

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Μαθηματικά

Γ' Λυκείου

Α' Τεύχος

Ομάδα προσανατολισμού

- Θετικών σπουδών
- Οικονομίας και Πληροφορικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ τάξης Λυκείου ομάδας προσανατολισμού Θετικών σπουδών και ομάδας προσανατολισμού σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.

Περιέχει:

- ✓ **Αναλυτική θεωρία.**
- ✓ **Παρατηρήσεις στη θεωρία**, στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ✓ **Μεθοδολογία** και **Σχόλια** για τη λύση ασκήσεων.
- ✓ **Λυμένες ασκήσεις**, ως υποδείγματα τρόπου λύσης.
- ✓ **Ασκήσεις για λύση.**
- ✓ **Επαναληπτικές Ασκήσεις** σε κάθε κεφάλαιο στο τέλος του βιβλίου
- ✓ **Διαγωνίσματα** ανά διδακτική ενότητα.
- ✓ **Υποδείξεις** και **Απαντήσεις** στις ασκήσεις για λύση.

Ευχαριστούμε όσους στήριξαν και στηρίζουν την προσπάθεια αυτή.

Ιούνιος 2018

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Συναρτήσεις	6
2. Γραφική παράσταση συνάρτησης	16
3. • Ίσες συναρτήσεις • Πράξεις με συναρτήσεις • Σύνθεση συναρτήσεων	34
4. Μονοτονία συνάρτησης	50
5. • Ακρότατα συνάρτησης • Άρτια – Περιττή συνάρτηση	70
6. Συνάρτηση $1 - 1$	84
7. Αντίστροφη συνάρτηση	96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

8. Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	118
9. Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$	156
10. Όριο Συνάρτησης στο άπειρο	172
11. Συνέχεια συνάρτησης	204
12. Θεώρημα του Bolzano	217
13. • Συνέπειες Θεωρήματος Bolzano • Πρόσημο συνάρτησης	232
14. • Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών • Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής • Σύνολο τιμών	246

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

15. Η έννοια της παραγώγου	272
16. • Παραγωγίσιμες συναρτήσεις • Παράγωγος συνάρτηση • Κανόνες παραγώγισης	290
17. Εφαπτομένη	328
18. Κανόνες De L' Hospital	346
19. Ρυθμός Μεταβολής	363
Επαναληπτικές ασκήσεις	384
Λύσεις - Απαντήσεις των Ασκήσεων για Λύση	399

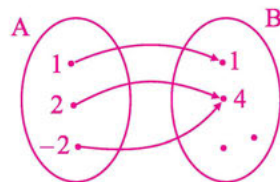
1

Συναρτήσεις

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Τον αριθμό 1 τον αντιστοιχίζουμε στον αριθμό $1^2 = 1$,
το 2 στο $2^2 = 4$, το -2 στο $(-2)^2 = 4$
και γενικά κάθε αριθμό x στο $x^2 = y$.

Ο κανόνας $(y = x^2)$, με τον οποίο κάθε αριθμός x
αντιστοιχίζεται στο τετράγωνό του, λέγεται *συνάρτηση*.



Ορισμός

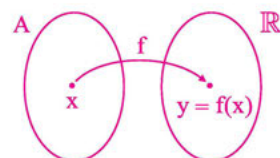
Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μία διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y .

Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$



- Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A , λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .
- Όταν θα λέμε ότι « **Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο B** », θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.
- Τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, τις λέμε και ρίζες της συνάρτησης f .

Σύνολο τιμών συνάρτησης

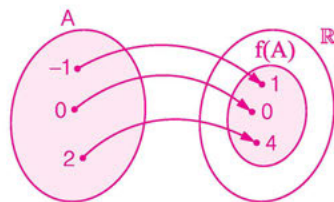
Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A = \{-1, 0, 2\}$

και $f(x) = x^2$.

Είναι $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ και $f(2) = 4$.

Το σύνολο $\{1, 0, 4\}$ που έχει ως στοιχεία τις τιμές της συνάρτησης, λέγεται **σύνολο τιμών** της f .

Γενικά:



Ορισμός

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση.

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$.

Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x), \text{ για κάποιο } x \in A\}$

Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B , τότε με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο τιμών της f , σε κάθε $x \in B$.

Είναι δηλαδή: $f(B) = \{y / y = f(x), \text{ για κάποιο } x \in B\}$

Είδη συναρτήσεων

- Αν μία συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ με } a_v, \dots, a_0 \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}^*,$$

τότε λέγεται **πολυωνυμική** συνάρτηση και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- Αν $f(x) = c$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f λέγεται **σταθερή** στο Δ με τιμή c .

Ειδικά, αν $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f λέγεται **μηδενική** στο Δ .

- Αν $f(x) = x$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f λέγεται **ταυτοτική** στο Δ .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Τιμές συνάρτησης

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + \alpha$ με $f(-1) = 1$.

α. Να βρείτε την τιμή του α .

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$. Έχουμε

$$f(-1) = 1 \Leftrightarrow (-1)^3 - (-1) + \alpha = 1 \Leftrightarrow -1 + 1 + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Άρα $\alpha = 1$.

β. Για $\alpha = 1$, είναι $f(x) = x^3 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow x^3 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \text{ ή } x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1 \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς: 0, 1 και -1.

2. Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + \alpha^2, & \text{αν } x < 3 \\ x - 3 + \beta^2, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, ισχύει $f(0) + f(3) = 0$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να υπολογίσετε τα α και β .

γ. Να βρείτε τις τιμές $f(\pi)$ και $f(e)$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη για $x < 3$ και για $x \geq 3$.

Οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = (-\infty, 3) \cup [3, +\infty) = \mathbb{R}$.

β. Επειδή: • $0 < 3$ έχουμε $f(0) = 2 \cdot 0 + \alpha^2 = \alpha^2$.

• $3 \geq 3$ έχουμε $f(3) = 3 - 3 + \beta^2 = \beta^2$.

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

Είναι $f(0) + f(3) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Άρα $\alpha = \beta = 0$.

γ. Για $\alpha = \beta = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 3 \\ x - 3, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$.

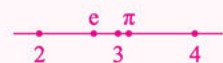
Επειδή: • $e < 3$ έχουμε $f(e) = 2e$

• $\pi > 3$ έχουμε $f(\pi) = \pi - 3$

Είναι: • $e \approx 2,7$

• $\pi \approx 3,14$

Οπότε $2 < e < 3 < \pi < 4$



B. Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Έστω οι πολυωνυμικές συναρτήσεις f και h .

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, έχουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς.

Συνάρτηση	Ονομασία	Περιορισμός
$g(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$	Ρητή	$f(x) \neq 0$
$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$	Άρρητη	$f(x) \geq 0$
$g(x) = \ln f(x)$	Λογαριθμική	$f(x) > 0$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

β. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$

γ. $f(x) = \sqrt{x-1}$

δ. $f(x) = \ln(x-1)$

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x , για τα οποία ισχύει

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

β. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$, εκτός από τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 > 0$ και ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$.

Άρα, η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

γ. Πρέπει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Άρα, η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [1, +\infty)$.

δ. Πρέπει $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (1, +\infty)$.

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$

β. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

γ. $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x , για τα οποία ισχύει:

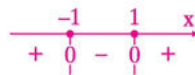
$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$



Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [1, 2]$.

β. Πρέπει $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Είναι:

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$



Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

γ. Πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ ή } x > 1$.

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$

β. $f(x) = \sqrt{\ln x}$

γ. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

Λύση

α. Πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

β. Πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$.

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [1, +\infty)$.

γ. Πρέπει $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a + \ln \frac{2x}{x+1}$, για την οποία ισχύει $f(1) = 0$.

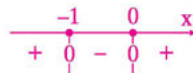
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την τιμή του a .

β. Να βρείτε τις ρίζες της f .

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν

$$\frac{2x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow 2x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 0$$



Άρα, η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

$$\text{Έχουμε } f(1) = 0 \Leftrightarrow a + \ln \frac{2 \cdot 1}{1+1} = 0 \Leftrightarrow a + \ln 1 = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

β. Για $a = 0$ έχουμε $f(x) = \ln \frac{2x}{x+1}$, $x \in A$.

Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{2x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα το 1.

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \ln(\sqrt{x-1} - x + 3)$$

Λύση

Πρέπει:

- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και
- $\sqrt{x-1} - x + 3 > 0$, (1)

Για $x \geq 1$, η (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} > x-3$, (2).

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x-3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$, τότε η (2) αληθεύει.
- Αν $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$, (3), τότε

$$\text{η (2)} \Leftrightarrow x-1 > (x-3)^2 \Leftrightarrow x-1 > x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) < 0$$

$$\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 3 < x < 5$$

Οπότε $x \in [1, 5)$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [1, 5)$.

B' ΟΜΑΔΑ

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , x \leq 1 \\ \ln(x-1) & , x > 1 \end{cases}$.

α. Να βρείτε τις τιμές:

i. $f(\eta\mu\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ii. $f(x^2+1)$, $x \neq 0$

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Λύση

α. i. Επειδή ισχύει $\eta\mu\alpha \leq 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε $f(\eta\mu\alpha) = 1 - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$.

ii. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 1$. Οπότε

$$f(x^2+1) = \ln(x^2+1-1) = \ln x^2 = \ln |x|^2 = 2 \ln |x| = \begin{cases} 2 \ln x & , x > 0 \\ 2 \ln(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

β. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x \leq 1$, τότε $f(x) = 1 - x^2$, οπότε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ που είναι δεκτές.}$$

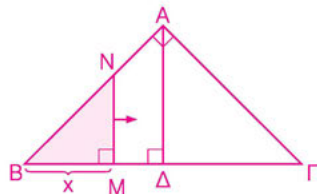
- Αν $x > 1$, τότε $f(x) = \ln(x-1)$, οπότε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ , που είναι δεκτή}$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 , 1 και 2 .

9. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 2\sqrt{2}$.

Να εκφράσετε το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = BM$, όταν το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$.



Λύση

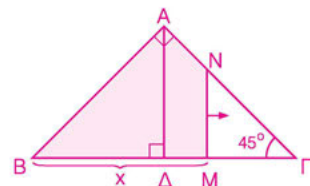
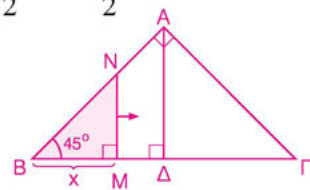
Είναι: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 16$, οπότε $B\Gamma = 4$ και $AD = DB = \Delta\Gamma = 2$.

- Αν $0 < x \leq 2$, τότε $E = E(x) = (BMN) = \frac{1}{2}(BM) \cdot (MN) = \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$.

- Αν $2 < x \leq 4$, τότε

$$\begin{aligned} E = E(x) &= (AB\Gamma) - (\Gamma MN) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2}(4-x)(4-x) \\ &= \frac{1}{2}(8x - x^2 - 8) \text{ , με } 2 < x \leq 4 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & , 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(8x - x^2 - 8) & , 2 < x \leq 4 \end{cases} .$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**Α. Τιμές συνάρτησης**

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 3x - 1$.
 - α. Να βρείτε τις τιμές: $f(-1)$ και $f(h-1)$.
 - β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x + 6$ με $f(1) = 0$ και $f(-2) = 12$.
 - α. Να βρείτε τις τιμές των a και β .
 - β. Να βρείτε την τιμή $f(h-1)$.
 - γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & -2 < x < 1 \\ x^2 - 4, & x \geq 1 \end{cases}$.
 - α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
 - β. Να βρείτε τις τιμές: $f(-1)$, $f(2)$ και $f(f(0))$.
 - γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha \ln x + \beta, & \text{αν } x > 0 \\ \alpha e^x - \beta, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$, με $f(0) = -1$ και $f(1) = 3$.
 - α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
 - β. Να βρείτε τις τιμές των α, β .
 - γ. Να βρείτε τις τιμές $f(e)$ και $f\left(\ln \frac{2}{3}\right)$.
 - δ. Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης f .

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{1 + e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f(x) + f(-x) = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Πεδίο ορισμού συνάρτησης

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

β. $f(x) = \sqrt{x-2}$

γ. $f(x) = \ln(x-2)$

δ. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-2}$

ε. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

στ. $f(x) = \ln(x^2-x+1)$

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}$

β. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{1-x}$

γ. $f(x) = \sqrt{1-x} + \ln x$

δ. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

ε. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

στ. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

β. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}-1}$

γ. $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$

δ. $f(x) = \sqrt{1-\ln x}$

ε. $f(x) = \ln(\ln x)$

στ. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{\ln x}{e^x - 1}$

β. $f(x) = \sqrt{e^x - 2}$

γ. $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$

δ. $f(x) = \ln \frac{e}{x}$

ε. $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

στ. $f(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)}$

10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$

β. $f(x) = \sqrt{x^3 - 2}$

γ. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

11. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x}{|x| - 1}$

β. $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$

γ. $f(x) = \frac{\ln(1 - |x|)}{|x| + 1}$

12. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

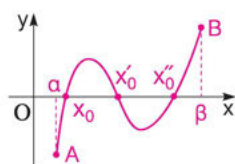
β. $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - x + 1)$

12

Θεώρημα του Bolzano

Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης στο $[a, \beta]$. Επειδή τα σημεία A, B βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$ η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο (a, β) . Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.



Έστω μία συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

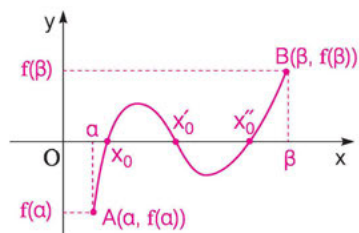
- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

- Δηλαδή, υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (a, β) .
- Δηλαδή, υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της συνάρτησης f στο (a, β) .

Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Bolzano

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και τα σημεία $A(a, f(a))$, $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ' ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, \beta)$.

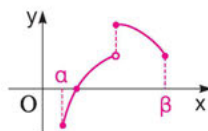


Παρατηρήσεις

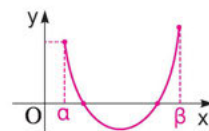
Το αντίστροφο του θεωρήματος του Bolzano, δεν ισχύει πάντοτε.

Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει ρίζα στο (a, β) , αλλά:

- δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ (σχ. 1.) ή
- δεν ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ (σχ. 2.)



σχ. 1.



σχ. 2.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Έγπαρξη ρίζας

1. Να αποδείξετε ότι:

- α. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.
- β. Η εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

α. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$.
- Είναι:
 - $f(0) = -1 < 0$
 - $f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1 > 0$

Οπότε $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Άρα, η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.

β. Επειδή για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$, η εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 1 = 0$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$x_0^2 + 3x_0 = e^{x_0} + 1.$$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$x_0^2 + 3x_0 - e^{x_0} - 1 = 0 \quad \text{ή ότι η εξίσωση } x^2 + 3x - e^x - 1 = 0$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$.
- Είναι: $f(0) = -2 < 0$ και $f(1) = 3 - e > 0$, οπότε $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - e^x - 1 = 0$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

3. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Λύση

Έχουμε $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$, οπότε $f(x) \in (0, 1) \Rightarrow 0 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (1).

Για $x \in (1, 2)$ είναι $f(x) = x - 1 \Leftrightarrow f(x) - x + 1 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι:
 - $g(1) = f(1) - 1 + 1 = f(1) > 0$, [αφού για $x = 1$, από την (1) έχουμε $0 < f(1) < 1 \Rightarrow f(1) > 0$]
 - $g(2) = f(2) - 2 + 1 = f(2) - 1 < 0$, [αφού για $x = 2$, από την (1) έχουμε $0 < f(2) < 1 \Rightarrow f(2) - 1 < 0$]

Οπότε $g(1) \cdot g(2) < 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x + 1 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, 2)$.

B. Έπαρξη ρίζας κλασματικών εξισώσεων

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^2+1}{x-1} = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Λύση

Για $x \in (1, 2)$, η εξίσωση $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^2+1}{x-1} = 0$ γράφεται ισοδύναμα

$$(x-1)e^x + (x-2)(x^2+1) = 0, \quad (1)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση (1) έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)e^x + (x-2)(x^2+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$.
- Είναι: $f(1) = -2 < 0$ και $f(2) = e^2 > 0$, οπότε $f(1) \cdot f(2) < 0$.

Επομένως, για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1, 2]$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$, οπότε και η (1) έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Γ. Μοναδική ρίζα

5. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$e^{x_0} + x_0 = 2$$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$e^x + x = 2 \Leftrightarrow e^x + x - 2 = 0 \quad , \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η $(1) \Leftrightarrow f(x) = 0$, (2) .

► Θα δείξουμε ότι η εξίσωση (2) έχει μία, το πολύ, ρίζα στο $(0, 1)$.

Βρίσκουμε το είδος της μονοτονίας της f στο $(0, 1)$.

Έστω $x_1, x_2 \in (0, 1)$ με $x_1 < x_2$.

Είναι $e^{x_1} < e^{x_2}$ και $x_1 - 2 < x_2 - 2$.

Οπότε

$$e^{x_1} + x_1 - 2 < e^{x_2} + x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα $f \uparrow (0, 1)$.

Επομένως, η εξίσωση (2) έχει μία, το πολύ, ρίζα στο $(0, 1)$.

► Θα δείξουμε ότι η εξίσωση (2) έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

- Είναι:

- $f(0) = -1 < 0$

- $f(1) = e + 1 - 2 = e - 1 > 0$

Οπότε $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση (2) έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$.

Άρα η εξίσωση (2) , οπότε και η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Δ. Ύπαρξη κοινού σημείου των C_f, C_g

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g στο διάστημα $(1, e)$ έχουν ένα, ακριβώς, κοινό σημείο.

Λύση

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$, (1)

έχει ακριβώς, μία, ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$. Οπότε η (1) $\Leftrightarrow h(x) = 0$, (2).

► Θα δείξουμε ότι η εξίσωση (2) έχει μία, το πολύ, ρίζα στο $(1, e)$.

Βρίσκουμε ότι $h \uparrow (1, e)$.

Οπότε η εξίσωση (2) έχει μία, το πολύ, ρίζα στο $(1, e)$.

► Θα δείξουμε ότι η εξίσωση (2) έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, e)$.

- Η h είναι συνεχής στο $[1, e]$

- Είναι $h(1) = -1 < 0$ και $h(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$, οπότε $h(1) \cdot h(e) < 0$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano, η εξίσωση (2) έχει, μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, e)$.

Άρα η εξίσωση (2), οπότε και η (1) έχει, μία, ακριβώς, ρίζα στο $(1, e)$.

Ε. Ύπαρξη δύο ριζών

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$, αφού:

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 0]$, $[0, 1]$.

- $f(-1) = -3$, $f(0) = 2$, $f(1) = -1$, οπότε $f(-1) \cdot f(0) < 0$ και $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$.

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

ΣΤ. Ύπαρξη ρίζας σε κλειστό διάστημα

- 8.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = [0, \ln 2]$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \ln(x_0 + 1)$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) - \ln(x_0 + 1) = 0$$

ή ότι η εξίσωση $f(x) - \ln(x + 1) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $[0, 1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \ln(x + 1), \quad x > -1$$

- Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ και $\ln(x + 1)$.
- Είναι:
 - $f(\mathbb{R}) = [0, \ln 2] \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \ln 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (1)
 - $g(0) = f(0) - \ln 1 = f(0) \geq 0$ [από την (1) για $x = 0$]
 - $g(1) = f(1) - \ln 2 \leq 0$ [από την (1) για $x = 1$]

Οπότε $g(0) \cdot g(1) \leq 0$.

- Αν $g(0) \cdot g(1) < 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση

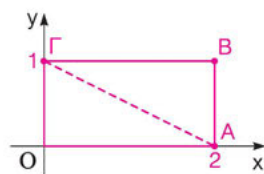
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \ln(x + 1) = 0$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$.

- Αν $g(0) \cdot g(1) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$, τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ρίζα το 0 ή το 1.

Άρα σε κάθε περίπτωση, η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \ln(x + 1) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα $x_0 \in [0, 1]$.

- 9.** Δίνεται το ορθογώνιο $OAB\Gamma$ του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο $[0, 2]$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται στο χωρίο που ορίζει το ορθογώνιο.



Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$.

Λύση

- Επειδή η C_f βρίσκεται στο χωρίο που ορίζει το ορθογώνιο, το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του $[0, 1]$. Είναι δηλαδή:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \quad \text{για κάθε } x \in [0, 2]$$

- Βρίσκουμε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$.

Είναι $\lambda_{\Lambda\Gamma} = \frac{y_{\Gamma} - y_{\Lambda}}{x_{\Gamma} - x_{\Lambda}} = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$ και

$$\Lambda\Gamma: y - y_{\Lambda} = \lambda_{\Lambda\Gamma}(x - x_{\Lambda})$$

Δηλαδή $\Lambda\Gamma: y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{2}x - 1 = 0$, (1)

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 2]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x - 1$, $x \in [0, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και ισχύει

$$g(0) = f(0) - 1 \leq 0, \quad g(2) = f(2) + \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = f(2) \geq 0, \quad \text{οπότε } g(0) \cdot g(2) \leq 0$$

- Αν $g(0) \cdot g(2) < 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.
- Αν $g(0) \cdot g(2) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0$ ή $g(2) = 0$, τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ρίζα το 0 ή το 2.

Επομένως σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $g(x) = 0$, οπότε και η (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 2]$.

Ζ. Πρόσημο τιμής της f από όριο

Σχόλιο

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell < 0$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^+ , τέτοιο, ώστε $f(\alpha) < 0$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell > 0$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^- , τέτοιο, ώστε $f(\alpha) > 0$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^+ , τέτοιο, ώστε $f(\alpha) < 0$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει α κοντά στο $-\infty$, τέτοιο, ώστε $f(\alpha) > 0$.

10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x-1}$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\ln x - \frac{1}{x-1} = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x-1}$, $x \in (0, 1)$ η οποία είναι συνεχής.

Είναι: • $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln x - \frac{1}{x-1} \right) = (-\infty) - \frac{1}{0-1} = -\infty$

Οπότε υπάρχει α κοντά στο 0^+ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) < 0$.



• $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\ln x - \frac{1}{x-1} \right) = 0 - (-\infty) = +\infty$

Οπότε υπάρχει $\beta > \alpha$ κοντά στο 1^- τέτοιο, ώστε $f(\beta) > 0$.



Επομένως $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. Επειδή η f είναι και συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subseteq (0, 1)$, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq (0, 1)$.

Β' ΟΜΑΔΑ

11. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $-1 < f(x) < 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f^2(x) = 2f(x) + 3x \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) - 3x = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - 2f(x) - 3x$, $x \in [0, 1]$.

• Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

• Είναι:

• $g(0) = f^2(0) - 2f(0) = f(0) \cdot (f(0) - 2)$

Από τη σχέση $-1 < f(x) < 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$, έχουμε:

$f(0) < 0 < 2$, οπότε $f(0) - 2 < 0$. Άρα $g(0) > 0$.

• $g(1) = f^2(1) - 2f(1) - 3$

Ο πίνακας προσήμων του τριωνύμου $\omega^2 - 2\omega - 3$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Επειδή $-1 < f(1) < 0$ είναι $g(1) < 0$.

ω	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$\omega^2-2\omega-3$	+	0	-	0	+

Άρα $g(0) \cdot g(1) < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) - 3x = 0$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Α. α. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

β. Να γράψετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει

$$f(a) \cdot f(\beta) < 0 ,$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

γ. Αν η f είναι ορισμένη στο $[a, \beta]$ με $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

δ. Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(a) f(\beta) < 0$.

ε. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) f(\beta) > 0$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

στ. Αν η f είναι ορισμένη στο $[a, \beta]$ με $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ και για κάθε $x \in (a, \beta)$ είναι $f(x) \neq 0$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.

Γ. Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) > 0$, τότε:

α. η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (a, β) .

β. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (a, β) .

γ. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (a, β) .

δ. δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (a, β) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Ύπαρξη ρίζας

2. Να αποδείξετε ότι:
 - α. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.
 - β. Η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$.
 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^x = 2 - x,$$
 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
 - α. $2x^3 + 3x - 1 = 0$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
 - β. $e^{x-2} = 2 - x$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x - x + 4$.
 Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε

$$\sin x_0 = x_0 - 4$$

6. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον:
 - α. $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο, ώστε $\ln(x_0 + 1) = 1 - x_0$.
 - β. $\alpha \in (0, \pi)$, τέτοιο, ώστε $\eta \mu \alpha = \alpha - 1$.

7. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με $f(\mathbb{R}) = (1, 2)$.
 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = 2 - x$$
 έχει μία, τουλάχιστον ρίζα, στο διάστημα $(0, 1)$.

Β. Ύπαρξη ρίζας κλασματικών εξισώσεων

8. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα Δ , όταν:

α. $\frac{x^4+1}{x-1} + \frac{x^6+1}{x-2} = 0$, $\Delta = (1, 2)$

β. $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x^4+1}{x-1} = 1$, $\Delta = (0, 1)$

γ. $x = \frac{2x+1}{x^2-1}$, $\Delta = (-1, 1)$

δ. $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 1$, $\Delta = (1, 2)$

9. Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{2e^x - 3}{x^2 - x}$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$.

Γ. Μοναδική ρίζα

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x - 2$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η εξίσωση $x = \frac{2}{2x^2+1}$ έχει στο διάστημα $(0, 1)$ μία, ακριβώς, ρίζα.

11. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν στο διάστημα Δ , μία, ακριβώς, ρίζα.

α. $x^3 + x - 1 = 0$, $\Delta = (0, 1)$

β. $e^x + 3x = 2$, $\Delta = (0, 1)$

γ. $\ln x = \frac{2}{x}$, $\Delta = (1, e)$

δ. $e^x - 1 = \sin x$, $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$

Δ. Ύπαρξη κοινού σημείου των C_f, C_g

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - x - 1$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (0, 1)$.

13. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 3$, $x \in [0, 1]$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα, ακριβώς, σημείο $x_0 \in (0, 1)$.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g , στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, \ln 2\right)$ έχουν ένα, ακριβώς, κοινό σημείο.

15. Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και ισχύει $0 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = x$ σε ένα, ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

Ε. Ύπαρξη δύο ριζών

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - x - 1$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^3 = x + 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$.

17. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

α. $\sin x = x(x - \pi x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$.

β. $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}$.

α. Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \sin x$ έχει, ακριβώς, δύο ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - x, & x \leq 1 \\ \ln x + x - 1, & x > 1 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει, ακριβώς, μία ρίζα στο $(0, 2)$.

ΣΤ. Ύπαρξη ρίζας σε κλειστό διάστημα

20. Έστω $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$1 \leq f(x) \leq 2, \text{ για κάθε } x \in [1, 2]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 2]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$.

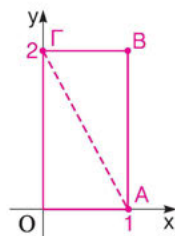
21. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τέτοιο, ώστε

$$f(\eta \mu x_0) = \eta \mu x_0$$

22. Δίνεται το ορθογώνιο $OAB\Gamma$ του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο $[0, 1]$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται στο χωρίο που ορίζει το ορθογώνιο αυτό.

α. Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$.

β. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$.



Ζ. Πρόσημο τιμής της f από όριο

- 23.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = x^2 - 2x$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$.
- 24.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x \ln \frac{1}{x} = 1$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, \frac{2}{\pi})$.
- 25.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{\frac{1}{x}} = x + 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- 26.** Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $4 < f(x) < 5$ για κάθε $x \in [0, 1]$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση
- $$f^2(x) - 5f(x) + 4x = 0$$
- έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Β' ΟΜΑΔΑ

- 27.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - (\kappa\lambda - 2)x + 1 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(-1, 0)$, όταν $\kappa + \lambda = 2$.
- 28.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \neq 0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:
- $$\frac{f(x_0)}{x_0 - a} = \frac{f(a) + f(\beta)}{\beta - a}$$
- 29.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\operatorname{arctg} x = 1$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 30.** Να δείξετε ότι η εξίσωση
- $$(x - \beta)(x - \gamma) + 2(x - \alpha)(x - \gamma) + 3(x - \alpha)(x - \beta) = 0, \text{ με } \alpha < \beta < \gamma$$
- α.** έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (α, β) και (β, γ) .
- β.** έχει δύο, ακριβώς, ρίζες στο (α, γ) .

31. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x-2)e^x - (x+2)$ έχει:

α. μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$

β. δύο, τουλάχιστον, ρίζες αντίθετες.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$,

α. έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

β. έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες αντίθετες.

33. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι συνεχής, για την οποία ισχύουν $f(0) < 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 < 0$

τέτοιο, ώστε $f(x_0) = e^{x_0} + x_0 \eta \mu \frac{1}{x_0}$.

34. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ η οποία είναι γνησίως μονότονη. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, 1)$ υπάρχει μοναδικό x_0 τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = 1 - x_0^3$$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x - 1$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $2x^3 = 1 - x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

β. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να μην υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

36. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x = a + \sin x$, $a > 0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, a)$.

37. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{3x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, ώστε $4f(x_0) = 7x_0$.

38. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μία συνεχής συνάρτηση, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο το 1 μόνο στο 0.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\alpha)-1}{x-1} + \frac{f(\beta)-1}{x-2} = 5$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$, για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$.

β. Αν $g(x) = e^x + x - 2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x)) = 1$, έχει ακριβώς, μία ρίζα στο $(0, 1)$.

39. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, 3\alpha)$, $\alpha > 0$, τέτοιο, ώστε

$$f(\alpha) + f(3\alpha) = 2f(x_0)$$

40. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln(x+1) - 1$.

Αν $\alpha \in (-1, 0)$ και $\beta > 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} - \frac{f(\beta)}{x-2} = 1$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, 2)$.

41. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, που είναι συνεχείς και ισχύει

$$f(x) - g(x) = cx, \quad c \neq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες $\rho_1 < \rho_2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .

42. Έστω $f: [\alpha, 2\alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν

$$f(\alpha) \neq 0 \quad \text{και} \quad \beta f(\alpha) + e^\beta f(2\alpha) = f(2\alpha), \quad \beta \neq 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(\alpha, 2\alpha)$.

43. Ένας πεζοπόρος ξεκινάει από ένα χωριό Α στις 6 π.μ. και φτάνει σε ένα άλλο χωριό Β στις 11 π.μ. Την επόμενη ημέρα ξεκινάει από το χωριό Β στις 6 π.μ. και φτάνει στο χωριό Α στις 11 π.μ., κάνοντας την ίδια διαδρομή. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.



Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α' Λυκείου
- Άλγεβρα Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Α', Β', Γ' ΕΠΑ.Λ.
- Γεωμετρία Α' Λυκείου
- Γεωμετρία Β' Λυκείου
- Θετικών Σπουδών
- Γενικής Παιδείας
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α' & Β'
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα

ISBN: 978-618-5238-06-3



Λ.Τ. 23,90 €