

Τάσος Χ. Μπάρλας

Μαθηματικά

Γ' Λυκείου

Επαναληπτικά
θέματα

Ομάδα προσανατολισμού

- Θετικών σπουδών
- Πληροφορικής και Οικονομίας

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ τάξης Λυκείου που έχουν επιλέξει τον προσανατολισμό Θετικών Σπουδών ή Σπουδών Πληροφορικής και Οικονομίας και περιέχει:

- **Θέματα** για επανάληψη που καλύπτουν όλο το φάσμα των γνώσεων που πρέπει να έχει ο μαθητής, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των εξετάσεων.
- Τα θέματα ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας έχουν χωριστεί σε τρεις ομάδες.
- Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν τα θέματα μαζί με τις λύσεις τους.

Ιανουάριος 2018

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΟΜΑΔΑ Α

1. • Συναρτήσεις	
• Μονοτονία – Κυρτότητα	6
2. • Όρια συναρτήσεων – Ασύμπτωτες	
• Συνεχής – Παραγωγίσιμη συνάρτηση	27
3. • Θεώρημα Fermat	
• Σταθερό πρόσημο	46
4. • Θεωρήματα: Rolle – Μέσης Τιμής	
• Σταθερή συνάρτηση	
• Προβλήματα – Ρυθμός μεταβολής	58

ΟΜΑΔΑ Β

5. • Συναρτήσεις	
• Εφαπτομένη	76
6. • Όρια συναρτήσεων	
• Εξισώσεις – Ανισώσεις	86
7. • Θεώρημα Fermat	
• Σταθερό πρόσημο	100
8. • Θεωρήματα: Rolle – Μέσης Τιμής	
• Σταθερή συνάρτηση	
• Προβλήματα – Ρυθμός μεταβολής	106

ΟΜΑΔΑ Γ

9. Γενικά Θέματα	120
------------------------	-----

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ	144
---------------------	-----



Συναρτήσεις **Μονοτονία – Κυρτότητα**

Ίσες Συναρτήσεις

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες**, όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A , και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω A, B τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα.

Η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}$.

Συνάρτηση 1 – 1

Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_1, x_2 οποιαδήποτε στοιχεία του A .

- Η f λέγεται **συνάρτηση 1 – 1**, όταν ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
- Η f είναι **συνάρτηση 1 – 1**, αν και μόνο αν ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Αντίστροφη Συνάρτηση

- • Αν μία συνάρτηση f είναι 1 – 1, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
- Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f .
- Η f^{-1} έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f .
- Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{x'O'y'}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Συναρτήσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 1 - \ln x \quad \text{και} \quad g(x) = \ln \frac{e}{x}$$

α. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

β. Αν $h(x) = e^x - 2$, να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ h$.

γ. Αν για μία συνάρτηση $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\varphi(e^x) = x + e^x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

να βρείτε τη συνάρτηση φ .

Λύση

α. Οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in A$ είναι

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln \frac{e}{x} = \ln e - \ln x = 1 - \ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Άρα οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

β. Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και η $f \circ h$ το σύνολο

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } h(x) \in A\}$$

$$\text{Είναι } h(x) \in A \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2$$

$$\Leftrightarrow x > \ln 2$$

$$\text{Άρα } A' = (\ln 2, +\infty).$$

$$\text{Για κάθε } x \in A', \text{ έχουμε } (f \circ h)(x) = f(h(x)) = 1 - \ln(e^x - 2).$$

γ. Έχουμε $\varphi(e^x) = x + e^x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Θέτουμε } e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y, \quad y > 0.$$

$$\text{Επομένως } \varphi(y) = \ln y + y - 2, \quad y > 0.$$

$$\text{Άρα } \varphi(x) = \ln x + x - 2, \quad x > 0.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

β. Να βρείτε την f^{-1} .

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ με τον άξονα συμμετρίας τους.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Έστω $x_1, x_2 \in A$. Είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+4}{x_1+1} = \frac{x_2+4}{x_2+1} \Rightarrow (x_1+4)(x_2+1) = (x_1+1)(x_2+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1x_2 + x_1 + 4x_2 + 4 = x_1x_2 + 4x_1 + x_2 + 4 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση $1-1$.

β. Επειδή η f είναι συνάρτηση $1-1$, αντιστρέφεται.

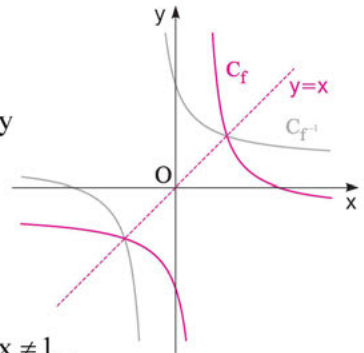
Για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+1} = y \Leftrightarrow x+4 = y(x+1) \Leftrightarrow x+4 = xy+y$$

$$\Leftrightarrow xy - x = 4 - y \Leftrightarrow (y-1)x = 4 - y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4-y}{y-1}, y \neq 1$$

$$\text{Οπότε } f^{-1}(y) = \frac{4-y}{y-1}, y \neq 1. \text{ Άρα } f^{-1}(x) = \frac{4-x}{x-1}, x \neq 1.$$



γ. Ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x$.

- Τα κοινά σημεία της C_f και της ε έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+1} = x \Leftrightarrow x+4 = x(x+1) \Leftrightarrow x+4 = x^2+x$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Οπότε, τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας ε είναι τα:

$$A(2, 2) \text{ και } B(-2, -2)$$

- Τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας ε είναι τα ίδια με τα κοινά σημεία της C_f και της ε .

Οπότε είναι τα σημεία: $A(2, 2)$ και $B(-2, -2)$.

B. Μονοτονία Συνάρτησης

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν $x_1, x_2 \in \Delta$, τότε:

$$\bullet \quad f(x_1) < f(x_2) \stackrel{f \uparrow \Delta}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2 \qquad \bullet \quad f(x_1) < f(x_2) \stackrel{f \downarrow \Delta}{\Leftrightarrow} x_1 > x_2$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\pi)$ και $f(3)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(2-x)$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

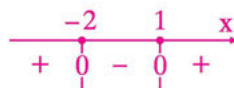
α. Η f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Το τριώνυμο $3x^2 + 2x + 1$ έχει $a = 3 > 0$ και $\Delta = -8 < 0$, οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Είναι $\pi > 3$ και $f \uparrow \mathbb{R}$, οπότε $f(\pi) > f(3)$. Άρα $f(\pi) > f(3)$.

γ. Έχουμε $f(x^2) < f(2-x) \stackrel{f \uparrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x^2 < 2-x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0$, (1).

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει $a = 1 > 0$, $\Delta = 9$ και ρίζες τις $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$. Άρα η (1) $\Leftrightarrow x \in (-2, 1)$.



δ. Το ένα άκρο ολοκλήρωσης είναι το 0 (από τον άξονα $y'y$). Το άλλο άκρο ολοκλήρωσης είναι ρίζα της f . Είναι $f(1) = 0$, οπότε το 1 είναι ρίζα της f .

Επειδή, επιπλέον, η f είναι γνησίως αύξουσα το 1 είναι μοναδική ρίζα της f .

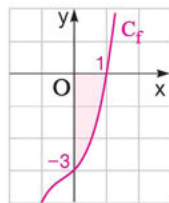
Επομένως τα άκρα ολοκλήρωσης είναι τα: 0 και 1.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και για κάθε $x \in [0, 1]$, έχουμε

$$x \leq 1 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(1) = 0$$

Άρα

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 (-f(x)) dx = - \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 (x^3 + x^2 + x - 3) dx \\ &= - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^1 = - \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 \right) - 0 \right] = \frac{23}{12} \end{aligned}$$



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - x + 3$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2}{x^2+1} > x$.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x = -2019$ έχει μοναδική ρίζα.

Λύση

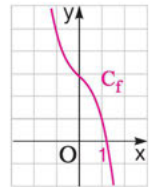
α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = -3x^2 - 1 = -(3x^2 + 1) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2+1} > x &\Leftrightarrow 2 > x(x^2+1) \Leftrightarrow 2 > x^3+x \\ &\Leftrightarrow -x^3-x+2 > 0 \Leftrightarrow -x^3-x+3 > 1 \\ &\Leftrightarrow f(x) > f(1) \\ &\stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} x < 1 \end{aligned}$$



Άρα $x \in (-\infty, 1)$.

γ. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, έχουμε

$$f(A) = f((-\infty, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$.

Άρα $f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

δ. Έχουμε $x^3 + x = -2019 \Leftrightarrow -x^3 - x = 2019$

$$\Leftrightarrow -x^3 - x + 3 = 2022$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2022 \quad (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η εξίσωση (1) έχει, το πολύ, μία ρίζα.

Αφού $2022 \in f(A)$ η εξίσωση (1) έχει, τουλάχιστον, μία ρίζα.

Άρα η εξίσωση (1) έχει, ακριβώς μία ρίζα.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

- α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 2x = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.
- γ. Να υπολογίσετε το $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x f(e^x - 1) dx$.
- δ. Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν κλίση 5.
- ε. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) > f(1 - \ln(x+1))$.

Λύση

α. Έχουμε $x^3 + 2x = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

- Είναι $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f \uparrow \mathbb{R}$.
- Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[0, 1]$, αφού:
 - η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$
 - $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 + 2 - 1 = 2 > 0$, δηλαδή $f(0)f(1) < 0$

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Αφού, επιπλέον $f \uparrow \mathbb{R}$ η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

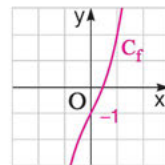
β. Για κάθε $x \in [1, 2]$, έχουμε

$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq 2 &\stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(1) \leq f(x) \leq f(2) \\ &\Leftrightarrow 2 \leq f(x) \leq 11 \end{aligned}$$

Οπότε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$.

Αφού, επιπλέον η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, έχουμε

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^3 + 2x - 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 - x \right]_1^2 \\ &= 4 + 4 - 2 - \left(\frac{1}{4} + 1 - 1 \right) = 6 - \frac{1}{4} = \frac{23}{4} \end{aligned}$$



γ. Θέτουμε $u = e^x - 1$, οπότε $du = e^x dx$. Για $x = \ln 2$ είναι

$$u = e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ και για } x = \ln 3 \text{ είναι } u = e^{\ln 3} - 1 = 3 - 1 = 2.$$

$$\text{Οπότε } \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x f(e^x - 1) dx = \int_1^2 f(u) du = \int_1^2 f(x) dx \stackrel{\beta}{=} E = \frac{23}{4}.$$

- δ. Τα σημεία $(x, f(x))$ της C_f που έχουν κλίση 5, έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=5 \Leftrightarrow 3x^2+2=5 \Leftrightarrow 3x^2=3 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

Είναι $f(1)=2$ και $f(-1)=-4$, οπότε τα ζητούμενα σημεία, είναι τα:

$$A(1, 2) \text{ και } B(-1, -4)$$

- ε. Για $x > -1$, είναι $f(e^x) > f(1 - \ln(x+1)) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} e^x > 1 - \ln(x+1)$
 $\Leftrightarrow e^x + \ln(x+1) - 1 > 0$, (1)

Έστω $g(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$, $x > -1$.

Είναι:

- $g'(x) = e^x + \frac{1}{x+1} > 0$, για κάθε $x > -1$, οπότε $g \uparrow (-1, +\infty)$.
- $g(0) = 0$

Άρα η (1) $\Leftrightarrow g(x) > g(0) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$.

Επομένως $x > 0$.

Γ. Ολικά ακρότατα

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο A .

- Αν ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$, το $f(x_0)$.
- Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο, μόνο στο $x_0 \in A$, τότε ισχύει:

$$f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$$

Ανάλογες προτάσεις έχουμε όταν η f παρουσιάζει μέγιστο.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι $3x^4 + 1 \geq 4x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^3}{3x^4 + 1} = \frac{1}{4}$.

δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

ε. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3$, έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

Είναι:

- $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=0$ (διπλή)

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1, το $f(1) = 2$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	-	0	-	+
f	↘ ↗			

ελ.

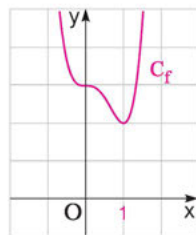
β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$3x^4 + 1 \geq 4x^3 \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 + 3 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$, που ισχύει, αφού η f έχει ελάχιστο το 2.

γ. Είναι $\frac{x^3}{3x^4 + 1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x^3 = 3x^4 + 1 \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 + 3 = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x=1$,

αφού η f παρουσιάζει ελάχιστο, μόνο στο 1, το 2.

Άρα $x=1$.



δ. Αν $A_1 = (-\infty, 1]$ και $A_2 = (1, +\infty)$, τότε $A = A_1 \cup A_2$ και

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στα A_1, A_2 και $f \searrow A_1, f \nearrow A_2$, έχουμε:

- $f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [2, +\infty)$ και
- $f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (2, +\infty)$, αφού $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3x^4 = +\infty$

Άρα $f(A) = [2, +\infty)$.

ε. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι

$$3 \in f(A_1) \text{ και } 3 \in f(A_2)$$

Επειδή επιπλέον $f \searrow A_1$ και $f \nearrow A_2$, η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα A_1 και A_2 .

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο A .

Δ. Κυρτότητα

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ . Ισχύει ότι:

- • $(f \text{ κυρτή στο } \Delta) \Leftrightarrow f' \uparrow \Delta$ • $(f''(x) > 0, x \in \Delta) \Rightarrow f: \text{κυρτή}$
- $(f \text{ κοίλη στο } \Delta) \Leftrightarrow f' \downarrow \Delta$ • $(f''(x) < 0, x \in \Delta) \Rightarrow f: \text{κοίλη}$

Αν επιπλέον, $y = \lambda x + \beta$ η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 \in \Delta$, τότε ισχύουν:

- • $(f \text{ κυρτή στο } \Delta) \Rightarrow$ • $f(x) \geq \lambda x + \beta, x \in \Delta$
- $f(x) = \lambda x + \beta \Leftrightarrow x = x_0$
- $(f \text{ κοίλη στο } \Delta) \Rightarrow$ • $f(x) \leq \lambda x + \beta, x \in \Delta$
- $f(x) = \lambda x + \beta \Leftrightarrow x = x_0$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2}{e^x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x) + 2 > 0$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 0$.

δ. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -2x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{e^{-x}}{2} = \frac{1-x}{x^2+2}$.

στ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(a)+2a-2}{x-1} + \frac{e^x}{x} = 0$, $a \neq 0$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Είναι: • $f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2 + 2)e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2 - 2}{e^x}, x \in \mathbb{R}$

• $f''(x) = \frac{(2-2x)e^x - (2x-x^2-2)e^x}{e^{2x}} = \frac{2-2x-2x+x^2+2}{e^x}$
 $= \frac{x^2 - 4x + 4}{e^x} = \frac{(x-2)^2}{e^x} > 0$, για κάθε $x \neq 2$.

Επειδή, επιπλέον η f είναι συνεχής στο 2 , έχουμε ότι η f είναι κυρτή.

β. Επειδή η f είναι κυρτή, προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

$$\text{Οπότε } f'(x) + 2 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow x > 0.$$

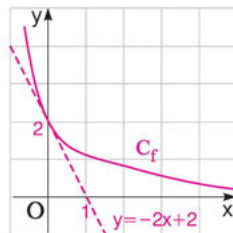
Άρα $x > 0$.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο $x_0 = 0$, είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = -2x \Leftrightarrow y = -2x + 2$$

δ. Επειδή η f είναι κυρτή, η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της $\varepsilon: y = -2x + 2$, στο $x_0 = 0$, εκτός του σημείου επαφής.

Άρα $f(x) \geq -2x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



ε. Έχουμε
$$\frac{e^{-x}}{2} = \frac{1-x}{x^2+2} \Leftrightarrow (x^2+2)e^{-x} = 2(1-x) \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{e^x} = -2x+2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -2x+2, \quad (1)$$

Επειδή η f είναι κυρτή και η ευθεία $\varepsilon: y = -2x + 2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$, έχουμε ότι η (1) έχει μοναδική λύση το 0.

στ. Για $x \in (0, 1)$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(f(\alpha) + 2\alpha - 2)x + (x-1)e^x = 0$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = (f(\alpha) + 2\alpha - 2)x + (x-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

► Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει:

- $g(0) = -1 < 0$
- $g(1) = f(\alpha) + 2\alpha - 2 > 0$, αφού η f είναι κυρτή, η ευθεία $y = -2x + 2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ και $\alpha \neq 0$.

Οπότε $g(0) \cdot g(1) < 0$.

Επομένως για τη g ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[0, 1]$, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$.

► Είναι $g'(x) = f(\alpha) + 2\alpha - 2 + xe^x > 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$.

Οπότε $g \uparrow (0, 1)$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Ε. Τοπικά ακρότατα

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ .

- Αν η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0) = 0$.
- Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(e)$ και $f(3)$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(3+x^2) > f(3+2x^2)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \leq 3$.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

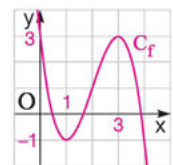
α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Είναι:

- $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$, $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow -3(x^2 - 4x + 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα. Δηλαδή:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$				
f'	-	0	+	0	-			
f			-1			3		
			τ.ε.		τ.μ.			



- $f \searrow (-\infty, 1]$, $f \nearrow [1, 3]$
και $f \searrow [3, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 1, το $f(1) = -1$ και τοπικό μέγιστο στο 3 το $f(3) = 3$.

β. Επειδή $e, 3 \in [1, 3]$, $f \nearrow [1, 3]$ και $e < 3$, έχουμε $f(e) < f(3)$.

γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 3+x^2 \geq 3 \\ 3+2x^2 \geq 3 \end{cases}$$

Επειδή $3+x^2, 3+2x^2 \in [3, +\infty)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(3+x^2) > f(3+2x^2) &\Leftrightarrow 3+x^2 < 3+2x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \end{aligned}$$

δ. Στο διάστημα $(-\infty, 3]$, η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το -1 .
Οπότε $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \leq 3$.

ε. • Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα σ' αυτό.

• Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει $f(0) \cdot f(1) < 0$, αφού $f(0)=3$ και $f(1)=-1$.

Οπότε, σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

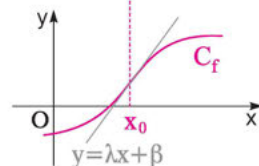
ΣΤ. Σημείο καμπής

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι κυρτή στο $(-\infty, x_0]$, κοίλη στο $[x_0, +\infty)$ και $y = \lambda x + \beta$ η εφαπτομένη της C_f στο x_0 .

Ισχύουν:

- $f(x) > \lambda x + \beta \Leftrightarrow x < x_0$
- $f(x) < \lambda x + \beta \Leftrightarrow x > x_0$
- $f(x) = \lambda x + \beta \Leftrightarrow x = x_0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f	↗		↘



9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 2) > f'(2x^2 + 1)$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.

δ. Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$, για κάθε $x \leq 1$.

ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$.

Λύση

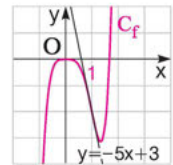
α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Είναι:

- $f'(x) = 15x^4 - 20x^3$, $x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) = 60x^3 - 60x^2$, $x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 0$ (διπλή)

Το πρόσημο της f'' , η κυρτότητα και το σημείο καμπής της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f''	-	0	-	0	+
f					

σ.κ.



Δηλαδή, η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$, κυρτή στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο 1 .

β. Είναι $x^2 + 2 \geq 2 > 1$ και $2x^2 + 1 \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } f'(x^2 + 2) &> f'(2x^2 + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2 > 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Άρα $x \in (-1, 1)$.

γ. Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο καμπής της $x_0 = 1$, έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - (-2) = -5(x - 1) \Leftrightarrow y = -5x + 3$$

δ. Επειδή η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1]$, η C_f είναι κάτω από την εφαπτομένη της στο $x_0 = 1$, εκτός του σημείου με τετμημένη $x_0 = 1$.

Επομένως $f(x) \leq -5x + 3 \Leftrightarrow f(x) + 5x \leq 3$, για κάθε $x \leq 1$.

ε. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$, η C_f με την εφαπτομένη της στο $x_0 = 1$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A(1, f(1))$.

Οπότε έχουμε $f(x) = -5x + 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Ζ. Εύρεση παραμέτρων

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x$.

Να βρείτε τις τιμές των a , b για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει στο -1 τοπικό ακρότατο και στο 1 καμπή.

Λύση

Είναι:

- $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 9$, $x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) = 6ax + 2b$, $x \in \mathbb{R}$

Για να παρουσιάζει η f :

- στο -1 τοπικό ακρότατο, πρέπει:

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a \cdot (-1)^2 + 2b(-1) - 9 = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b = 9, \quad (1)$$

και η f' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του -1 .

- στο 1 καμπή, πρέπει:

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6a \cdot 1 + 2b = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0, \quad (2)$$

και η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 .

Λύνουμε το σύστημα με εξισώσεις τις (1) και (2)

$$\begin{cases} 3a - 2b = 9 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2 \cdot (-3a) = 9 \\ b = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a = 9 \\ b = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Άρα $a = 1$ και $b = -3$.

Για $a = 1$ και $b = -3$ είναι:

- $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$
 $= 3(x+1)(x-3)$
- $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-	0	+

Από τους παραπάνω πίνακες προσήμων των f' και f'' παρατηρούμε ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του -1 και η f'' εκατέρωθεν του 1 .

Άρα $a = 1$ και $b = -3$.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Συναρτήσεις

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a - \ln x$, της οποίας η C_f διέρχεται από το $A(1, 2)$.

- α. Να προσδιορίσετε την τιμή του a .
- β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- γ. Να εξετάσετε, αν οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = \ln \frac{e^2}{x}$ είναι ίσες.
- δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_h με $h(x) = 2 + \ln^2 x$.

Θέμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 1 + \ln(x-1)$ και $g(x) = e^x$.

- α. Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.
- β. Να βρείτε τη συνάρτηση φ , για την οποία ισχύει $\varphi(g(x)) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Έστω $\varphi(x) = x + \ln x - 1$.
- γ. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ είναι πάνω από την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.
- δ. Να λύσετε την εξίσωση $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax-4}{x-1}$.

- α. Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η C_f διέρχεται από το $M(2, 2)$.
Αν $a=3$, τότε :
- β. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.
- γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ae^{1-x} - 1$ της οποίας η C_f διέρχεται από το $M(1, 1)$.

- α. Να βρείτε την τιμή του a .
- β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.
- γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- δ. Να βρείτε τα x , για τα οποία η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

B. Μονοτονία Συνάρτησης**Θέμα 5**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές: $f(e)$ και $f(2)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 2x) > f(x - 2)$.

δ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

ε. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$.

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sin x - 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\sin x > 1 - 2x$.

γ. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\beta - \alpha} < 2$.

δ. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \pi$.

Θέμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x > 1 - \ln x$.

γ. Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν κλίση -2 .

δ. Να υπολογίσετε το $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

Θέμα 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $x = \frac{2}{x^4 + 1}$.

γ. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία

$$\varepsilon: y = 6x - 1$$

δ. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Θέμα 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \ln x - 1$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i. $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

ii. $h(x) = \sqrt{f(x)}$

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \ln x = 2019$ έχει ακριβώς μία λύση.

Θέμα 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x-1}) > f(1 - \ln x)$.

γ. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$, με τον άξονα $x'x$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Γ. Ολικά ακρότατα**Θέμα 11**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι $1 + xe^{x+1} \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{e}$.

δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \ln(1 + ef(x))$$

Θέμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 4x^3$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 2019 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

δ. Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^0 f(x+1)dx$.

Θέμα 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8x + 6$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{2x} - 2x) = 1$.

γ. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής της f είναι θετικός.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες x' , y' και την ευθεία $x = 1$.

Δ. Κυρτότητα

Θέμα 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 4x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

β. Να δείξετε ότι $f'(x^2 + 1) > f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 1$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 8x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\eta \mu x) dx$.

Θέμα 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 4$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία ε του **β.** ερωτήματος και την ευθεία $x = 1$.

Θέμα 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 2)e^x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(ex)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.

δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x) - 2x}$.

ε. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(a) - 2a}{x - 1} + \frac{e^x}{x} = 0$, $a \neq 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Ε. Τοπικά ακρότατα**Θέμα 17**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να συγκρίνετε τις τιμές: $f(3)$ και $f(e)$.
- γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x + 3) > f(e^{2x} + 3)$.
- δ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 15$, για κάθε $x \leq 3$.
- ε. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Θέμα 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακροτάτων της.
- β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.
- γ. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που οι εφαπτομένες σ' αυτά είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: x + 2y - 2 = 0$.
- δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 x f(x^2 + 1) dx$.

Θέμα 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- β. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f .
- γ. Να αποδείξετε ότι $|f(\eta\mu x)| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$.



Συναρτήσεις Εφαπτομένη

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Αντίστροφη συνάρτηση

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

β. Να βρείτε την f^{-1} .

Λύση

Πρέπει $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Οπότε, η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Έστω $x_1, x_2 \in A$. Είναι

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow e^{x_1}(e^{x_2} - 1) = e^{x_2}(e^{x_1} - 1) \\ &\Rightarrow e^{x_1} \cdot e^{x_2} - e^{x_1} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} - e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} = -e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

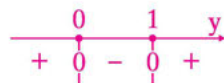
Άρα η f είναι συνάρτηση $1-1$.

β. Επειδή η f είναι συνάρτηση $1-1$, αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \in A$, έχουμε

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x \Leftrightarrow ye^x - e^x = y \Leftrightarrow (y-1)e^x = y \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{y-1}, \quad y \neq 1 \Leftrightarrow x = \ln \frac{y}{y-1}, \quad \frac{y}{y-1} > 0 \end{aligned}$$

Είναι $\frac{y}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y(y-1) > 0 \Leftrightarrow y < 0$ ή $y > 1$.



Οπότε $f^{-1}(y) = \ln \frac{y}{y-1}$, $y \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Άρα $f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{x-1}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$.

Λύση

α. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Είναι

$$f^3(x_1) = f^3(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

Αν $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, από τη δοσμένη σχέση έχουμε

$$y^3 + y = f^{-1}(y) \quad \text{ή} \quad f^{-1}(x) = x^3 + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^2 f(x) dx$ θέτουμε

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

$$\text{οπότε } dx = (f^{-1}(y))' dy = (3y^2 + 1) dy$$

- Για $x = 0$, είναι $0 = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(0) = f^{-1}(y)$

$$\stackrel{f^{-1}: 1-1}{\Leftrightarrow} y = 0$$

- Για $x = 2$, είναι $2 = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(1) = f^{-1}(y)$

$$\stackrel{f^{-1}: 1-1}{\Leftrightarrow} y = 1$$

$$\text{Είναι } I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 y(3y^2 + 1) dy = 3 \int_0^1 y^3 dy + \int_0^1 y dy$$

$$= 3 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \geq 0 \\ x^3 & , x < 0 \end{cases}$.

- α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
 γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$.

Λύση

α. • Για $x > 0$ είναι $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$.

• Για $x < 0$ είναι $f'(x) = 3x^2 > 0$.

Οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0, άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

β. Είναι $f \uparrow \mathbb{R}$, οπότε η f είναι συνάρτηση 1-1, άρα αντιστρέφεται.

• Για $x \geq 0$, έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = y \Leftrightarrow x = y^3, y \geq 0$.

• Για $x < 0$, έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x^3 = y, y < 0$
 $\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-y}, y < 0$.

Οπότε $f^{-1}(y) = \begin{cases} y^3 & , y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & , y < 0 \end{cases}$. Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^3 & , x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , x < 0 \end{cases}$.

γ. ► • Για $x \geq 0$, έχουμε

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = 0 \text{ ή } x = 1$$

• Για $x < 0$ έχουμε $f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} x = -1$.

Οπότε τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y = x$ είναι τα σημεία $A(-1, -1)$, $O(0, 0)$ και $B(1, 1)$.

► Τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της $y = x$ είναι τα ίδια με τα κοινά σημεία της C_f και της $y = x$, δηλαδή τα: A , O , και B .

B. Εφαπτομένη

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 3$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

- α. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(1, 0)$.
- β. Να δείξετε ότι η C_f και η C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

Λύση

α. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 2x - 3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$, αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} 0 - f(x_0) &= f'(x_0)(1 - x_0) \Leftrightarrow -x_0^2 + 3x_0 - 3 = (2x_0 - 3)(1 - x_0) \\ &\Leftrightarrow -x_0^2 + 3x_0 - 3 = 2x_0 - 2x_0^2 - 3 + 3x_0 \\ &\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \quad \text{ή} \quad x_0 = 2 \end{aligned}$$

Άρα οι εφαπτόμενες είναι οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 3 = -3x \Leftrightarrow y = -3x + 3$$

$$\varepsilon_2: y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 1$$

β. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $B = \mathbb{R}^*$. Είναι $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

- Τα κοινά σημεία των C_f , C_g έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Άρα το κοινό σημείο των C_f , C_g είναι το $\Gamma(1, 1)$.

- Η εφαπτομένη της C_f στο Γ έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

- Η εφαπτομένη της C_g στο Γ έχει εξίσωση

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Επομένως, οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $\Gamma(1, 1)$ την ευθεία $y = -x + 2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 2)e^x$.

α. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που έχει κλίση 2.

β. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α. Είναι $f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 2)e^x = (x^2 + 2x + 2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(x, f(x))$ έχει κλίση ίση με την $f'(x)$.

Έχουμε

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)e^x = 2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)e^x - 2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι: • $g(0) = 0$, οπότε η g έχει ρίζα το 0.

$$\begin{aligned} \bullet \quad g'(x) &= (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x + 2)e^x = (2x + 2 + x^2 + 2x + 2)e^x \\ &= (x^2 + 4x + 4)e^x = (x + 2)^2 e^x > 0, \text{ για κάθε } x \neq -2 \end{aligned}$$

Αφού επιπλέον, η g είναι συνεχής στο -2 , προκύπτει ότι η $g \uparrow \mathbb{R}$.

Άρα η g έχει μοναδική ρίζα το 0.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = 2x \Leftrightarrow y = 2x + 2$$

β. Η εφαπτομένη ε της C_f στο x_0 έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Η ε διέρχεται από το $O(0, 0)$, αν και μόνο αν

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow -f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = xf'(x) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

• Για την h ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[0, 1]$, αφού είναι συνεχής σε αυτό, και

$$h(0) = -f(0) = -2, \quad h(1) = f'(1) - f(1) = 5e - 3e = 2e, \text{ οπότε } h(0) \cdot h(1) < 0$$

Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

• Είναι $h'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) = x(x + 2)^2 e^x > 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$.

Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$.

Επομένως, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Αντίστροφη συνάρτηση

Θέμα 79

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 1 - e^x$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = \ln(1 - e^x)$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και ότι $h^{-1} = h$.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ. Να αποδείξετε ότι η C_h και η ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'Oy'}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1, 0)$.

Θέμα 80

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x - \ln(x-1)$ και $g(x) = \ln \frac{e^x}{x-1}$.

α. Να εξετάσετε, αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

β. Αν $h(x) = e^x$, να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ h$.

Έστω $\varphi(x) = f(h(x)) = e^x - \ln(e^x - 1)$.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ. Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση $x = \ln(1 + e^{x-2})$.

Θέμα 81

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x-2} - ax$, $a \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Αν $a = 2$, τότε:

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Έστω $g(x) = f^{-1}(x)$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα του x , που η C_g είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=3$ και $x=4$.

Θέμα 82

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax - \ln(1 + e^x)$.

α. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Αν $a = 1$, τότε:

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

γ. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

δ. Να δείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ τον άξονα συμμετρίας τους.

Θέμα 83

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 + 1$, $x \geq 1$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ με τον άξονα συμμετρίας τους.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

Θέμα 84

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + a, & x \leq 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$.

α. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία η f είναι συνεχής.

Αν $a = 0$, τότε:

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

δ. Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Θέμα 85

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$2e^{f(x)} - f^2(x) = x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

β. Να βρείτε την f^{-1} .

Έστω $g(x) = f^{-1}(x) = 2e^x - x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{g(x)}{e^x} dx$.

B. Εφαπτομένη**Θέμα 86**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + ax - \beta$.

α. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 5x - 6$ εφάπτεται της C_f στο $x_0 = 0$, να βρείτε τις τιμές των a και β .

Αν $a = 5$ και $\beta = 6$, τότε:

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^5) = f(6 - 5x)$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) < f(\ln(1+x)^{1+x})$, για κάθε $x > 0$.

δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\varepsilon\phi x)}{\sin^2 x} dx$.

Θέμα 87

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 4$.

α. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο αυτό είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 6x - y + 1 = 0$, να βρείτε τα a και β .

Αν $a = 1$ και $\beta = -3$, τότε:

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$g(x) = 3x - x^2 \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{4}{x}$$

και να αποδείξετε ότι στο ένα από αυτά έχουν κοινή εφαπτομένη.

δ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμψής της και στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - x) = 3x - 3e^x + 5$.

Θέμα 88

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 3$ και $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

- α.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- β.** Να βρείτε τα διαστήματα του x , για τα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g .
- γ.** Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο και στη συνέχεια, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει αυτή με τον άξονα $x'x$.
- δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τη C_g και την ευθεία $x = 2$.

Θέμα 89

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 1 - \ln(x+1)$.

- α.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- β.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο είναι κάθετες και στη συνέχεια, να βρείτε τις γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$.
- γ.** Να βρείτε τα διαστήματα του x , που η C_f είναι πάνω από τη C_g .
- δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και την ευθεία $x = 1$.

Θέμα 90

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x \ln x$ και $g(x) = 4x - x^2 - 3$.

- α.** Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς την κυρτότητα.
- β.** Να αποδείξετε ότι η C_f και η C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.
- γ.** Να αποδείξετε ότι $2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \leq x \leq 1 + x \ln x$, για κάθε $x > 0$.
- δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τη C_g και την ευθεία $x = 2$.

Θέμα 91

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + 3$.

- α.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε στη γραφική παράσταση της f που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.
- β.** Να δείξετε ότι η παραπάνω ευθεία ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x - x^2$, ακριβώς σε ένα σημείο, το οποίο να το βρείτε.
- γ.** Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) = e^x + 1$.
- δ.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία ε του ερωτήματος **α.** και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Θέμα 92

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$.

- α.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .
- β.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .
- δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

9

Γενικά Θέματα

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 147

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

- Να παραστήσετε γραφικά την f και με την βοήθεια της C_f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.
- Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση

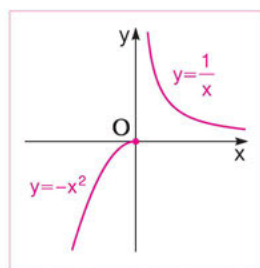
- Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο $A = \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Έστω $A_1 = (-\infty, 0]$ και $A_2 = (0, +\infty)$.

Από τη C_f είναι $f(A_1) = (-\infty, 0]$ και $f(A_2) = (0, +\infty)$.

Άρα το σύνολο τιμών είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R}$.



- Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 με τη βοήθεια του ορισμού.
Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Έστω $x_1, x_2 \in A_1$. Επειδή $f \upharpoonright A_1$, η f είναι 1-1, οπότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Έστω $x_1, x_2 \in A_2$. Επειδή $f \downharpoonright A_2$, η f είναι 1-1, οπότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Έστω $x_1 \in A_1$ και $x_2 \in A_2$.

Τότε $f(x_1) \in f(A_1) \Rightarrow f(x_1) \leq 0$ και $f(x_2) \in f(A_2) \Rightarrow f(x_2) > 0$.

Οπότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άρα η f είναι 1-1, οπότε η f αντιστρέφεται.

γ. • Αν $x \in A_1$, τότε $y = f(x) \Leftrightarrow y = -x^2 \Leftrightarrow x^2 = -y$, $-y \geq 0$

$$\stackrel{x \leq 0}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{-y}, \quad y \leq 0$$

• Αν $x \in A_2$, τότε $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$, $y > 0$.

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

δ. • Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f^{-1}(x) = f(x), \quad (1)$$

• Αν $x \leq 0$ η (1) $\Leftrightarrow -x^2 = -\sqrt{-x} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{-x} \Leftrightarrow x^4 = -x$
 $\Leftrightarrow x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$, δεκτές.

• Αν $x > 0$, τότε η (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$, που ισχύει για κάθε $x > 0$.

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα: $(0, 0)$, $(-1, -1)$ και $(x, \frac{1}{x})$, $x > 0$.

Θέμα 148

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx > 1$.

Λύση

α. Πρέπει $x > 0$ και $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow 0 < x \neq 1$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{\ln x - (x-1)\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x + \frac{1}{x} - 1}{\ln^2 x} > 0, \quad x \in A, \text{ αφού ισχύει}$$

$\ln x \leq x - 1$, $x > 0$ και αν θέσουμε, όπου x το $\frac{1}{x}$, $x > 0$, έχουμε

$$\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0 \text{ και το ίσον ισχύει για } \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Επομένως $f \uparrow (0, 1)$ και $f \uparrow (1, +\infty)$.

- β. Έστω $A_1 = (0, 1)$ και $A_2 = (1, +\infty)$. Είναι $A = A_1 \cup A_2$ και $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στα A_1 , A_2 και $f \uparrow A_1$, $f \uparrow A_2$ έχουμε:
 $f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x))$ και $f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$.

$$\text{Είναι: } \bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) \frac{1}{\ln x} = -1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} \stackrel{y=\ln x}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{y} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Οπότε $f(A_1) = (0, 1)$ και $f(A_2) = (1, +\infty)$. Άρα $f(A) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

- γ. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 με τη βοήθεια του ορισμού.
Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $x_1, x_2 \in A_1$. Επειδή $f \uparrow A_1$, η f είναι 1-1, οπότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Έστω $x_1, x_2 \in A_2$. Επειδή $f \uparrow A_2$, η f είναι 1-1, οπότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Έστω $x_1 \in A_1$ και $x_2 \in A_2$.

$$\text{Είναι: } \bullet f(x_1) \in f(A_1) \Rightarrow 0 < f(x_1) < 1$$

$$\bullet f(x_2) \in f(A_2) \Rightarrow f(x_2) > 1$$

Οπότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άρα η f είναι συνάρτηση 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

- δ. Αν $x \in [2, 3]$, τότε $x \geq 2 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) \geq f(2) \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{\ln 2} \stackrel{(x-1) > 0}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{x-1} \geq \frac{1}{(x-1)\ln 2}$

και το ίσον ισχύει, μόνο για $x = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } \int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx &> \int_2^3 \frac{1}{(x-1)\ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = \frac{1}{\ln 2} [\ln(x-1)]_2^3 \\ &= \frac{1}{\ln 2} (\ln 2 - \ln 1) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx > 1.$$

Θέμα 149

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x < 1 \\ x^2 - 2x + 2, & x \geq 1 \end{cases}.$$

- α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.
- γ. Να βρείτε την f^{-1} .
- δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση

- α. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 1)$ και $A_2 = [1, +\infty)$.

- Αν $x \in A_1$, τότε

$$f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x < 1,$$

οπότε $f \downarrow A_1$.

- Αν $x \in A_2$, τότε $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1) > 0$, για κάθε $x > 1$ και επειδή η f είναι συνεχής και στο 1 , έχουμε $f \uparrow A_2$.

Είναι:

- $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 1)$, αφού:
 - $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x \cdot \frac{1}{x-1} \right) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$
- $f(A_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [1, +\infty)$

Άρα $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R}$.



Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α' Λυκείου
- Άλγεβρα Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Β' Λυκείου Θετικών Σπουδών
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου Γενικής Παιδείας
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α' & Β'
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα
- Μαθηματικά Α', Β', Γ' ΕΠΑ.Λ.
- Γεωμετρία Α' Λυκείου
- Γεωμετρία Β' Λυκείου

ISBN: 978-618-5238-05-6



Λ.Τ. 17,90 €