Τάσος Χ. Μπάρλας

Μαθηματικά

Γ΄ Γυμνασίου

όλων των επιπέδων

- Θεωρία
- Λυμένες ασκήσεις
- Ασκήσεις για λύση
- Διαγωνίσματα
- Θέματα
- Λύσεις των ασκήσεων και του Σχολικού Βιβλίου

Μπάρλας ΕΚΔΟΣΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α' ΜΕΡΟΣ • ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς 8

2. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών 24

3. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού 38

4. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα 53

5. Πράξεις με μονώνυμα 60

6. • Πολυώνυμα
• Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων 68

7. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων 80

8. Αξιοσημείωτες ταυτότητες 92

9. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων 123

10. Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις 161

11. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων 170

12. ΕΚΠ και ΜΚΔ ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων 175

13. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων 178

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

14. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ 190

15. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων 194

16. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου 205

17. Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού 216

18. Κλασματικές εξισώσεις 221

19. Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο 230

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

20. Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης 246

21. Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του 256

22. Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος 263

23. Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$ 282

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

24. Σύνολα 290

25. Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα 296

26. Έννοια της πιθανότητας 304

Β' ΜΕΡΟΣ • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

27. Ισότητα τριγώνων 312

28. Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων 332

29. Όμοια πολύγωνα 340

30. Όμοια τρίγωνα 344

31. Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων 353

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

32. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ 360

33. Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών 366

34. Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας 371

35. • Νόμος των ημιτόνων
• Νόμος των συνημιτόνων 380

ΘΕΜΑΤΑ 386

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ 398

Λύσεις των Ασκήσεων για λύση και Θεμάτων 403

Λύσεις των Ασκήσεων του σχολικού βιβλίου 538

8 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Υπάρχουν ταυτότητες που τις συναντάμε συχνά και γι' αυτό αξίζει να τις θυμόμαστε.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:

Α. Τετράγωνο αθροίσματος – διαφοράς

Να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ **β.** $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Απόδειξη

Είναι:

α. $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

β. $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

παραδείγματα:

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $A=(x+3)^2$.

Βήμα 1	$A=(x+3)^2$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha+\beta)^2$
Βήμα 2	$A=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ με $\alpha=x$ και $\beta=3$
Βήμα 3	$A=x^2+6x+9$	εκτελούμε τις πράξεις

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $B=(3x-5y)^2$.

Βήμα 1	$B=(3x-5y)^2$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha-\beta)^2$
Βήμα 2	$B=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ με $\alpha=3x$ και $\beta=5y$
Βήμα 3	$B=9x^2-30xy+25y^2$	εκτελούμε τις πράξεις

Β. Κύβος αθροίσματος – διαφοράς

Να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

β. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

Απόδειξη

Έχουμε:

α.
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)^2\\ &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\\ &= \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\end{aligned}$$

β.
$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^3 &= (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)^2 =\\ &= (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\\ &= \alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3\\ &= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\end{aligned}$$

παραδείγματα:

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $A=(x+2)^3$.

Βήμα 1	$A=(x+2)^3$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha+\beta)^3$
Βήμα 2	$A=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ με $\alpha=x$ και $\beta=2$
Βήμα 3	$A=x^3+6x^2+12x+8$	εκτελούμε τις πράξεις

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $B=(2x-1)^3$.

Βήμα 1	$B=(2x-1)^3$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha-\beta)^3$
Βήμα 2	$B=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2-1^3$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ με $\alpha=2x$ και $\beta=1$
Βήμα 3	$B=8x^3-12x^2+6x-1$	εκτελούμε τις πράξεις

Γ. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) &= \alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha-\beta^2\\ &= \alpha^2-\beta^2\end{aligned}$$

παραδείγματα:

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $A=(x+3)\cdot(x-3)$.

Βήμα 1	$A=(x+3)\cdot(x-3)$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$
Βήμα 2	$A=x^2-3^2$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ με $\alpha=x$ και $\beta=3$
Βήμα 3	$A=x^2-9$	εκτελούμε τις πράξεις

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $B=(4x+7)\cdot(4x-7)$.

Βήμα 1	$B=(4x+7)\cdot(4x-7)$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$
Βήμα 2	$B=(4x)^2-7^2$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ με $\alpha=4x$ και $\beta=7$
Βήμα 3	$B=16x^2-49$	εκτελούμε τις πράξεις

Δ. Διαφορά κύβων – Άθροισμα κύβων

Να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\beta^3$

β. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\beta^3$

Απόδειξη

Έχουμε:

α. $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3 = \alpha^3+\beta^3$

β. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3 = \alpha^3-\beta^3$

παραδείγματα:

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $A=(x+2)\cdot(x^2-2x+4)$.

Βήμα 1	$A=(x+2)\cdot(x^2-2x+2^2)$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
Βήμα 2	$A=x^3+2^3$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$ με $\alpha=x$ και $\beta=2$
Βήμα 3	$A=x^3+8$	εκτελούμε τις πράξεις

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $B=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$.

Βήμα 1	$B=(x-1)\cdot(x^2+x\cdot1+1^2)$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
Βήμα 2	$B=x^3-1^3$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ με $\alpha=x$ και $\beta=1$
Βήμα 3	$B=x^3-1$	εκτελούμε τις πράξεις

Ε. Τετράγωνο τριωνύμου

Να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

β. $(\alpha-\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

γ. $(\alpha-\beta-\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\beta\gamma-2\gamma\alpha$

Απόδειξη

α. Είναι $(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\alpha+\beta^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\gamma\beta+\gamma^2$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

β. Είναι $(\alpha-\beta+\gamma)^2=[\alpha+(-\beta)+\gamma]^2$.

Οπότε, αν θέσουμε στην προηγούμενη ταυτότητα όπου β το $-\beta$, έχουμε

$$(\alpha-\beta+\gamma)^2=\alpha^2+(-\beta)^2+\gamma^2+2\alpha\cdot(-\beta)+2(-\beta)\cdot\gamma+2\gamma\alpha$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

γ. Είναι $(\alpha-\beta-\gamma)^2=[\alpha+(-\beta)+(-\gamma)]^2$.

Οπότε, αν θέσουμε στην πρώτη ταυτότητα όπου β το $-\beta$ και όπου γ το $-\gamma$, έχουμε

$$(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2+(-\beta)^2+(-\gamma)^2+2\alpha\cdot(-\beta)+2(-\beta)\cdot(-\gamma)+2(-\gamma)\cdot\alpha$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\beta\gamma-2\gamma\alpha$$

παραδείγματα:

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $A=(2x+3y+1)^2$.

Βήμα 1	$A=(2x+3y+1)^2$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha+\beta+\gamma)^2$
Βήμα 2	$A=(2x)^2+(3y)^2+1^2+$ $+2\cdot2x\cdot3y+2\cdot3y\cdot1+2\cdot1\cdot2x$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta+\gamma)^2=$ $=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$ με $\alpha=2x$, $\beta=3y$ και $\gamma=1$
Βήμα 3	$A=4x^2+9y^2+1+12xy+6y+4x$	εκτελούμε τις πράξεις

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $B = (x^2 - x + 1)^2$.

Βήμα 1	$B = (x^2 - x + 1)^2$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(\alpha - \beta + \gamma)^2$
Βήμα 2	$B = (x^2)^2 + x^2 + 1^2 - 2x^2 \cdot x - 2x \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot x^2 = x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x + 2x^2$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha - \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$ με $\alpha = x^2$, $\beta = x$ και $\gamma = 1$
Βήμα 3	$B = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	εκτελούμε τις πράξεις

ΣΤ. Γινόμενο της μορφής: (x+α) (x+β)

Να αποδείξετε ότι $(x+\alpha)\cdot(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$.

Απόδειξη

Είναι
$$(x+\alpha)\cdot(x+\beta) = x^2 + \beta x + \alpha x + \alpha\beta$$
$$= x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta$$
$$= x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

παραδείγματα:

- Να βρείτε το ανάπτυγμα $A = (x+2)\cdot(x+3)$.

Βήμα 1	$A = (x+2)\cdot(x+3)$	αναγνωρίζουμε τη μορφή $(x+\alpha)\cdot(x+\beta)$
Βήμα 2	$A = x^2 + (2+3)x + 2\cdot 3$	εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(x+\alpha)\cdot(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ με $\alpha = 2$ και $\beta = 3$
Βήμα 3	$A = x^2 + 5x + 6$	εκτελούμε τις πράξεις

- Είναι:
  - $(x+5)\cdot(x-2) = x^2 + (5-2)x + 5\cdot(-2) = x^2 + 3x - 10$
  - $(x-2)\cdot(x-5) = x^2 - 7x + 10$

Ζ. Εφαρμογές αξιοσημείωτων ταυτοτήτων

Να αποδείξετε ότι:

α. $\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}$

β. $\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta}$

γ. $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}$

δ. $\boldsymbol{\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)}$

Απόδειξη

Είναι:

α. $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

β. $(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

γ. $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2 = \alpha^3+\beta^3$

δ. $(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta) = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2 = \alpha^3-\beta^3$

παραδείγματα:

- **Αν $\boldsymbol{\alpha+\beta=3}$ και $\boldsymbol{\alpha\beta=2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:**

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\alpha^3+\beta^3}$$

Λύση

Είναι:
- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot 2=9-4=5$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot 2\cdot 3=27-18=9$

- **Αν $\boldsymbol{\alpha-\beta=5}$ και $\boldsymbol{\alpha\beta=2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:**

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2 \quad \text{και} \quad \alpha^3-\beta^3}$$

Λύση

Είναι:
- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=5^2+2\cdot 2=25+4=29$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=5^3+3\cdot 2\cdot 5=125+30=155$

Σχόλιο

Με τη βοήθεια των παραπάνω ταυτοτήτων μπορούμε να εκφράσουμε:

- Το **άθροισμα των τετραγώνων** δύο αριθμών συναρτήσει του αθροίσματος ή της διαφοράς αυτών και του γινομένου τους.
- Το **άθροισμα των κύβων** δύο αριθμών συναρτήσει του αθροίσματος αυτών και του γινομένου τους.
- Τη **διαφορά των κύβων** δύο αριθμών συναρτήσει της διαφοράς τους και του γινομένου τους.

Ανακεφαλαίωση

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

• Τετράγωνο αθροίσματος	**1.** $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
• Τετράγωνο διαφοράς	**2.** $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
• Κύβος αθροίσματος	**3.** $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
• Κύβος διαφοράς	**4.** $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
• Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά	**5.** $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$
• Άθροισμα κύβων	**6.** $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\beta^3$
• Διαφορά κύβων	**7.** $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\beta^3$
• Τετράγωνο τριώνυμου	**8.** $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$
	9. $(\alpha-\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\gamma\alpha$
• Γινόμενο της μορφής $(x+\alpha)(x+\beta)$	**10.** $(x+\alpha)\cdot(x+\beta) = x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

Εφαρμογές αξιοσημείωτων ταυτοτήτων

• Άθροισμα τετραγώνων	**1.** $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
	2. $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
• Άθροισμα κύβων	**3.** $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
• Διαφορά κύβων	**4.** $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Τετράγωνο αθροίσματος – διαφοράς

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+5)^2$ **β.** $(x-3)^2$ **γ.** $(3x+2)^2$

δ. $(x^2-1)^2$ **ε.** $\left(2y^3+\frac{1}{2}\right)^2$ **στ.** $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2$

Λύση

α. Παρατηρούμε ότι το $(x+5)^2$ είναι της μορφής $(\alpha+\beta)^2$.

Οπότε εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2, \text{ για } \alpha=x \text{ και } \beta=5$$

Είναι

$$\begin{aligned}(x+5)^2&=x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2\\&=x^2+10x+25\end{aligned}$$

β. Παρατηρούμε ότι το $(x-3)^2$ είναι της μορφής $(\alpha-\beta)^2$.

Οπότε εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2, \text{ για } \alpha=x \text{ και } \beta=3$$

Είναι

$$\begin{aligned}(x-3)^2&=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2\\&=x^2-6x+9\end{aligned}$$

γ. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, για $\alpha=3x$ και $\beta=2$.

Είναι $(3x+2)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2+2^2$

$$=9x^2+12x+4$$

δ. $(x^2-1)^2=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 1+1^2=x^4-2x^2+1$

ε. $\left(2y^3+\frac{1}{2}\right)^2=\left(2y^3\right)^2+2\cdot 2y^3\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=4y^6+2y^3+\frac{1}{4}$

στ. $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{x^2}{4}-1+\frac{1}{x^2}$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$ **β.** $(2\sqrt{3}-1)^2$

Λύση

Είναι:

α. $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$

$=2+2\sqrt{2\cdot 5}+5$

$=7+2\sqrt{10}$

β. $(2\sqrt{3}-1)^2=(2\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1+1^2$

$=4(\sqrt{3})^2-4\sqrt{3}+1$

$=4\cdot 3-4\sqrt{3}+1=12-4\sqrt{3}+1$

$=13-4\sqrt{3}$

Αναπτύγματα των $(-\alpha-\beta)^2$ και $(-\alpha+\beta)^2$

Ισχύει ότι $(-x)^2=x^2$. Οπότε:

- $(-\alpha-\beta)^2=[-(\alpha+\beta)]^2=(\alpha+\beta)^2$
- $(-\alpha+\beta)^2=[-(\alpha-\beta)]^2=(\alpha-\beta)^2$

Άρα:
- $(-x-3)^2=(x+3)^2=x^2+6x+9$
- $(-x+1)^2=(x-1)^2=x^2-2x+1$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(-3x-5)^2$ **β.** $(-x^2+1)^2$ **γ.** $(5-x)^2$

Λύση

Είναι:

α. $(-3x-5)^2=(3x+5)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5+5^2$

$=9x^2+30x+25$

β. $(-x^2+1)^2=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$

γ. $(5-x)^2=(x-5)^2=x^2-10x+25$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\mathbf{1-3x(2x-1)-(x-3)^2}$ **β.** $\mathbf{x-(x-1)(3x-2)-(3x-1)^2}$

Λύση

Είναι:

α. $1-3x(2x-1)-(x-3)^2 = 1-6x^2+3x-(x^2-6x+9)$

$$= 1-6x^2+3x-x^2+6x-9$$

$$= -7x^2+9x-8$$

β. $x-(x-1)(3x-2)-(3x-1)^2 = x-(3x^2-2x-3x+2)-[(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 1+1^2]$

$$= x-(3x^2-5x+2)-(9x^2-6x+1)$$

$$= x-3x^2+5x-2-9x^2+6x-1$$

$$= -12x^2+12x-3$$

5. Να αποδείξετε ότι: **α.** $\mathbf{(x-3y)^2-(3x-y)^2+8x^2=8y^2}$

β. $\mathbf{(x^2-4)\cdot(\alpha^2-1)+(x-2\alpha)^2=(\alpha x-2)^2}$

Λύση

Είναι:

α. $(x-3y)^2-(3x-y)^2+8x^2 = x^2-6xy+9y^2-(9x^2-6xy+y^2)+8x^2$

$$= x^2-6xy+9y^2-9x^2+6xy-y^2+8x^2$$

$$= 8y^2$$

β. • $(x^2-4)\cdot(\alpha^2-1)+(x-2\alpha)^2 = x^2\alpha^2-x^2-4\alpha^2+4+x^2-4\alpha x+4\alpha^2$

$$= \alpha^2x^2-4\alpha x+4$$

• $(\alpha x-2)^2 = \alpha^2x^2-4\alpha x+4$

Άρα η δοσμένη ισότητα ισχύει.

6. Να συμπληρώσετε την ισότητα $\mathbf{(3x\cdots\ldots)^2=\ldots\ldots-\ldots\ldots+25}$ **.**

Λύση

Τη δοσμένη ισότητα θα τη συμπληρώσουμε σύμφωνα με την ταυτότητα

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

Έχουμε: $\alpha=3x$ και $\beta^2=25$, οπότε $\beta=5$.

Άρα η ισότητα συμπληρώνεται ως εξής $(3x-5)^2=9x^2-30x+25$.

Β. Κύβος αθροίσματος – διαφοράς

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+5)^3$ **β.** $(2x-1)^3$ **γ.** $(3x^2-2)^3$

Λύση

α. Παρατηρούμε ότι το $(x+5)^3$ έχει τη μορφή $(\alpha+\beta)^3$.

Οπότε εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2+\beta^3$, για $\alpha = x$ και $\beta = 5$ και έχουμε

$$(x+5)^3 = x^3 + 3x^2\cdot 5 + 3x\cdot 5^2+5^3 = x^3+15x^2+75x+125$$

β. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ για $\alpha = 2x$, $\beta = 1$ και έχουμε

$$\begin{aligned}(2x-1)^3 &= (2x)^3-3(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2-1^3\\ &= 8x^3-3\cdot 4x^2+6x-1\\ &= 8x^3-12x^2+6x-1\end{aligned}$$

γ. Είναι $$\begin{aligned}(3x^2-2)^3 &= (3x^2)^3-3\cdot(3x^2)^2\cdot 2+3\cdot 3x^2\cdot 2^2-2^3\\ &= 27x^6-6\cdot 9x^4+9x^2\cdot 4-8\\ &= 27x^6-54x^4+36x^2-8\end{aligned}$$

Σχόλιο

Ισχύει ότι $(-\mathbf{x})^3 = -\mathbf{x}^3$. Οπότε:

- $(-\alpha-\beta)^3 = [-(\alpha+\beta)]^3 = -(\alpha+\beta)^3$
- $(-\alpha+\beta)^3 = (\beta-\alpha)^3$

8. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(-x-4)^3$ **β.** $(-5+x)^3$

Λύση

Είναι:

α. $(-x-4)^3 = -(x+4)^3 = -(x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+4^3)$

$$= -(x^3+12x^2+48x+64) = -x^3-12x^3-48x-64$$

β. $(-5+x)^3 = (x-5)^3 = x^3-3\cdot x^2\cdot 5+3\cdot x\cdot 5^2-5^3 = x^3-15x^2+75x-125$

Γ. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

9. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+1)\cdot(x-1)$ **β.** $(2x+7)\cdot(2x-7)$ **γ.** $(4x-9y)\cdot(4x+9y)$

δ. $(x^2-4)\cdot(x^2+4)$ **ε.** $\left(5x^3+\dfrac{3y}{2}\right)\cdot\left(5x^3-\dfrac{3y}{2}\right)$

στ. $(11x^2y-12\omega^3)\cdot(11x^2y+12\omega^3)$

Λύση

α. Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $(x+1)\cdot(x-1)$ είναι της μορφής $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$.

Οπότε εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2 \;,\; \text{για}\;\; \alpha=x \;\;\text{και}\;\; \beta=1$$

Είναι $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2$

$= x^2-1$

β. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2 \;\; \text{για}\;\; \alpha=2x \;\;\text{και}\;\; \beta=7$$

Είναι $(2x+7)\cdot(2x-7)=(2x)^2-7^2$

$= 4x^2-49$

γ. $(4x-9y)\cdot(4x+9y)=(4x)^2-(9y)^2$

$=16x^2-81y^2$

δ. $(x^2-4)(x^2+4)=(x^2)^2-4^2$

$=x^4-16$

ε. $\left(5x^3+\dfrac{3y}{2}\right)\left(5x^3-\dfrac{3y}{2}\right)=(5x^3)^2-\left(\dfrac{3y}{2}\right)^2=25x^6-\dfrac{9y^2}{4}$

στ. $(11x^2y-12\omega^3)(11x^2y+12\omega^3)=(11x^2y)^2-(12\omega^3)^2$

$=121x^4y^2-144\omega^6$

10. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x-3)\cdot(3+x)$ **β.** $(x-y)\cdot(-x-y)$ **γ.** $(-x+2)\cdot(-x-2)$

Λύση

Είναι:

α. $(x-3)\cdot(3+x)=(x-3)\cdot(x+3)$

$$=x^2-3^2$$

$$=x^2-9$$

β. $(x-y)\cdot(-x-y)=(x-y)\cdot[-(x+y)]$

$$=-(x-y)\cdot(x+y)$$

$$=-(x^2-y^2)$$

$$=-x^2+y^2$$

γ. $(-x+2)\cdot(-x-2)=-(x-2)\cdot[-(x+2)]$

$$=(x-2)\cdot(x+2)$$

$$=x^2-4$$

11. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ **β.** $(1-2\sqrt{3})\cdot(1+2\sqrt{3})$

γ. $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

Λύση

Είναι:

α. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$$=3-2=1$$

β. $(1-2\sqrt{3})\cdot(1+2\sqrt{3})=1^2-(2\sqrt{3})^2$

$$=1-4\cdot3=-11$$

γ. $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{2^2-(\sqrt{3})^2}$

$$=\frac{1}{4-3}=\frac{1}{1}=1$$

Συζυγείς παραστάσεις

Είναι

$$\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2-\left(\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha-\beta \qquad (1)$$

Τις παραστάσεις $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ τις λέμε **συζυγείς** παραστάσεις και την καθεμιά από αυτές συζυγή της άλλης.

Για παράδειγμα οι συζυγείς παραστάσεις των:

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}\ ,\ \ 3+\sqrt{5}\ ,\ \ 2\sqrt{3}-1$$

είναι αντίστοιχα οι:

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}\ ,\ \ 3-\sqrt{5}\ ,\ \ 2\sqrt{3}+1$$

Την ισότητα (1) τη χρησιμοποιούμε για να μετατρέπουμε κλάσματα της μορφής $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$ σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή.

Δηλαδή

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})\cdot(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{(\sqrt{\alpha})^2-(\sqrt{\beta})^2}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}$$

12. **Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή.**

α. $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$ **β.** $\dfrac{1}{1-2\sqrt{3}}$

Λύση

[*Πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή*].

Έχουμε:

α. $$\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2\cdot(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})}=\frac{2\cdot(3-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{2\cdot(3-\sqrt{5})}{9-5}$$

$$=\frac{2\cdot(3-\sqrt{5})}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

β. $$\frac{1}{1-2\sqrt{3}}=\frac{1+2\sqrt{3}}{\left(1-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+2\sqrt{3}\right)}=\frac{1+2\sqrt{3}}{1^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1+2\sqrt{3}}{1-12}=\frac{1+2\sqrt{3}}{-11}=-\frac{2\sqrt{3}+1}{11}$$

13. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)$ **β.** $(x-2)^2\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+4)^2$

Λύση

α. Πολλαπλασιάζουμε πρώτα το $(x-1)$ με το $(x+1)$ και το γινόμενο που βρίσκουμε το πολλαπλασιάζουμε με το (x^2+1). Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Είναι

$$\begin{aligned}(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) &= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)\\ &= (x^4-1)(x^4+1)\\ &= x^8-1\end{aligned}$$

β. Είναι

$$\begin{aligned}(x-2)^2(x+2)^2(x^2+4)^2 &= [(x-2)(x+2)]^2(x^2+4)^2\\ &= (x^2-4)^2(x^2+4)^2 = [(x^2-4)(x^2+4)]^2\\ &= (x^4-16)^2\\ &= x^8-32x^4+256\end{aligned}$$

14. Δίνεται το πολυώνυμο

$$\mathbf{P(x)=(2x-1)^2-3(x-2)(x+2)+4x-13}$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathbf{A=\sqrt{P(2017)}}$.

Λύση

Είναι:

- $$\begin{aligned}P(x) &= (2x-1)^2-3(x-2)(x+2)+4x-13\\ &= 4x^2-4x+1-3(x^2-4)+4x-13\\ &= 4x^2-4x+1-3x^2+12+4x-13\\ &= x^2\end{aligned}$$
- $A=\sqrt{P(2017)}=\sqrt{2017^2}=2017$

Δ. Διαφορά κύβων – Άθροισμα κύβων

15. **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

α. $(x+3)\cdot(x^2-3x+9)$ **β.** $(2y-1)\cdot(4y^2+2y+1)$

Λύση

α. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\beta^3$$

για $\alpha = x$, $\beta = 3$ και έχουμε

$$\begin{aligned}(x+3)\cdot(x^2-3x+9) &= (x+3)\cdot(x^2-x\cdot 3+3^2)\\ &= x^3+3^3 = x^3+27\end{aligned}$$

β. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\beta^3$$

για $\alpha = 2y$, $\beta = 1$ και έχουμε

$$\begin{aligned}(2y-1)\cdot(4y^2+2y+1) &= (2y-1)\cdot[(2y)^2+2y\cdot 1+1^2]\\ &= (2y)^3-1^3 = 8y^3-1\end{aligned}$$

Ε. Τετράγωνο τριωνύμου

16. **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

α. $(3x+y+2)^2$ **β.** $(x^2-3x+1)^2$

Λύση

α. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

για $\alpha=3x$, $\beta=y$ και $\gamma=2$ και έχουμε

$$\begin{aligned}(3x+y+2)^2 &= (3x)^2+y^2+2^2+2\cdot 3x\cdot y+2\cdot y\cdot 2+2\cdot 2\cdot 3x\\ &= 9x^2+y^2+4+6xy+4y+12x\\ &= 9x^2+y^2+6xy+12x+4y+4\end{aligned}$$

β. Είναι

$$\begin{aligned}(x^2-3x+1)^2 &= (x^2)^2+(3x)^2+1^2-2x^2\cdot 3x-2\cdot 3x\cdot 1+2\cdot 1\cdot x^2\\ &= x^4+9x^2+1-6x^3-6x+2x^2\\ &= x^4-6x^3+11x^2-6x+1\end{aligned}$$

ΣΤ. Γινόμενο της μορφής: (x+α) (x+β)

17. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(x+4)\cdot(x-6)$ **β.** $(x+3)\cdot(x+5)-(x-1)\cdot(x-6)$

Λύση

α. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$(x+\alpha)\cdot(x+\beta) = x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

για $\alpha = 4$ και $\beta = -6$

Άρα $(x+4)\cdot(x-6) = x^2+(4-6)x+4\cdot(-6)$

$= x^2-2x-24$

β. $(x+3)\cdot(x+5)-(x-1)\cdot(x-6) = x^2+8x+15-(x^2-7x+6)$

$= x^2+8x+15-x^2+7x-6$

$= 15x+9$

Ζ. Εφαρμογές αξιοσημείωτων ταυτοτήτων

18. Αν $\alpha+\beta = -1$ και $\alpha\beta = -2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $\alpha^2+\beta^2$ **β.** $\alpha^3+\beta^3$ **γ.** $(\alpha-\beta)^2$

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

Για $\alpha+\beta=-1$ και $\alpha\beta=-2$, έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = (-1)^2-2\cdot(-2) = 5$$

β. Γνωρίζουμε ότι

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

Για $\alpha+\beta=-1$ και $\alpha\beta=-2$, έχουμε

$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) = (-1)^3-3\cdot(-2)\cdot(-1) = -7$$

γ. Είναι $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$

$=5-2\cdot(-2)=9$ (είναι $\alpha^2+\beta^2=5$ από το ερώτημα **α.**)

19. Αν $x-\dfrac{1}{x}=-2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ **β.** $x^3-\dfrac{1}{x^3}$

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$. Για $\alpha=x$ και $\beta=\dfrac{1}{x}$, έχουμε

$$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}=(-2)^2+2=6$$

β. Γνωρίζουμε ότι $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$.

Για $\alpha=x$ και $\beta=\dfrac{1}{x}$, έχουμε

$$x^3-\frac{1}{x^3}=x^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)=(-2)^3+3(-2)=-14$$

Η. Υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων με εφαρμογή των ταυτοτήτων

20. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. 99^2 **β.** $1002\cdot 998$

Λύση

Είναι:

α. $99^2=(100-1)^2=100^2-2\cdot100\cdot1+1=10000-200+1=9.801$

β. $1002\cdot998=(1000+2)(1000-2)=1000^2-2^2=1.000.000-4=999.996$

21. α. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+2)^2-4(\alpha+1)=\alpha^2$.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A=\sqrt{1002^2-4004}$.

Λύση

Είναι:

α. $(\alpha+2)^2-4(\alpha+1)=\alpha^2+4\alpha+4-4\alpha-4=\alpha^2$

β. $A=\sqrt{1002^2-4004}=\sqrt{(1000+2)^2-4\cdot1001}=\sqrt{(1000+2)^2-4(1000+1)}$

Σύμφωνα με την ισότητα του προηγούμενου ερωτήματος για $\alpha=1000$ έχουμε

$$A=\sqrt{1000^2}=1000$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Τετράγωνο αθροίσματος – διαφοράς

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

α. $(\alpha+\beta)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **β.** $(\alpha-\beta)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

α. $(x+3)^2 = \dots^2 + 2\cdot\dots\cdot\dots + \dots^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

β. $(x-5)^2 = \dots^2 \dots 2\cdot x\cdot 5 \dots 5^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

γ. $(2x-7)^2 = (2x)^{\cdots} - \dots\cdot\dots\cdot\dots + \dots^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α. $(x+2)^2 = x^2 + 2^2$

β. $(x-3)^2 = x^2 - 2x\cdot 3 - 3^2$

γ. $(5x-3)^2 = 5x^2 - 2\cdot 5x\cdot 3 + 3^2$

α.	
β.	
γ.	

Β. Κύβος αθροίσματος – διαφοράς

4. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

α. $(\alpha+\beta)^3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **β.** $(\alpha-\beta)^3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

5. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

α. $(x+2)^3 = \dots^3 + 3\cdot\dots^2\cdot\dots + 3\cdot\dots\cdot\dots^2 + \dots^3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

β. $(x-5)^3 = x^{\cdots} \dots 3\cdot\dots\cdot 5 \dots 3\cdot x\cdot 5^{\cdots} \dots 5^{\cdots} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

6. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3$

β. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + \beta^3$

γ. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

α.	
β.	
γ.	

Γ. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

7. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

α. $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=$ ………………… **β.** $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=$ …………………

γ. $(\beta+\alpha)\cdot(\alpha-\beta)=$ …………………

8. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

α. $(x+10)\cdot(x-10)=\ldots^2-\ldots^2=$ ……………

β. $(x-8)\cdot(x+8)=\ldots^2-\ldots^2=$ ……………

γ. $(x+1)\cdot(1-x)=\ldots^2-\ldots^2=$ ……………

δ. $(5x+7)\cdot(5x-7)=(\ldots)^2-\ldots^2=$ …………………

9. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α. $(\alpha+\beta)\cdot(\beta-\alpha)=\alpha^2-\beta^2$

β. $(5-x)\cdot(x+5)=5^2-x^2$

γ. $(3x-2)\cdot(3x+2)=3x^2-2^2$

α.	
β.	
γ.	

10. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να εκφράζουν τις εφαρμογές των αξιοσημείωτων ταυτοτήτων.

α. $\alpha^2+\beta^2=$ ……………………… $=$ ………………………

β. $\alpha^3+\beta^3=$ ……………………… **γ.** $\alpha^3-\beta^3=$ ………………………

11. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το ανάπτυγμά της από την στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $(\alpha-\beta)^2$	**1.** $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
β. $(\alpha+\beta)^3$	**2.** $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
γ. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)$	**3.** $\alpha^2-\beta^2$
δ. $(\alpha+\beta)^2$	**4.** $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
ε. $(\alpha-\beta)^3$	**5.** $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

α.	
β.	
γ.	
δ.	
ε.	

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Α. Τετράγωνο αθροίσματος – διαφοράς

12. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+y)^2$ **β.** $(x+7)^2$ **γ.** $(y+1)^2$

δ. $(x-5)^2$ **ε.** $(y-1)^2$ **στ.** $(\lambda-11)^2$

13. Να βρείτε τα αναπτύγματα

α. $(2x+3)^2$ **β.** $(5x-1)^2$ **γ.** $(7y-4)^2$

δ. $(2x+3y)^2$ **ε.** $(3xy-5)^2$ **στ.** $(13\alpha\beta-2)^2$

14. Να βρείτε τα αναπτύγματα

α. $(x^2-3)^2$ **β.** $(x^3+1)^2$ **γ.** $(3x^2-2)^2$

δ. $(xy^2-5x)^2$ **ε.** $(3\alpha^2\beta-2\beta)^2$ **στ.** $(5x^3y^2-3x^2y)^2$

15. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ **β.** $\left(\frac{\omega}{2}-1\right)^2$ **γ.** $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2$

δ. $\left(5x^2-\frac{1}{2}\right)^2$ **ε.** $\left(\frac{\lambda}{3}+\frac{3}{2}\right)^2$ **στ.** $\left(\frac{2x}{3}-\frac{y^2}{2}\right)^2$

ζ. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ **η.** $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ **θ.** $\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)^2$

16. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(5+\sqrt{2})^2$ **β.** $(\sqrt{7}-1)^2$ **γ.** $(3\sqrt{5}-2)^2$

δ. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$ **ε.** $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2$ **στ.** $(\sqrt{2}x-\sqrt{6})^2$

17. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(-x-y)^2$ **β.** $(-2x-3)^2$ **γ.** $(-5\alpha-\alpha^2)^2$

δ. $(-x+1)^2$ **ε.** $(-3+x)^2$ **στ.** $(7-x)^2$

18. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $5x-(x-3)^2$ **β.** $(3x-2)^2-2x(x-1)$

γ. $3x(x-2)-(x-1)^2$ **δ.** $3x^2-(2x-7)^2$

ε. $(7x-2)^2-(2x-3)\cdot(x-5)$ **στ.** $(2x-1)\cdot(x-2)-(3x-5)^2$

19. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $2x^3-3x(x-1)^2$ **β.** $1+2x(x-3)^2$ **γ.** $x-3x(2x-1)^2$

δ. $x^2-(2x-1)\cdot(x+1)^2$ **ε.** $x^5y^4-(xy^2-1)\cdot(x^2y-2)^2+3$

20. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α. $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$ **β.** $4\alpha(\alpha-1)-(2\alpha-1)^2 = -1$

γ. $(2x-1)^2-3x(x-1)+3x=(x+1)^2$ **δ.** $(x^2-1)\cdot(\alpha^2-9)+(3x-\alpha)^2=(\alpha x-3)^2$

21. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α. $(x \cdots \ldots)^2 = \ldots + \ldots + 25$ **β.** $(\ldots \cdots 3)^2 = \omega^2 - \ldots\ldots \cdots \ldots\ldots$

γ. $(\ldots+\ldots)^2 = 9x^2 \cdots 12xy \cdots \ldots$ **δ.** $(\ldots \cdots 3\alpha)^2 = \ldots - 30x^2\alpha \cdots \ldots$

Β. Κύβος αθροίσματος – διαφοράς

22. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+2)^3$ **β.** $(x-3)^3$ **γ.** $(x-1)^3$

δ. $(2x+1)^3$ **ε.** $(x^2-5)^3$ **στ.** $\left(x-\frac{1}{3}\right)^3$

ζ. $(x^2+2x)^3$ **η.** $(2x^2-1)^3$ **θ.** $(3\alpha^2\beta-2\alpha\beta^3)^3$

23. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $(\sqrt{2}+1)^3$ **β.** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$

24. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(-x-2)^3$ **β.** $(-3x-4)^3$ **γ.** $(-1+x)^3$

25. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $x^3-(x-1)^3-3x(x-2)$ **β.** $1-(3x-1)^3-(x-1)\cdot(3x-2)$

γ. $-10x^2+2(x+3)^3-(2x-1)^2$ **δ.** $(x-2)^3-x(x-2)(x-3)$

26. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α. $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3-6\alpha^2\beta = 2\beta^3$ **β.** $2\alpha(2\alpha-1)^2-(2\alpha-1)^3-4\alpha^2 = 1-4\alpha$

Γ. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

27. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+y)\cdot(x-y)$ **β.** $(x+3)\cdot(x-3)$ **γ.** $(y-1)\cdot(y+1)$

δ. $(\lambda+7)\cdot(\lambda-7)$ **ε.** $(9-x)\cdot(9+x)$ **στ.** $(x+13)\cdot(x-13)$

28. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(5x-1)\cdot(5x+1)$ **β.** $(7x-9)\cdot(7x+9)$ **γ.** $(4x+11)\cdot(4x-11)$

δ. $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$ **ε.** $(9\lambda-5\mu)\cdot(9\lambda+5\mu)$ **στ.** $(7x+5y)\cdot(7x-5y)$

29. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x^2-y^3)\cdot(x^2+y^3)$ **β.** $(3x^2-5)\cdot(3x^2+5)$

γ. $(7x^3+9y)\cdot(7x^3-9y)$ **δ.** $(3x^2y+2y)\cdot(3x^2y-2y)$

ε. $(2xy^3-5xy^2)\cdot(2xy^3+5xy^2)$ **στ.** $(9x^2y^3-2xy)\cdot(9x^2y^3+2xy)$

30. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)$ **β.** $\left(3x-\frac{2y}{5}\right)\cdot\left(3x+\frac{2y}{5}\right)$ **γ.** $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{7y}{4}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{3}+\frac{7y}{4}\right)$

31. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x-5)\cdot(5+x)$ **β.** $(3+x)\cdot(x-3)$ **γ.** $(7x+1)\cdot(1-7x)$

δ. $(-x+6)\cdot(x+6)$ **ε.** $(3x-1)\cdot(-1-3x)$ **στ.** $(-2x+5)\cdot(-2x-5)$

32. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ **β.** $(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})$

γ. $(3\sqrt{2}-1)\cdot(3\sqrt{2}+1)$ **δ.** $(\sqrt{5}x-3)\cdot(\sqrt{5}x+3)$

33. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **β.** $\frac{3}{\sqrt{2}+1}$ **γ.** $\frac{17}{1-3\sqrt{2}}$ **δ.** $\frac{6}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

34. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)$ **β.** $(3x-1)\cdot(3x+1)\cdot(9x^2+1)$

γ. $(2x^2-3)\cdot(2x^2+3)\cdot(4x^4+9)$ **δ.** $(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)\cdot(x+1)$

ε. $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)$ **στ.** $(2x-1)\cdot(2x+1)\cdot(4x^2+1)\cdot(16x^4+1)$

35. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $(x-3)^2\cdot(x+3)^2$ **β.** $(x-2)^3\cdot(x+2)^3$ **γ.** $(x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot(x^2+1)^2$

36. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $1-(x-1)\cdot(x+1)$ **β.** $5+(x-7)\cdot(x+7)$

γ. $1-3x\cdot(2x-1)-(3x-1)\cdot(3x+1)$ **δ.** $2x^2-(x-4)^2-(x-2)\cdot(2+x)$

ε. $1-(x-5)\cdot(x+5)-(2x-1)^2$ **στ.** $6y^2+2y(3y+1)\cdot(1-3y)$

ζ. $1-3x(2x-1)-(3-x)\cdot(-x-3)$ **η.** $(3x+2)^2-(2x+5)\cdot(2x-5)-(2x-1)^2$

37. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(3x-2)^2-2(2x-1)\cdot(2x+1)-4(1-3x)-2$.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\sqrt{P(1973)}$.

38. Να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)-(2\alpha-\beta)\cdot(2\alpha+\beta)+3\alpha^2 = 0$

β. $\alpha(1+\alpha)\cdot(\alpha-1)-(\alpha-1)^2-\alpha^3 = -1-\alpha(\alpha-1)$

γ. $(\alpha-1)^3-(\alpha-1)(\alpha+1)^2+4\alpha(\alpha-1)=0$

δ. $(\alpha-1)(\alpha+1)^3-2\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)=\alpha^4-1$

ε. $(2\alpha^2-1)^3-2(2\alpha^3-1)\cdot(1+2\alpha^3)-1 = -6\alpha^2(2\alpha^2-1)$

Δ. Διαφορά κύβων – Άθροισμα κύβων

39. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x+2)\cdot(x^2-2x+4)$ **β.** $(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

γ. $(3\omega+1)\cdot(9\omega^2-3\omega+1)$ **δ.** $(1-xy)\cdot(1+xy+x^2y^2)$

Ε. Τετράγωνο τριωνύμου

40. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x^2+x+1)^2$ **β.** $(x^2+3x+2)^2$ **γ.** $(x+2y-z)^2$

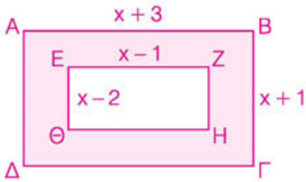
δ. $(3x^2-x+1)^2$ **ε.** $(2\alpha-\beta-3\gamma)^2$

ΣΤ. Γινόμενο: $(x+\alpha)\cdot(x+\beta)$

41. **α.** Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα.

$(x+\alpha)\cdot(x+\beta)$	$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
$(x+1)\cdot(x+3)$	
$(x+3)\cdot(x-1)$	
$(x+3)\cdot(x-4)$	
$(x-2)\cdot(x-1)$	

β. Να εκφράσετε με ένα πολυώνυμο το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου στο διπλανό σχήμα.



42. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(x+3)\cdot(x+2)$ **β.** $(x-5)\cdot(x+3)$

γ. $(x-2)\cdot(x-1)-(x-3)\cdot(x+2)$ **δ.** $(x^2-3)\cdot(x^2+2)$

Ζ. Εφαρμογές αξιοσημείωτων ταυτοτήτων

43. Αν $\alpha+\beta=-2$ και $\alpha\beta=-3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $\alpha^2+\beta^2$ **β.** $\alpha^3+\beta^3$ **γ.** $(\alpha-\beta)^2$

44. Αν $x-y=3$ και $xy=-2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. x^2+y^2 **β.** x^3-y^3 **γ.** $(x+y)^2$

45. Αν $\alpha-\beta=2$ και $\alpha\beta=3$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$K=\alpha^2(\alpha+1)-\beta^2(\beta-1)$$

46. Αν $x+\frac{1}{x}=3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2+\frac{1}{x^2}$ **β.** $x^3+\frac{1}{x^3}$ **γ.** $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

47. Αν $x-\frac{1}{x}=1$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2+\frac{1}{x^2}$ **β.** $x^3-\frac{1}{x^3}$ **γ.** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

Η. Υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων με εφαρμογή των ταυτοτήτων

48. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις με εφαρμογή κατάλληλων ταυτοτήτων.

α. 98^2 **β.** $101 \cdot 99$

49. **α.** Να κάνετε τις πράξεις $(x-4)^2-(x-2)\cdot(x-8)$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 9996^2 - 9998 \cdot 9992$.

50. **α.** Να δείξετε ότι $(\nu-2)\cdot(\nu+2)+4 = \nu^2$.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \sqrt{998 \cdot 1002 + 4}$.

51. **α.** Να κάνετε τις πράξεις $\alpha(\alpha-2)-(\alpha-1)^2$.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = 2019 \cdot 2017 - 2018^2$.

52. **α.** Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$.

β. Να δείξετε ότι $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

53. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $\left(\sqrt{3}+2\right)^2, \quad \left(\sqrt{3}-2\right)^2$ **β.** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

54. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$ **β.** $B = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{10}} \cdot \sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{10}}$

γ. $\Gamma = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$

55. **α.** Να γράψετε την παράσταση $A = \sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{200}+\sqrt{50}$ στη μορφή $\alpha+\beta\sqrt{2}$, όπου α, β ακέραιοι.

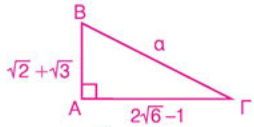
β. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(4+3\sqrt{2})^2$ **ii.** $(4-3\sqrt{2})\cdot(4+3\sqrt{2})$

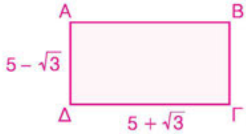
γ. Να μετατρέψετε την παράσταση $\dfrac{4+3\sqrt{2}}{A}$ σε ένα κλάσμα με παρονομαστή ρητό αριθμό.

Θ. Προβλήματα

56. Να υπολογίσετε την πλευρά α του ορθογωνίου τριγώνου του διπλανού σχήματος.



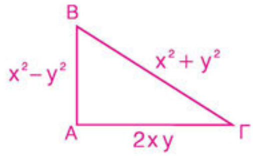
57. Στο διπλανό ορθογώνιο να βρείτε:



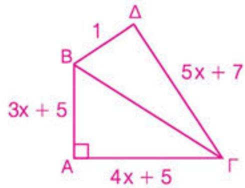
α. Το εμβαδόν του

β. Το μήκος της διαγωνίου του ΑΓ.

58. Αν $x > y$ και $y > 0$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο.



59. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



Ι. Γενικές

60. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι, να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = (x+2y)^2-(2x-y)^2+3x^2-3y^2$$

61. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)^2-(3x-2)^2-2x(5-4x)$ είναι σταθερό.

62. Αν $\alpha = x^2-yz$, $\beta = y^2-zx$ και $\gamma = z^2-xy$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2-\beta\gamma = x(\alpha x+\beta y+\gamma z)$$

63. Αν $P(x) = x^2-2x+1$, να βρείτε τα πολυώνυμα

$$Q(x) = P(2x-3) \quad \text{και} \quad R(x) = P(x^2-1)$$

64. **α.** Να δείξετε ότι: $\alpha(\alpha+1)\cdot(\alpha+2)\cdot(\alpha+3)+1 = (\alpha^2+3\alpha+1)^2$.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \sqrt{1+100\cdot 101\cdot 102\cdot 103}$.

65. **α.** Να αποδείξετε ότι: $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2 = 8$.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \left(2020+\dfrac{1}{1010}\right)^2-\left(2020-\dfrac{1}{1010}\right)^2$.

66. **α.** Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha-\beta)^2}{2} = \alpha\beta$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που έχει διαγώνιο $\delta = 5\ \text{cm}$ και οι διαστάσεις του α , β διαφέρουν κατά $1\ \text{cm}$.

67. Αν $x+y = 2\sqrt{2}$ και $x^2+y^2 = 8$, να δείξετε ότι η παράσταση $\sqrt{x^{2020}+y^{2020}}$ είναι φυσικός αριθμός.

68. Αν $x+y = 5$ και $x^3+y^3 = 95$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

$$A = x^2+y^2-xy \quad \text{και} \quad B = (x-y)^2$$

69. Αν $\alpha+\dfrac{1}{\alpha} = 2\sqrt{2}$, να υπολογίσετε την παράσταση $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha^3}$.

70. Έστω ότι ισχύει $x^2-3x+1=0$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $x+\dfrac{1}{x}$ **β.** $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ **γ.** $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

δ. $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ **ε.** $x^5+\dfrac{1}{x^5}$

71. Αν $x > 0$ και $x^2+\dfrac{1}{x^2} = 14$, να υπολογίσετε την παράσταση $x^5+\dfrac{1}{x^5}$.

72. **α.** Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = (x+y)^3-(x-y)^3-6x^2y-y^3$.

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 200.004^3-199.996^3-24\cdot 200.000^2-64$ είναι κύβος ακεραίου.

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε "Ο Ευκλείδης" 2008 - Α΄ Λυκείου

73. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

α. Βρείτε το πολυώνυμο $Q(x)=P(2x)-19P(-x)$.

β. Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν ισχύει ότι $Q(x)=3x(3x+2)^2$.

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε "Ο Ευκλείδης" 2015 – Γ΄ Γυμνασίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

74. Δίνονται τα πολυώνυμα:

- $A(x) = (x+3)^2 - 3x(x+2)$
- $B(x) = (x-1)(x+1) - (x-2)(x-3)$
- $\Gamma(x) = (x-2)^3 - x(x^2+12)$

α. Να γράψετε τα πολυώνυμα $A(x)$, $B(x)$ και $\Gamma(x)$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

β. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες ισχύει $A(-1) - \alpha = B(0)$.

γ. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{2}{B(2) - \sqrt{A(1)}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

75. Δίνονται τα πολυώνυμα:

- $A(x) = (3x-2)^2 - (2x-1)(2x+1)$
- $B(x) = (2x-1)^3 + x(-3x-2)(3x-2)$

α. Να δείξετε ότι $A(x) = 5x^2 - 12x + 5$ και $B(x) = -x^3 - 12x^2 + 10x - 1$.

β. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $B(x)$ για $x = -\dfrac{3}{2}$.

γ. Να δείξετε ότι

$$A(1-\sqrt{2}) = 8 + 2\sqrt{2}$$

76. Δίνονται τα πολυώνυμα:

- $A(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1) - (x^2-1)^2$
- $B(x) = 9x(3x^2+1) - (3x-1)^3 - 1$

α. Να αποδείξετε ότι $A(x) = 2x^2 - 2$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$99 \cdot 101 \cdot 10001 - 9999^2$$

γ. Να δείξετε ότι

$$\sqrt{B(2017)} = 6051\sqrt{3}$$

Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α΄ Λυκείου
- Γεωμετρία Α΄ Λυκείου
- Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
- Γεωμετρία Β΄ Λυκείου
- Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών
- Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας
- Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετ. Σπουδών – Οικον. & Πληρ. Τεύχη Α΄ & Β΄

ISBN: 978-618-82023-4-4

Λ.Τ. 21,70 €