλας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β' ΜΕΡΟΣ • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6$^{\text{ο}}$ ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7$^{\text{ο}}$ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8$^{\text{ο}}$ ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9$^{\text{ο}}$ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

1 Ρητοί αριθμοί

Ρητοί αριθμοί

Θετικοί – Αρνητικοί αριθμοί

- **Πρόσημα** λέγονται τα σύμβολα « + » και « – » και τα γράφουμε πριν από τους αριθμούς εκτός από το μηδέν.
- **Θετικοί** λέγονται οι αριθμοί που έχουν πρόσημο « + » π.χ. $+5$
- **Αρνητικοί** λέγονται οι αριθμοί που έχουν πρόσημο « – » π.χ. -3
- Το **μηδέν** δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

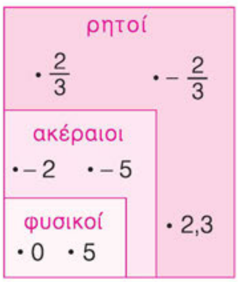
Ομόσημοι – Ετερόσημοι αριθμοί

- **Ομόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο π.χ. $-3\,,\ -2$
- **Ετερόσημοι** λέγονται δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο π.χ. $-5\,,\ +3$
  Δηλαδή ο ένας είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός.

Φυσικοί – Ακέραιοι – Ρητοί αριθμοί

- **Φυσικοί** αριθμοί είναι οι: $0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \dots$
- **Ακέραιοι** αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς.
  Δηλαδή οι: $\dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots$
- **Ρητοί** αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς.

παράδειγμα: Οι αριθμοί: $5\,,\ -3\,,\ \frac{2}{7}\,,\ -5\,,\ 7$ είναι ρητοί.

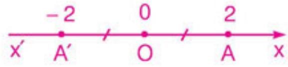


- Οι φυσικοί αριθμοί περιέχονται στους ακέραιους και οι ακέραιοι στους ρητούς.

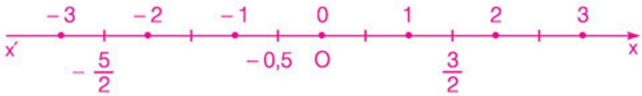
Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία μιας ευθείας

Έστω ο ημιάξονας Ox και ο αντικείμενός του Ox'.

- Αν ο θετικός αριθμός π.χ. 2 αντιστοιχίζεται στο σημείο Α, τότε ο αρνητικός αριθμός -2 αντιστοιχίζεται στο συμμετρικό σημείο A' του Α ως προς το Ο.
  Λέμε ότι το σημείο Α έχει τετμημένη 2 και το σημείο A', τετμημένη -2.



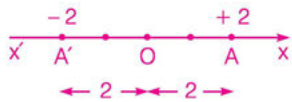
- Ο άξονας $x'Ox$ περιλαμβάνει όλους τους ρητούς αριθμούς (αρνητικούς, θετικούς και το μηδέν).



Απόλυτη τιμή ρητού

Η **απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού **α** εκφράζει την **απόσταση του σημείου με τετμημένη** α από την αρχή **O** του άξονα και συμβολίζεται με $|\alpha|$.

Από το διπλανό σχήμα έχουμε:
- $|+2| = (OA) = 2$
- $|-2| = (OA') = 2$



Αντίθετοι αριθμοί

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι **ετερόσημοι** και έχουν **ίδια απόλυτη τιμή.**

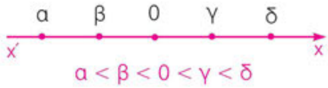
παράδειγμα:
- Οι αριθμοί $+2$ και -2 είναι αντίθετοι, διότι είναι ετερόσημοι και $|+2| = |-2|$.
- Ο αριθμός $+2$ είναι ο αντίθετος του -2 και γράφουμε $+2 = -(-2)$.
- Ο αριθμός -2 είναι ο αντίθετος του $+2$ και γράφουμε $-2 = -(+2)$.

Γενικά

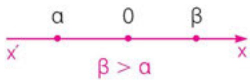
Ο αντίθετος του x είναι ο −x και ισχύει $|-x| = |x|$.

- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός π.χ. $|+5| = +5$.
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του π.χ. $|-3| = +3$.
- Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν, δηλαδή $|0| = 0$.

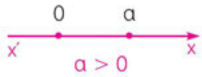
Σύγκριση ρητών



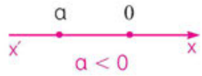
Μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλον στον άξονα.
Οπότε:



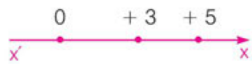
- Κάθε θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό.



- Ένας θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.



- Ένας αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.



- Μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
  Δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.

- Μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

παράδειγμα: Είναι $-5 < -2$, διότι $|-5| = 5 > 2 = |-2|$

Πρόσθεση Ρητών αριθμών

Πρόσθεση ομόσημων αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους **ομόσημους** ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

παραδείγματα:

- $(+5)+(+3) = +\big(|+5|+|+3|\big) = +(5+3) = +8$
- $(-2)+(-3) = -(|-2|+|-3|) = -(2+3) = -5$

Πρόσθεση ετερόσημων αριθμών

Για να προσθέσουμε **δύο ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

παραδείγματα:

- $(+7)+(-3) = +\big(|+7|-|-3|\big) = +(7-3) = +4$
- $(-5)+(+3) = -(|-5|-|+3|) = -(5-3) = -2$

Ιδιότητες της πρόσθεσης

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης είναι:

- $\boldsymbol{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$ Αντιμεταθετική
- $\boldsymbol{\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma}$ Προσεταιριστική
- $\boldsymbol{\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha}$
- $\boldsymbol{\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0}$

Παρατήρηση

Από την ισότητα $\boldsymbol{\alpha + (-\alpha) = 0}$, συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα των αντίθετων αριθμών α και $-\alpha$ είναι μηδέν. π.χ. $(+3) + (-3) = 0$.

Αφαίρεση ρητών αριθμών

Για να **αφαιρέσουμε** από τον αριθμό $\boldsymbol{\alpha}$ τον αριθμό $\boldsymbol{\beta}$, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β. Δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

παράδειγμα: $(+3) - (+5) = (+3) + (-5) = -2$

Πολλαπλασιασμός ρητών

- Για να **πολλαπλασιάσουμε δυο ομόσημους** ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο **« + »**

  Δηλαδή:
  - $\boldsymbol{+ \cdot + = +}$
  - $\boldsymbol{- \cdot - = +}$

παραδείγματα:
- $(+3)\cdot(+2) = +(|+3|\cdot|+2|) = +(3\cdot 2) = +6$
- $(-5)\cdot(-4) = +(5\cdot 4) = 20$

- Για να **πολλαπλασιάσουμε δυο ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο **« – »**

  Δηλαδή:
  - $\boldsymbol{+ \cdot - = -}$
  - $\boldsymbol{- \cdot + = -}$

παραδείγματα:
- $(+2)\cdot(-5) = -10$
- $(-7)\cdot(+3) = -21$

Πρόσημο γινομένου ρητών αριθμών

- Το γινόμενο δυο **ομόσημων** αριθμών είναι **θετικός** αριθμός.
- Το γινόμενο δυο **ετερόσημων** αριθμών είναι **αρνητικός** αριθμός.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

Οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού είναι:

- $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha}$ Αντιμεταθετική
- $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma}$ Προσεταιριστική
- $\boldsymbol{1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha}$
- $\boldsymbol{0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0}$
- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση

$$\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$$

- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση

$$\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma}$$

Αντίστροφοι αριθμοί

Οι ρητοί αριθμοί $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ λέγονται **αντίστροφοι**, όταν $\boldsymbol{\alpha\beta = 1}$.

- Ο αντίστροφος του α είναι ο $\dfrac{1}{\alpha}$.
- Ο αντίστροφος του $\dfrac{1}{\alpha}$ είναι ο α .
- Ο αντίστροφος του $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι ο $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Διαίρεση ρητών αριθμών

► Για να **διαιρέσουμε** δυο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

- το πρόσημο « + », αν είναι ομόσημοι.

  Δηλαδή:
  - **+ : + = +** και
  - **− : − = +**

παράδειγμα:
- $(+15):(+3) = +5$
- $(-21):(-7) = 3$

- το πρόσημο « – », αν είναι ετερόσημοι.

  Δηλαδή:
  - **+ : − = −** και
  - **− : + = −**

παράδειγμα:
- $(+42):(-6) = -7$
- $(-72):(+9) = -8$

► Είναι:
- $\boldsymbol{\alpha : \beta = \dfrac{\alpha}{\beta}}$
- $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \dfrac{1}{\beta}}$
- $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\beta} : \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\delta}{\gamma}}$

Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.

Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

Είναι:

- $\frac{1}{3} = \mathbf{0,333\ldots}$, όπου το ψηφίο 3 επαναλαμβάνεται ατελείωτα.

  Ο αριθμός 0,333… λέγεται **περιοδικός δεκαδικός** με **περίοδο** το **3** και γράφεται συμβολικά $\mathbf{0,\overline{3}}$.

- $-\frac{163}{99} = -1,646464\ldots = -1,\overline{64}$

- $\frac{91}{44} = 2,06818181\ldots = 2,06\overline{81}$

- Τους αριθμούς που βρήκαμε παραπάνω τους ονομάζουμε περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

- Το πλήθος των επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων κάθε περιοδικού αριθμού ονομάζεται **περίοδος**.

Κάθε **ρητός** αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή **δεκαδικού** ή **περιοδικού δεκαδικού** αριθμού.

Αντίστροφα

Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως ρητός με κλασματική μορφή.

Άρα:

> Το σύνολο των **ρητών** αποτελείται από τους **δεκαδικούς** και τους **περιοδικούς δεκαδικούς** αριθμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Οι αριθμοί – Απόλυτη τιμή

1. Δίνονται οι αριθμοί:

$$+5, \quad -\frac{2}{3}, \quad 1{,}37, \quad 0, \quad -7$$

Να βρείτε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι:

α. αρνητικοί **β. ομόσημοι**

γ. φυσικοί **δ. ακέραιοι** **ε. ρητοί**

Λύση

α. Αρνητικοί είναι οι αριθμοί: $-\dfrac{2}{3}$ και -7

β. Ομόσημοι είναι οι αριθμοί: • $+5\ ,\ 1{,}37$ • $-\dfrac{2}{3}\ ,\ -7$

γ. Φυσικοί είναι οι αριθμοί: $+5\ ,\ 0$

δ. Ακέραιοι είναι οι αριθμοί: $+5\ ,\ 0\ ,\ -7$

ε. Ρητοί είναι όλοι οι αριθμοί.

2. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $-\dfrac{5}{4}$ και $-\dfrac{6}{5}$ και στη συνέχεια να τους παραστήσετε με σημεία ενός άξονα.

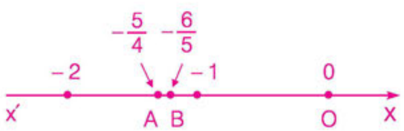
Λύση

Είναι: • $-\dfrac{5}{4}=-1{,}25$, οπότε $\left|-\dfrac{5}{4}\right|=|-1{,}25|=1{,}25$

• $-\dfrac{6}{5}=-1{,}2$, οπότε $\left|-\dfrac{6}{5}\right|=|-1{,}2|=1{,}2$

Επειδή οι αριθμοί $-\dfrac{5}{4}$ και $-\dfrac{6}{5}$ είναι αρνητικοί, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει μικρότερη απόλυτη τιμή. Άρα $-\dfrac{6}{5}>-\dfrac{5}{4}$.

Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Α , Β παριστάνουν τους αριθμούς $-\dfrac{5}{4}$, $-\dfrac{6}{5}$ αντίστοιχα.



Β. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, εξετάζουμε αν είναι ομόσημοι ή ετερόσημοι.

- Αν είναι **ομόσημοι, προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.
- Αν είναι **ετερόσημοι, αφαιρούμε** από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

3. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $(+7)+(+8)$ β. $(-5)+(-9)$

γ. $(+13)+(-6)$ δ. $(-11)+(+8)$

ε. $(-17)+(+17)$

Λύση

α. Επειδή οι αριθμοί $+7$ και $+8$ είναι ομόσημοι έχουμε:

$$(+7)+(+8) = +(|+7|+|+8|) = +(7+8) = +15$$

β. Αφού οι αριθμοί -5 και -9 είναι ομόσημοι έχουμε:

$$(-5)+(-9) = -(|-5|+|-9|) = -(5+9) = -14$$

γ. Επειδή οι αριθμοί είναι $+13$ και -6 είναι ετερόσημοι έχουμε:

$$(+13)+(-6) = +(|+13|-|-6|) = +(13-6) = +7$$

δ. Αφού οι αριθμοί -11 και $+8$ είναι ετερόσημοι έχουμε:

$$(-11)+(+8) = -(|-11|-|+8|) = -(11-8) = -3$$

ε. Επειδή οι αριθμοί -17 και $+17$ είναι αντίθετοι έχουμε:

$$(-17)+(+17) = 0$$

Άθροισμα πολλών προσθετέων

Για να υπολογίσουμε ένα άθροισμα με περισσότερους από δύο προσθετέους που δεν είναι ομόσημοι:

- Διαγράφουμε τους αντίθετους όρους (αν υπάρχουν).
- Χωρίζουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς.
- Προσθέτουμε χωριστά τους θετικούς και τους αρνητικούς.
- Προσθέτουμε τα αθροίσματα.

4. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$(-5)+(+3)+(-7)+(+5)+(-12)+(+6)$$

Λύση

Είναι:

$(\cancel{-5})+(+3)+(-7)+(\cancel{+5})+(-12)+(+6) =$ ⟸ διαγραφή αντίθετων όρων

$= (+3)+(-7)+(-12)+(+6)$

$= (+3)+(+6)+(-7)+(-12)$ ⟸ χωρισμός θετικών και αρνητικών

$= (+9)+(-19)$

$= -10$

Απλοποίηση γραφής αθροίσματος

Για την απλοποίηση της γραφής ενός αθροίσματος συμφωνούμε να παραλείπουμε το σύμβολο της πρόσθεσης και τις παρενθέσεις και να γράφουμε τους προσθετέους τον έναν πλάι στον άλλο με το πρόσημό τους.

π.χ.

$$(-3)+(+2)+(-5) = -3+2-5$$

Οι προσθετέοι -3 , $+2$, -5 λέγονται **όροι** του αθροίσματος.
Οπότε η παράσταση $-3+2-5$ είναι το άθροισμα $(-3)+(+2)+(-5)$.

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα, αφού πρώτα κάνετε απαλοιφή των παρενθέσεων.

α. $(-7)+(+3)$

β. $(+5)+(-13)$

γ. $(-6)+(-15)$

Λύση

Έχουμε:

α. $(-7)+(+3) = -7+3 = -4$

β. $(+5)+(-13) = +5-13 = -8$

γ. $(-6)+(-15) = -6-15 = -21$

6. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $5-7$ **β.** $-6+1$ **γ.** $-3+5$

δ. $-5-6$ **ε.** $-9+9$ **στ.** $0-7$

Λύση

Έχουμε:

α. $5-7=-2$ **β.** $-6+1=-5$

γ. $-3+5=2$ **δ.** $-5-6=-11$

ε. $-9+9=0$ **στ.** $0-7=-7$

7. Να υπολογίσετε το άθροισμα, αφού πρώτα γίνει απαλοιφή των παρενθέσεων.

$$A=(-3)+(+7)+(-5)+(+2)+(-6)+(+4)$$

Λύση

Έχουμε:

$A=(-3)+(+7)+(-5)+(+2)+(-6)+(+4)$

$=-3+7-5+2-6+4$ ⟸ απαλοιφή παρενθέσεων

$=-3-5-6+7+2+4$ ⟸ χωρισμός αρνητικών και θετικών

$=-14+13$ ⟸ πρόσθεση αρνητικών και θετικών

$=-1$

8. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A=-13+8-3+4+3-6$ **.**

Λύση

Έχουμε:

$A=-13+8\cancel{-3}+4\cancel{+3}-6$ ⟸ διαγραφή αντίθετων όρων

$=-13+8+4-6$

$=\underbrace{-13-6}+\underbrace{8+4}$ ⟸ χωρισμός αρνητικών και θετικών

$=-19+12$

$=-7$

9. Να υπολογίσετε τις διαφορές:

α. $(-5)-(-3)$ **β.** $(+8)-(+13)$

Λύση

Μετατρέπουμε τις αφαιρέσεις σε προσθέσεις και έχουμε:

α. $(-5)-(-3) = (-5)+(+3) = -5+3 = -2$

β. $(+8)-(+13) = (+8)+(-13) = 8-13 = -5$

Γ. Απαλοιφή παρενθέσεων

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το « + » (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το « + » (αν έχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους.

  π.χ.
  - $(3-5)+(-7+2) = 3-5-7+2$
  - $(x-y)+(-\alpha+\beta) = x-y-\alpha+\beta$

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το « – », μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το « – » και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αλλαγμένα πρόσημα.

  π.χ.
  - $-(7-6)-(-2+5) = -7+6+2-5$
  - $-(x-y)-(-\alpha+\beta) = -x+y+\alpha-\beta$

- Σε μια παράσταση η οποία περιέχει παρενθέσεις και αγκύλες, η απαλοιφή γίνεται από το εσωτερικό της παράστασης προς το εξωτερικό, οπότε οι αγκύλες θα γίνονται παρενθέσεις.

10. Να κάνετε τις πράξεις, αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις.

$$(-3)+(-7)-(+3)-(-8)$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}(-3)+(-7)-(+3)-(-8) &= -3-7-3+8\\ &= -13+8\\ &= -5\end{aligned}$$

11. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\mathbf{x+(\alpha-y)-(x-y)}$ **β.** $\mathbf{(3-5)+(-7+2)-(3-7+1)}$

γ. $\mathbf{-3+[-7-(3-6)]}$

Λύση

α. Είναι

$$\begin{aligned} x+(\alpha-y)-(x-y) &= \cancel{x}+\alpha-\cancel{y}-\cancel{x}+\cancel{y} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

β. Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

$$\begin{aligned} (3-5)+(-7+2)-(3-7+1) &= -2+(-5)-(-3) \\ &= -2-5+3 \\ &= -7+3 = -4 \end{aligned}$$

γ. $$\begin{aligned} -3+[-7-(3-6)] &= -3+[-7-(-3)] \\ &= -3+(-7+3) \\ &= -3+(-4) \\ &= -3-4 = -7 \end{aligned}$$

Σχόλιο

Όταν μία παράσταση τη βάλουμε μέσα σε παρένθεση και έχει μπροστά,

- $+$, τότε οι όροι της παράστασης μέσα στην παρένθεση θα γραφούν με το ίδιο πρόσημο, ενώ αν έχει
- $-$, τότε οι όροι της παράστασης μέσα στην παρένθεση θα γραφούν με αλλαγμένο πρόσημο.

12. Να βάλετε την παράσταση:

α. $\mathbf{x-y}$ **μέσα σε παρένθεση που να έχει μπροστά** $+$

β. $\mathbf{-x-2y}$ **μέσα σε παρένθεση που να έχει μπροστά** $-$

γ. $\mathbf{-x+y-\omega}$ **μέσα σε παρένθεση που να έχει μπροστά** $-$

Λύση

Είναι:

α. $x-y=+(x-y)$

β. $-x-2y=-(x+2y)$

γ. $-x+y-\omega=-(x-y+\omega)$

Δ. Πολλαπλασιασμός

13. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. i. $(+2)\cdot(+15)$ **ii.** $(-3)\cdot(-8)$

β. i. $(+5)\cdot(-14)$ **ii.** $(-8)\cdot(+9)$

Λύση

α. i. Επειδή οι αριθμοί $+2$ και $+15$ είναι ομόσημοι, το γινόμενό τους έχει πρόσημο « + ». Οπότε

$$(+2)\cdot(+15) = +(|+2|\cdot|+15|) = +(2\cdot 15) = +30$$

ή $$(+2)\cdot(+15) = +(2\cdot 15) = +30$$

ή $$(+2)\cdot(+15) = +30$$

ii. Ομοίως έχουμε: $(-3)\cdot(-8) = +(|-3|\cdot|-8|) = +(3\cdot 8) = +24$

ή $(-3)\cdot(-8) = 24$

β. i. Επειδή οι αριθμοί $+5$ και -14 είναι ετερόσημοι, το γινόμενο τους θα έχει πρόσημο « – ». Οπότε

$$(+5)\cdot(-14) = -(5\cdot 14) = -70$$

ii. Ομοίως έχουμε: $(-8)\cdot(+9) = -72$

Γινόμενο πολλών παραγόντων

- Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:
  - το πρόσημο « + », αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο**,
  - το πρόσημο « – », αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό**.
- Αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες ενός γινομένου είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι μηδέν.

14. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $2\cdot(-3)\cdot(+5)\cdot(-1)\cdot(-6)$ **β.** $-5\cdot(-4)\cdot(+3)\cdot(-2)\cdot(-6)$

Λύση

α. Αφού το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι 3 , δηλαδή περιττός αριθμός, το γινόμενο θα έχει πρόσημο « – ». Οπότε

$$2\cdot(-3)\cdot(+5)\cdot(-1)\cdot(-6) = -(2\cdot 3\cdot 5\cdot 1\cdot 6) = -180$$

β. Αφού το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι 4 , δηλαδή άρτιος αριθμός, το γινόμενο θα έχει πρόσημο « + ». Οπότε

$$-5\cdot(-4)\cdot(+3)\cdot(-2)\cdot(-6) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 6 = 720$$

15. **Αν $\alpha = -3$, $\beta = -5$ και $\gamma = -1$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:**

α. $\mathbf{A = \alpha\beta - 4\beta - \alpha\gamma}$

β. $\mathbf{B = (2\alpha - \beta)\cdot(\gamma - \alpha\beta) + \beta\gamma}$

Λύση

Έχουμε:

α. $A = \alpha\beta - 4\beta - \alpha\gamma$

$= -3\cdot(-5) - 4\cdot(-5) - (-3)\cdot(-1)$

$= 15 + 20 - 3 = 32$

β. $B = (2\alpha - \beta)\cdot(\gamma - \alpha\beta) + \beta\gamma$

$= [2\cdot(-3) - (-5)]\cdot[-1 - (-3)\cdot(-5)] + (-5)\cdot(-1)$

$= (-6 + 5)\cdot(-1 - 15) + 5$

$= -1\cdot(-16) + 5$

$= 16 + 5 = 21$

Ε. Διαίρεση

16. **Να υπολογίσετε τα πηλίκα:**

α. $\mathbf{-36 : (-9)}$ **β.** $\mathbf{48 : (-12)}$

γ. $\mathbf{\dfrac{-63}{7}}$ **δ.** $\mathbf{\dfrac{45}{-9}}$ **ε.** $\mathbf{\dfrac{-3{,}6}{-1{,}2}}$

Λύση

Είναι:

α. $-36 : (-9) = +(36 : 9) = +4$

β. $48 : (-12) = -(48 : 12) = -4$

γ. $\dfrac{-63}{7} = -\dfrac{63}{7} = -9$

δ. $\dfrac{45}{-9} = -\dfrac{45}{9} = -5$

ε. $\dfrac{-3{,}6}{-1{,}2} = +\dfrac{3{,}6}{1{,}2} = \dfrac{36}{12} = 3$

17. **Να υπολογίσετε τα πηλίκα:**

α. $\frac{5}{3}:\left(-\frac{1}{6}\right)$ β. $-\frac{4}{5}:(-12)$ γ. $-3:\frac{6}{5}$

Λύση

α. $\frac{5}{3}:\left(-\frac{1}{6}\right) = -\left(\frac{5}{3}:\frac{1}{6}\right) = -\left(\frac{5}{3}\cdot 6\right) = -(5\cdot 2) = -10$

β. $-\frac{4}{5}:(-12) = +\left(\frac{4}{5}:12\right) = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{5}\cdot\frac{1}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{1}{5\cdot 3} = \frac{1}{15}$

γ. $-3:\frac{6}{5} = -\left(3:\frac{6}{5}\right) = -\left(\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{5}{\underset{2}{\cancel{6}}}\right) = -\frac{5}{2}$

18. **Να κάνετε τις πράξεις:**

α. $\frac{1}{2}+(-\frac{5}{3})-(+\frac{1}{6})$ β. $1+\frac{5}{-3}-\frac{2}{-5}-\frac{-7}{-3}$

γ. $1-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$

Λύση

α. $\frac{1}{2}+(-\frac{5}{3})-(+\frac{1}{6}) = \frac{\overset{3}{1}}{2}-\frac{\overset{2}{5}}{3}-\frac{\overset{1}{1}}{6} = \frac{3-10-1}{6} = \frac{3-11}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$

β. $1+\frac{5}{-3}-\frac{2}{-5}-\frac{-7}{-3} = 1+\left(-\frac{5}{3}\right)-\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(+\frac{7}{3}\right) = 1-\frac{5}{3}+\frac{2}{5}-\frac{7}{3} = \frac{\overset{15}{1}}{1}-\frac{\overset{5}{5}}{3}+\frac{\overset{3}{2}}{5}-\frac{\overset{5}{7}}{3}$

$= \frac{15-25+6-35}{15} = \frac{-10-29}{15} = \frac{-39}{15} = -\frac{39}{15} = -\frac{13}{5}$

γ. $1-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = 1-\frac{5}{6}-\frac{4}{3}:\frac{1-2}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{6}-\frac{4}{3}:\frac{-1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{1}{6}-\frac{4}{3}:\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{6}+\frac{4}{3}:\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{1}{6}+\frac{4}{3}\cdot 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{6}-\frac{20}{3}$

$= \frac{1-40}{6} = \frac{-39}{6} = -\frac{13}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Οι αριθμοί – Απόλυτη τιμή

1. Δίνονται οι αριθμοί:

$$+3\ ,\quad -\frac{2}{5}\ ,\quad 1{,}23\ ,\quad 0\ ,\quad -7\ ,\quad \frac{3}{2}$$

Να βρείτε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι:

α. θετικοί **β.** αρνητικοί

γ. ομόσημοι **δ.** ετερόσημοι του $-\frac{2}{5}$

ε. φυσικοί **στ.** ακέραιοι **ζ.** ρητοί

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $|+5|+|-2|+|0|$ **β.** $|-3|-\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|+\frac{1}{3}\right|$

3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $-\frac{3}{4}$ και $-\frac{4}{5}$ και στη συνέχεια να τους παραστήσετε με σημεία ενός άξονα.

Β. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών αριθμών

4. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $(+5)+(+8)$ **β.** $(+12)+(+18)$

γ. $(-3)+(-7)$ **δ.** $(-23)+(-17)$

ε. $(+3)+(+5)+(+9)$ **στ.** $(-2)+(-10)+(-1)$

5. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $(+10)+(-3)$ **β.** $(+7)+(-5)$

γ. $(+4)+(-7)$ **δ.** $(+5)+(-12)$

ε. $(-3)+(+5)$ **στ.** $(-7)+(+15)$

ζ. $(-8)+(+8)$ **η.** $(+12)+(-12)$

θ. $(-5)+0$

6. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $(+5)+(+3)+(-6)$ **β.** $(-8)+(-6)+(+4)$

γ. $(+7)+(+8)+(-6)+(-3)$ **δ.** $(-2)+(-8)+(+3)+(+7)$

ε. $(+5)+(-7)+(+6)+(-2)$ **στ.** $(-10)+(+3)+(-1)+(+5)$

7. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $(+3)+(-5)+(-3)+(+5)$ **β.** $(-7)+(+3)+(-2)+(-3)$

γ. $(+13)+(-8)+(-6)+(+8)+(-9)$

δ. $(-7)+(-15)+(+9)+(+15)+(-2)$

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα, αφού πρώτα κάνετε απαλοιφή των παρενθέσεων.

α. $(+5)+(-7)$ **β.** $(-3)+(+2)$

γ. $(-6)+(-13)$ **δ.** $(-8)+(+8)$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α. $10-13$ **β.** $-8+5$ **γ.** $13-8$

δ. $-6-15$ **ε.** $-13+13$ **στ.** $19-35$

10. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα, αφού πρώτα κάνετε απαλοιφή των παρενθέσεων.

α. $(-5)+(+9)+(-10)+(+3)$ **β.** $-2+(-3)+(+3)+(-7)$

γ. $7+(-10)+(+5)+(-13)+(+10)$ **δ.** $(+5)-2+(-7)+9$

11. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α. $-5+3-2+5$ **β.** $7-8+2-5-1$

γ. $-2+5-13+2-7+3$ **δ.** $-6+5-7-3+2-8$

ε. $5-18+7-15+20$ **στ.** $-32+45-25{,}3+7{,}2$

12. Να υπολογίσετε τις διαφορές:

α. $(+7)-(+3)$ **β.** $(-12)-(-8)$ **γ.** $(+5)-(+7)$

δ. $(-6)-(-10)$ **ε.** $(+7)-(+7)$ **στ.** $0-(+3)$

Γ. Απαλοιφή παρενθέσεων

13. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = (\alpha-3)-(\beta-3)+(-\alpha+\beta)$

β. $B = 7-(2+\alpha)-(-\alpha+\beta)+(-3+\beta)$

γ. $\Gamma = 10-(\alpha-\beta+\gamma)+(-\beta+\alpha)-(-\gamma-\beta)-\beta+5$

14. Να κάνετε τις πράξεις αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις.

α. $(-2)-(+3)-(-7)$ **β.** $(+5)-(-7)+(-3)-(+5)$

γ. $(-12)+(-3)-(-7)-(+5)$ **δ.** $(+13)-(+3{,}4)-(-7{,}6)+(-1)$

15. Να κάνετε τις πράξεις αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις.

α. $(-3)+(-2)-(+7)-(-6)$ **β.** $5-(-8)+(-2)-(+6)+(+3)$

γ. $-2+(-6)+3-(-7)-(+5)$ **δ.** $-1{,}2+(-2)-(-3{,}4)-(-1)$

16. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις.

α. $(-3+2)-(5-3)+(7-8)$ **β.** $5+(-6+5)-(-8-2)$

γ. $-3-(11-8)+(5-8-5)$ **δ.** $1-(3-5+1)+(-2+5-7)$

ε. $-6-(-3)+(-7+8-3)-(-5+2-3)$

17. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $-5+[-3-(6-2)]-(-2)$ **β.** $1+[5-(-6+2)]$

γ. $1-[-2+(-7+1)]-(3-5)$ **δ.** $-2-\left[-7+(-3+5-7)\right]-(-5+3)$

18. Αν $\alpha = -1+(3-5)$ και $\beta = 5-(-2+7-3)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 5-(\alpha-3)+(1-\beta)$.

19. Αν $x = 5-(2-3)-(-5+8)-1$ και $y = 1-[2+(7-10)]$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = -2+(x-3)-\left[2-(y-1)\right]$$

20. Να βάλετε την παράσταση:

α. $2\alpha-\beta$ μέσα σε παρένθεση που να έχει μπροστά $+$

β. $-3\alpha-5\beta$ μέσα σε παρένθεση που να έχει μπροστά $-$

γ. $-2\alpha+3\beta-5\gamma$ μέσα σε παρένθεση που να έχει μπροστά $-$.

21. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 3-[\alpha-(\beta-x)]-(y-\alpha)-(\beta-1), \quad \text{όταν} \quad x+y=-6$$

22. Αν $\alpha-\beta=3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 3-(\alpha+5)-[7-(\beta-3)]$$

Δ. Πολλαπλασιασμός

23. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $(+5)\cdot(+6)$ **β.** $(+7)\cdot(+9)$ **γ.** $(-3)\cdot(-8)$

δ. $(-6)\cdot(-7)$ **ε.** $(+3)\cdot(-5)$ **στ.** $(+6)\cdot(-8)$

ζ. $(-8)\cdot(+9)$ **η.** $(-7)\cdot(+10)$

24. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $(+3)\cdot(+2)\cdot(-4)$ **β.** $(-6)\cdot(+3)\cdot(-2)$

γ. $(-2)\cdot(+3)\cdot(-5)\cdot(-1)$ **δ.** $(-5)\cdot(+1)\cdot(-2)\cdot(-6)\cdot(-4)$

ε. $-4\cdot(-1)\cdot(+2)\cdot(-3)$ **στ.** $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$

25. Να βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών:

α. $-\frac{3}{5}$ **β.** -2 **γ.** $-\frac{1}{7}$

26. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $7+3\cdot(-4)$ **β.** $5-2\cdot(-3)$

γ. $-5\cdot2+3\cdot(-4)$ **δ.** $7+3\cdot(-5)-2\cdot(-6)$

27. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $1-2\cdot[-3+(8-2\cdot5)]$ **β.** $-2\cdot(3-7)+3\cdot[-17-2\cdot(-8)]$

γ. $(5-3\cdot2)\cdot[-3\cdot4+7\cdot(-2)]-3\cdot(-2)$ **δ.** $1-2\cdot[3-(-4+5)]\cdot[-2+(7-8)]$

28. Αν $\alpha = -2$, $\beta = -3$ και $\gamma = -1$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = 3\alpha - 2\beta + 5\gamma$ **β.** $B = \alpha\beta - \beta\gamma + \gamma$

γ. $\Gamma = \gamma - \alpha\beta\gamma + 2\beta$ **δ.** $\Delta = (\alpha - \beta)\cdot(\beta - 3\gamma)$

29. Αν $x = -2$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+2013)$

β. $B = x\cdot(x+1)\cdot(3x-10)$

γ. $\Gamma = (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+1)$

Ε. Διαίρεση

30. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α. $(+15):(+3)$ **β.** $(-24):(-8)$

γ. $(-45):(+9)$ **δ.** $(+39):(-13)$

31. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α. $\dfrac{-6}{-2}$ **β.** $\dfrac{-18}{6}$ **γ.** $\dfrac{2{,}5}{-0{,}5}$

32. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\dfrac{5}{3}-\dfrac{7}{3}$ **β.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}$ **γ.** $1-\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{6}$

δ. $-2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}$ **ε.** $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}-\dfrac{5}{2}$ **στ.** $1-\dfrac{3}{2}$

ζ. $\dfrac{5}{3}-2$ **η.** $\dfrac{1}{2}-1$

33. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\left(+\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ **β.** $\left(-\dfrac{5}{3}\right)-\left(+\dfrac{7}{2}\right)$

γ. $\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(-1)-\left(-\dfrac{5}{4}\right)$ **δ.** $-1-\left(+\dfrac{5}{7}\right)+\left(-\dfrac{1}{21}\right)$

34. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $1+\dfrac{-3}{2}-\dfrac{5}{-3}$ **β.** $2+\dfrac{9}{-4}-\dfrac{-5}{-2}$

γ. $\dfrac{5-7}{3}+\dfrac{3+2\cdot(-4)}{6}+\dfrac{|-6|-|2|}{-3}$

35. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\frac{5}{11}-\frac{8}{11}\cdot\frac{5}{4}$ **β.** $4-4:\frac{16}{17}$

γ. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3}-1)$ **δ.** $\left(1-\frac{3}{2}\right):\left(\frac{5}{3}-2\right)$

36. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $1-3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)+(-5)\cdot\frac{2}{3}:\left(-\frac{1}{2}\right)$ **β.** $\left(1-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)-5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$

γ. $1-2\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{2}\cdot(-4)$ **δ.** $-\frac{5}{6}:\left(-3+\frac{7}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left[-3\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)+1\right]$

ε. $1-3\cdot\left[5-(-2)\cdot(-3)-\frac{1}{2}\right]:(2-\frac{5}{2})$

στ. $\frac{2\cdot(-3)+5}{3}:\frac{7-7\cdot(-1)-(-3)\cdot(-4)}{-2\cdot(-5)-14}-1$

37. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\dfrac{1-\frac{5}{3}}{\frac{3}{2}-2}$ **β.** $\dfrac{-\frac{5}{2}+1}{2\cdot(-3)}$ **γ.** $\dfrac{1-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}{7-2\cdot(-5)}$

38. Αν $\alpha = 1-\frac{4}{3}$ και $\beta = \frac{4}{3}-\frac{5}{6}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \alpha+\beta$ **β.** $B = \alpha\cdot\beta$ **γ.** $\Gamma = \frac{\alpha}{\beta}$

39. Αν $\alpha = -\frac{2}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ και $\gamma = -5$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = 1-\alpha\cdot\beta+\beta:\alpha+\gamma$ **β.** $B = \frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}-1$

γ. $\Gamma = \alpha\cdot\beta:\gamma-2\beta-\frac{1}{\alpha}$ **δ.** $\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta}-\frac{\gamma}{\alpha-\beta}$

ΣΤ. Γενικές

40. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι και οι x, y αντίστροφοι, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \alpha - (5-\beta) - x\cdot(3-y) + 3x$$

41. Αν $\alpha-\beta=-3$ και $\gamma-\delta=-2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 3 + (\alpha-\gamma) - (\beta-\delta)$$

42. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{3}{2}$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}$

β. $B = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}$

γ. $\Gamma = \dfrac{2\alpha+3\beta}{5\beta}$

δ. $\Delta = \dfrac{3\alpha-2\beta}{\alpha}$

43. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 32 - 12:4 + 53 + 3\cdot 4 + \dfrac{16}{9}:\dfrac{1}{8} - \dfrac{74}{9}$

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε "Ο Θαλής" 2013 - Β΄ Γυμνασίου

44. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5} - \frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)$$

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε "Ο Θαλής" 2012 - Β΄ Γυμνασίου

45. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5\cdot\frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2 - 1\right)$$

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε "Ο Θαλής" 2011 - Β΄ Γυμνασίου

46. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left\{111 - \left[264 - \left(15+\frac{54}{6}\right)\cdot|-5|\right]:12\right\}:11+1$$

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε "Ο Θαλής" 2006 - Β΄ Γυμνασίου

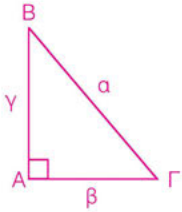
25 Πυθαγόρειο θεώρημα

Πυθαγόρειο θεώρημα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα εκφράζει μια σχέση που συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου. Δηλαδή ισχύει:

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσάς.



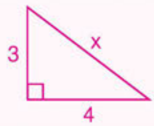
Δηλαδή για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος ισχύει

$$\mathbf{A\Gamma^2 + AB^2 = B\Gamma^2} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2}$$

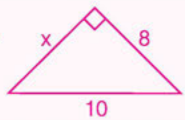
- Από την παραπάνω σχέση έχουμε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$.

παράδειγμα

Να βρείτε το x στα τα διπλανά σχήματα. **α.**



β.



Λύση

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

α. $x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Άρα $x = 5$.

β. $x^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$. Άρα $x = 6$.

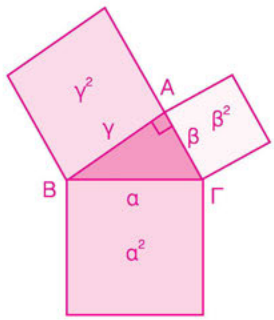
Παρατήρηση

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α .

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

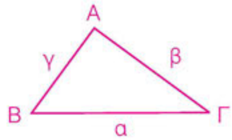
Δηλαδή το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο άλλων τετραγώνων.



Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση του Πυθαγορείου θεωρήματος. Δηλαδή:

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

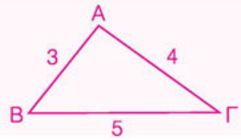


Δηλαδή:

Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, **τότε** $\widehat{A} = 90^\circ$.

παράδειγμα

Να εξετάσετε αν το τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο.



Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η ΒΓ και έχουμε:

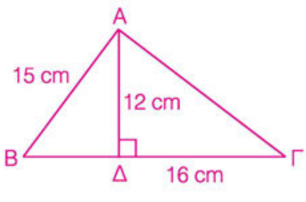
- $ΒΓ^2 = 5^2 = 25$
- $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Οπότε $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, άρα $\widehat{A} = 90^\circ$.

Λυμενες Ασκησεις

Α. Πυθαγόρειο θεώρημα

1. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ . Αν ΑΒ = 15 cm , ΑΔ = 12 cm και ΓΔ = 16 cm , να υπολογίσετε:



α. το μήκος του ΑΓ

β. το μήκος του ΑΒ .

Λύση

α. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο ΔΑΓ , έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$$

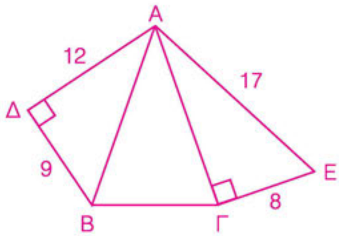
Άρα ΑΓ = 20 cm .

β. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο ΔΑΒ , έχουμε:

$$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 = 9^2$$

Άρα ΒΔ = 9 cm .

2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές.



Λύση

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα:

- στο τρίγωνο ΑΔΒ και έχουμε

$$AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 = 15^2$$

Άρα $AB = 15$.

- στο τρίγωνο ΑΓΕ και έχουμε

$$A\Gamma^2 = AE^2 - \Gamma E^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225 = 15^2$$

Άρα $A\Gamma = 15$.

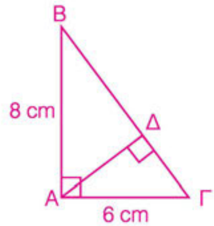
Οπότε $AB = A\Gamma$, επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Β. Πυθαγόρειο θεώρημα – Εμβαδά

3. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 8$ cm , $A\Gamma = 6$ cm .

α. Να βρείτε την ΒΓ .

β. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ .



Λύση

α. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

Άρα $B\Gamma = 10$ cm .

β. Έστω $A\Delta = x$. Είναι:

- $(AB\Gamma) = \dfrac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$
- $(AB\Gamma) = \dfrac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}$ ή $24 = \dfrac{10 \cdot x}{2}$ ή $24 = 5x$ ή $x = \dfrac{24}{5}$ ή $x = 4{,}8$

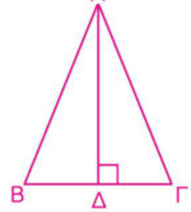
Άρα $A\Delta = 4{,}8$ cm .

4. Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές, με βάση τη $B\Gamma = 10$ cm και περίμετρο $\Pi = 36$ cm . Να βρείτε:

α. Τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ .

β. Το ύψος ΑΔ .

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .



Λύση

α. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, έχουμε $AB = A\Gamma$.

Έστω $AB = A\Gamma = x$. Έχουμε

$\Pi = 36$ ή $AB + A\Gamma + B\Gamma = 36$ ή $x + x + 10 = 36$ ή $2x = 36 - 10$

ή $2x = 26$ ή $x = \frac{26}{2}$ ή $x = 13$

Άρα $AB = A\Gamma = 13$ cm .

β. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, το ύψος του ΑΔ είναι και διάμεσος, οπότε το Δ είναι το μέσο της ΒΓ . Άρα $B\Delta = 5$ cm .

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ , έχουμε:

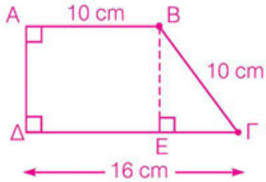
$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2$$

Οπότε $A\Delta = 12$ cm .

γ. Είναι $(AB\Gamma) = \dfrac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2} = \dfrac{10 \cdot 12}{2} = \dfrac{120}{2} = 60 \text{ cm}^2$.

5. Έστω το τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90°$, $AB = B\Gamma = 10$ cm και $\Gamma\Delta = 16$ cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου.

Λύση



Φέρουμε τη $BE \perp \Delta\Gamma$.

Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο.

Οπότε $\Delta E = AB = 10$ cm .

Άρα $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = 16 - 10 = 6$ cm .

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ και έχουμε:

$$BE^2 = B\Gamma^2 - E\Gamma^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

Άρα $BE = 8$ cm .

Είναι $(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot BE = \dfrac{10 + 16}{2} \cdot 8 = 104 \text{ cm}^2$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A\Gamma = 20$ m και $B\Gamma = 21$ m . Αν ΑΔ το ύψος του και $B\Delta = 5$ m , να υπολογίσετε:

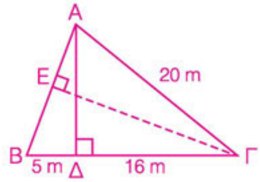
α. το ύψος ΑΔ

β. τη πλευρά ΑΒ

γ. το ύψος ΓΕ .

Λύση

α. Είναι $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 21 - 5 = 16\ \text{m}$.



Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ και έχουμε:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2$$

Άρα $A\Delta = 12\ \text{m}$.

β. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta B$ και έχουμε

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 144 + 5^2 = 169 = 13^2$$

Άρα $AB = 13\ \text{m}$.

γ. Έστω $\Gamma E = x$.

Είναι:
- $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot 21 \cdot 12 = 126\ \text{m}^2$
- $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot \Gamma E = \dfrac{1}{2} \cdot 13 \cdot x = \dfrac{13x}{2}$

Οπότε $\dfrac{13x}{2} = 126$ ή $13x = 2 \cdot 126$ ή $13x = 252$ ή $x = \dfrac{252}{13}$ ή $x \simeq 19{,}38\ \text{m}$.

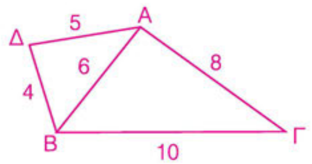
Άρα $\Gamma E \simeq 19{,}38\ \text{m}$.

Γ. Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

7. Να εξετάσετε στο διπλανό σχήμα:

α. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν η γωνία $\widehat{\Delta}$ είναι ορθή.



Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $B\Gamma$.

Έχουμε:
- $B\Gamma^2 = 10^2 = 100$
- $AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Οπότε $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, επομένως $B\widehat{A}\Gamma = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο τρίγωνο $A\Delta B$ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η AB.

Έχουμε:
- $AB^2 = 6^2 = 36$
- $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

Επειδή $AB^2 \neq A\Delta^2 + \Delta B^2$ προκύπτει ότι $\widehat{\Delta} \neq 90^\circ$.

Άρα η γωνία $\widehat{\Delta}$ δεν είναι ορθή.

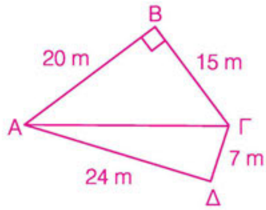
Μέθοδος

Βρίσκουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου $AB\Gamma$ και το συγκρίνουμε με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του.

8. **Στο διπλανό σχήμα:**

α. Να εξετάσετε, αν το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ .



Λύση

α. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 = 25^2$$

Άρα $ΑΓ = 25\text{ m}$.

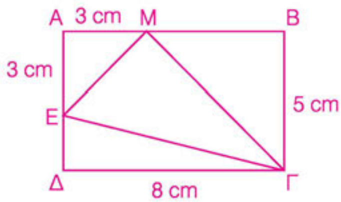
Έχουμε:
- $ΑΓ^2 = 625$
- $ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$

Επειδή $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$ σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, είναι $\widehat{Δ} = 90°$, οπότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) = \dfrac{ΑΒ \cdot ΒΓ}{2} + \dfrac{ΑΔ \cdot ΔΓ}{2} = \dfrac{20 \cdot 15}{2} + \dfrac{24 \cdot 7}{2}$

$$= 150 + 84 = 234\text{ m}^2$$

9. **Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΓΕ είναι ορθογώνιο.**



Λύση

Είναι $ΜΒ = 8 - 3 = 5\text{ cm}$ και $ΔΕ = 5 - 3 = 2\text{ cm}$.

Βρίσκουμε τα τετράγωνα των πλευρών του τριγώνου ΜΓΕ .

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΜΕ , ΒΜΓ , ΔΓΕ και έχουμε αντίστοιχα:

- $ΜΕ^2 = ΑΜ^2 + ΑΕ^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$
- $ΜΓ^2 = ΜΒ^2 + ΒΓ^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$
- $ΓΕ^2 = ΓΔ^2 + ΔΕ^2 = 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$

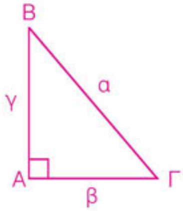
Είναι $ΜΕ^2 + ΜΓ^2 = 18 + 50 = 68$.

Οπότε $ΓΕ^2 = ΜΕ^2 + ΜΓ^2$, άρα $Ε\widehat{Μ}Γ = 90°$, επομένως το τρίγωνο ΜΓΕ είναι ορθογώνιο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

α. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο $(\widehat{A} = 90°)$, τότε:



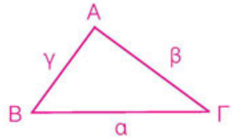
i. $\alpha^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ii. $\beta^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

iii. $\gamma^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

β. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε

. . . .

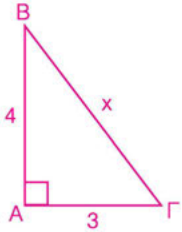


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

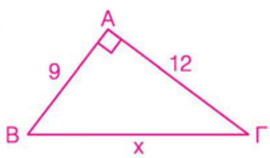
Α. Πυθαγόρειο θεώρημα

2. Να υπολογίσετε την πλευρά x στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.

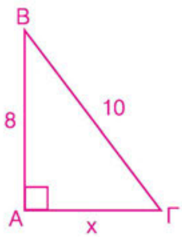
α.



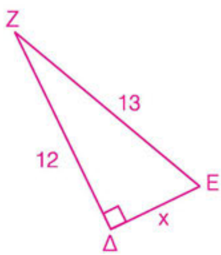
β.



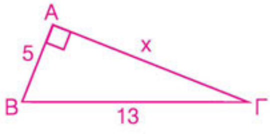
γ.



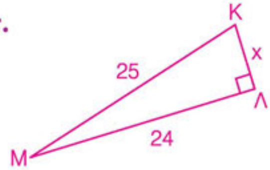
δ.



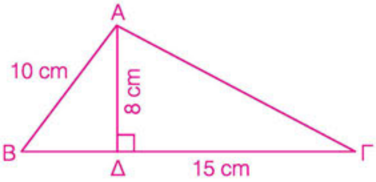
ε.



στ.



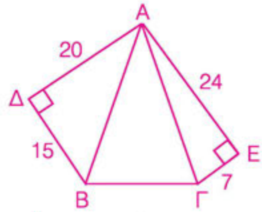
3. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το ύψος του $ΑΔ$. Αν $ΑΒ = 10$ cm, $ΔΓ = 15$ cm και $ΑΔ = 8$ cm, να βρείτε:



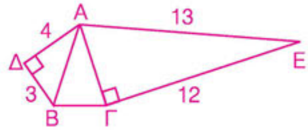
α. το μήκος του $ΑΓ$,

β. το μήκος του $ΒΔ$.

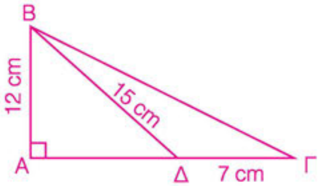
4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές.



5. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές.



6. Στο διπλανό σχήμα, να βρείτε το μήκος των $ΑΔ$ και $ΒΓ$.

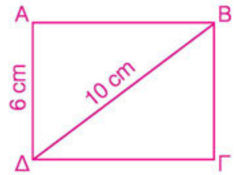


Β. Πυθαγόρειο θεώρημα – Εμβαδά

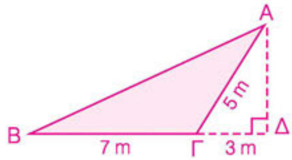
7. Δίνεται το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ του διπλανού σχήματος.

α. Να υπολογίσετε την $ΑΒ$.

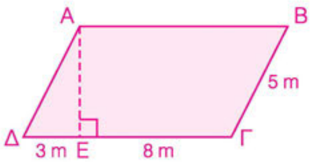
β. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$.



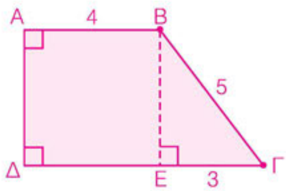
8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ του διπλανού σχήματος.



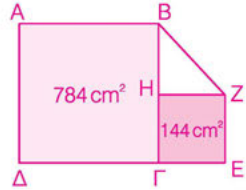
9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.



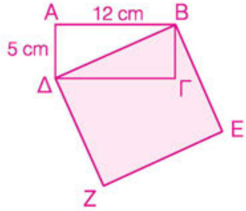
10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ στο διπλανό σχήμα.



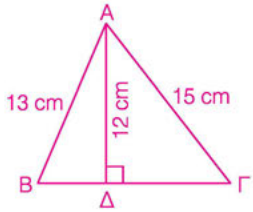
11. Τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΗΖΕΓ έχουν εμβαδά $784\ cm^2$ και $144\ cm^2$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μήκος του ΒΖ .



12. Στο διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΕΖΔ .

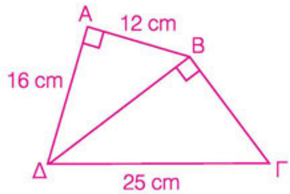


13. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ με $ΑΒ = 13\ cm$, $ΑΓ = 15\ cm$ και $ΑΔ = 12\ cm$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με περίμετρο $Π = 16\ cm$ και βάση $ΒΓ = 6\ cm$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

15. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{Α} = Δ\widehat{Β}Γ = 90^\circ$, $ΑΒ = 12\ cm$, $ΑΔ = 16\ cm$ και $ΓΔ = 25\ cm$. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ .

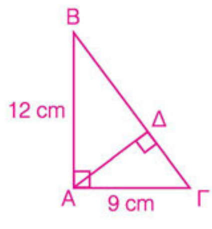


16. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος έχει $ΑΒ = 12\ cm$ και $ΑΓ = 9\ cm$.

α. Να βρείτε την ΒΓ .

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

γ. Να βρείτε το ύψος ΑΔ .



17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^\circ$) με $ΑΒ = 8\ cm$ και εμβαδόν $24\ cm^2$. Να υπολογίσετε:

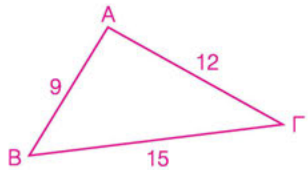
α. το μήκος του ΑΓ ,

β. την υποτείνουσα ΒΓ .

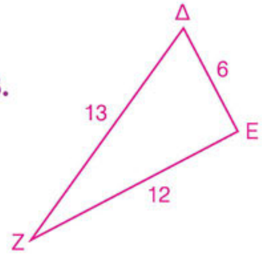
Γ. Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

18. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια.

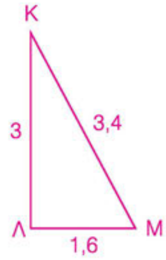
α.



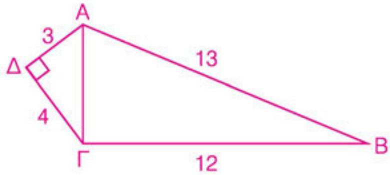
β.



γ.



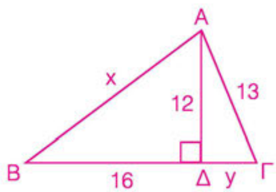
19. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο και στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ .



20. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος:

α. Να υπολογίσετε τα x και y .

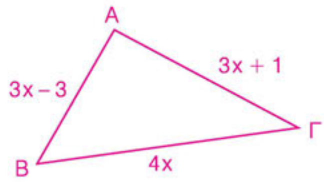
β. Να εξετάσετε, αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



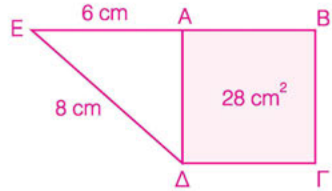
21. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 48 .

α. Να βρείτε τον αριθμό x .

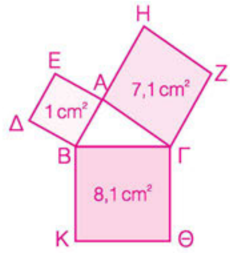
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



22. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με εμβαδόν $28\ cm^2$ και $ΑΕ = 6\ cm$, $ΔΕ = 8\ cm$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ορθογώνιο.



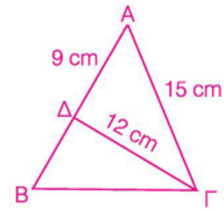
23. Στο διπλανό σχήμα να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



24. Στο διπλανό σχήμα είναι $ΑΔ = 9$ cm , $ΑΓ = 15$ cm και $ΓΔ = 12$ cm .

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

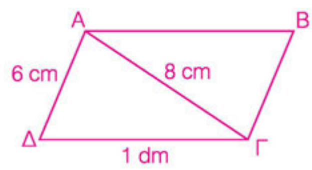
β. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $84\ cm^2$, να βρείτε το μήκος της ΒΓ .



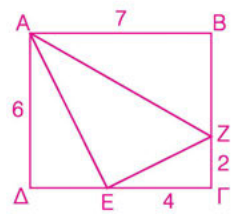
25. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ .

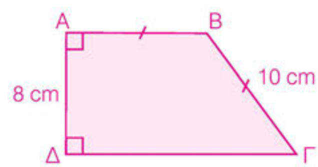


26. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ορθογώνιο.



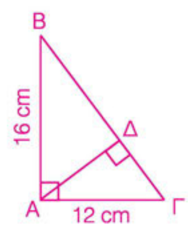
Δ. Γενικές

27. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού τραπεζίου ΑΒΓΔ .

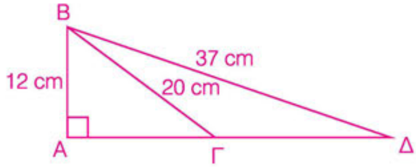


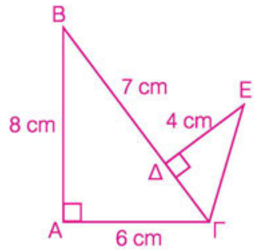
28. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90°$) με $ΑΒ = 16$ cm και $ΑΓ = 12$ cm .

Να υπολογίσετε το ύψος προς την υποτείνουσα.



29. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ .



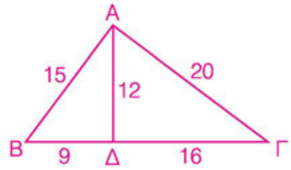


30. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του ΓΕ .

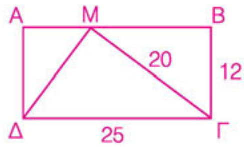
31. Στο διπλανό σχήμα, να δείξετε ότι:

α. Τα σημεία Β , Δ , Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

β. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



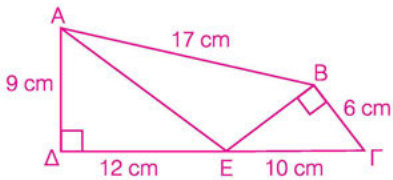
32. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΓΔ είναι ορθογώνιο.



33. Στο διπλανό σχήμα έχουμε $\widehat{\Delta} = \mathrm{E}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 90^\circ$, $\mathrm{AB} = 17$ cm , $\mathrm{A\Delta} = 9$ cm , $\mathrm{B\Gamma} = 6$ m , $\Gamma\mathrm{E} = 10$ cm και $\Delta\mathrm{E} = 12$ cm .

α. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 90^\circ$.

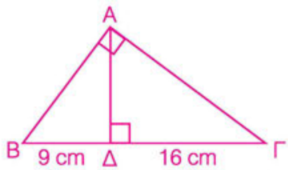
β. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ .



34. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΑΔ και $\mathrm{B\Delta} = 9$ cm , $\Gamma\Delta = 16$ cm .

α. Να δείξετε ότι $\mathrm{A\Gamma}^2 - \mathrm{AB}^2 = 175$.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .



Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α΄ Λυκείου
- Γεωμετρία Α΄ Λυκείου
- Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
- Γεωμετρία Β΄ Λυκείου
- Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών
- Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας
- Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α΄ & Β΄
- Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα
- Μαθηματικά Α΄, Β΄, Γ΄ ΕΠΑ.Λ.

ISBN: 978-618-82023-5-1
9 786188 202351

Λ.Τ. 21,70 €