

Τάσος Χ. Μπάρλας

Μαθηματικά

Γ' ΕΠΑ.Λ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ τάξης ΕΠΑ.Λ.

Περιέχει:

- ✓ **Αναλυτική θεωρία.**
- ✓ **Παρατηρήσεις στη θεωρία**, στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ✓ **Μεθοδολογία** και **Σχόλια** για τη λύση ασκήσεων.
- ✓ **Λυμένες ασκήσεις**, ως υποδείγματα τρόπου λύσης.
- ✓ **Ασκήσεις για λύση.**
- ✓ **Διαγωνίσματα** ανά διδακτική ενότητα.
- ✓ **Θέματα** που καλύπτουν όλο το φάσμα των γνώσεων που πρέπει να έχει ο μαθητής, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των εξετάσεων.
- ✓ **Θεωρία** για τις εξετάσεις

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν:

- **Λύσεις των ασκήσεων για λύση** του βιβλίου αυτού .
- Τα **θέματα** και οι **λύσεις** των θεμάτων στις **Πανελλήνιες εξετάσεις**.

Αύγουστος 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Συναρτήσεις	6
2. Γραφική παράσταση συνάρτησης Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης.....	22
3. Όριο – Συνέχεια συνάρτησης	36
4. Παράγωγος της f στο $x = x_0$ Παράγωγος συνάρτησης	60
5. Εφαπτομένη καμπύλης συνάρτησης	86
6. Ρυθμός μεταβολής – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	96
7. Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης	110
8. Προβλήματα ακροτάτων	133

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

9. Βασικές Έννοιες	148
10. Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων	153
11. Γραφική παράσταση κατανομής συχνοτήτων	174
12. Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων	186
13. Μέτρα Θέσης Μέση τιμή	204
14. Διάμεσος	221
15. Μέτρα Διασποράς Διακύμανση – Τυπική απόκλιση	232
16. Συντελεστής Μεταβολής $Y = aX + \beta$	243
17. Κανονική κατανομή	257
ΘΕΜΑΤΑ	270
ΘΕΩΡΙΑ	304
Λύσεις των Ασκήσεων και Θεμάτων	320
Θέματα Πανελληνίων εξετάσεων	426
Λύσεις Θεμάτων Πανελληνίων εξετάσεων	430

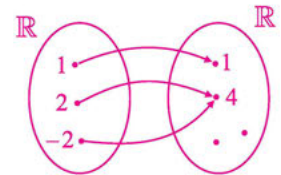
1

Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης

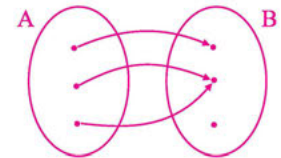
Τον αριθμό 1 τον αντιστοιχίζουμε στον αριθμό $1^2 = 1$,
το 2 στο $2^2 = 4$ και γενικά
κάθε x αριθμό στο $y = x^2$.

Ο κανόνας ($y = x^2$), με τον οποίο κάθε αριθμός x
αντιστοιχίζεται στο τετράγωνό του, λέγεται *συνάρτηση*.



Ορισμός

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B
λέγεται μία διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε
στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα
ακριβώς στοιχείο του συνόλου B .

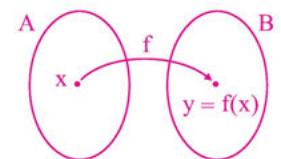


- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της συνάρτησης f .
- Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα γράμματα f , g , h , φ κτλ.

Αν με μία συνάρτηση f από το A στο B , το $x \in A$
αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, δηλαδή

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

τότε γράφουμε $y = f(x)$ και διαβάζουμε "y ίσον f του x".



- Το $f(x)$ λέγεται **τιμή της συνάρτησης f στο x** .
- Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού A της συνάρτησης f , ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ
- Το y , που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από το x λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**A. Τιμές συνάρτησης**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$.

Να βρείτε τις τιμές:

$$f(3), f(1), f(0)$$

Λύση

- Στον τύπο $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ της συνάρτησης f , θέτουμε όπου x το 3 και έχουμε

$$\begin{aligned} f(3) &= 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 1 = 4 \cdot 9 - 15 + 1 \\ &= 36 - 15 + 1 = 37 - 15 = 22 \end{aligned}$$

- Όμοια έχουμε

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = 4 \cdot 1 - 5 + 1 \\ &= 4 - 5 + 1 = 5 - 5 = 0 \end{aligned}$$

- Είναι $f(0) = 4 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 = 4 \cdot 0 - 0 + 1 = 0 + 1 = 1$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 5f(-1) - f(-2)$$

Λύση

Είναι:

- $$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 2(-1) - 1 \\ &= -1 - 3 \cdot 1 + 2 - 1 = -1 - 3 + 2 - 1 \\ &= -5 + 2 = -3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 3(-2)^2 - 2(-2) - 1 \\ &= -8 - 3 \cdot 4 + 4 - 1 = -8 - 12 + 3 \\ &= -20 + 3 = -17 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } A = 5 \cdot (-3) - (-17) = -15 + 17 = 2.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x - 1$.

α. Να βρείτε την τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2$.

Λύση

α. Είναι:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1^2}{2^2} - \frac{5}{2} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} - \frac{4}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{10}{4} - \frac{4}{4} = \frac{1-10-4}{4} = \frac{1-14}{4} = -\frac{13}{4} \end{aligned}$$

β. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &\Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = x^2 \Leftrightarrow -5x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -5x = 1 \Leftrightarrow 5x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Άρα $x = -\frac{1}{5}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x - 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές:

$$f(0), \quad f(2), \quad f(1)$$

Λύση

• Για $x = 0 < 1$, από τον κλάδο $f(x) = x^2 - 3$ έχουμε:

$$f(0) = 0^2 - 3 = -3$$

• Για $x = 2 > 1$, από τον κλάδο $f(x) = 3x - 1$ έχουμε:

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

• Για $x = 1$, από τον κλάδο $f(x) = x^2 - 3$ έχουμε:

$$f(1) = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + \beta$.

Να βρείτε τις τιμές των a και β , για τις οποίες ισχύουν:

$$f(0) = 3 \quad \text{και} \quad f(-2) = 5$$

Λύση

Έχουμε: $f(0) = 3 \Leftrightarrow 0^3 + a \cdot 0 + \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 3$.

Οπότε $f(x) = x^3 + ax + 3$.

$$f(-2) = 5 \Leftrightarrow (-2)^3 + a \cdot (-2) + 3 = 5 \Leftrightarrow -8 - 2a + 3 = 5$$

$$\Leftrightarrow -5 - 2a = 5 \Leftrightarrow -2a = 5 + 5 \Leftrightarrow -2a = 10$$

$$\Leftrightarrow 2a = -10 \Leftrightarrow a = -\frac{10}{2} \Leftrightarrow a = -5$$

Άρα $a = -5$ και $\beta = 3$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \epsilon\phi x$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = g(0) + g\left(\frac{\pi}{4}\right) + g\left(\frac{3\pi}{4}\right) + g\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Λύση

α. Είναι:

$$f(0) = \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = 0 - 1 = -1$$

$$f(\pi) = \eta\mu \pi - \sigma\upsilon\nu \pi = 0 - (-1) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

β. Είναι: $g(0) = \epsilon\phi 0 = 0$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$$

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \epsilon\phi \frac{3\pi}{4} = -\epsilon\phi \frac{\pi}{4} = -1$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Οπότε $A = 0 + 1 - 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Γωνία ω σε		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
μοίρες	rad	$\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi\omega$
0°	0	0	1	0	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0
180°	π	0	-1	0	—

B. Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Γνωρίζουμε ότι έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

- $\frac{1}{x}$, όταν $x \neq 0$
 - $\sqrt{x}$, όταν $x \geq 0$.
- Αν για μία συνάρτηση f το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της είναι το "ευρύτερο" υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
- Αν μία συνάρτηση f έχει τύπο:
- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $n \in \mathbb{N}^*$, τότε λέγεται **πολυνυμική** συνάρτηση και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
 - $f(x) = x$, τότε λέγεται **ταυτοτική** συνάρτηση
 - $f(x) = c$, τότε λέγεται **σταθερή** συνάρτηση.
- Έστω οι πολυνυμικές συναρτήσεις f και h . Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, έχουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς.

Συνάρτηση	Ονομασία	Περιορισμός
$g(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$	Ρητή	$f(x) \neq 0$
$g(x) = \sqrt{f(x)}$	Άρρητη	$f(x) \geq 0$

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$

β. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 5, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

Λύση

- α.** Επειδή η μεταβλητή x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
- β.** Από τον τύπο της συνάρτησης έχουμε ότι η f είναι ορισμένη για $x \neq 1$ και για $x = 1$. Δηλαδή η μεταβλητή x παίρνει όλες τις τιμές από το $\mathbb{R}$.
Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

β. $f(x) = \frac{x-1}{2x-4}$

γ. $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{2-x}$

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, εκτός από τις τιμές του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή τις ρίζες της εξίσωσης

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

β. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, εκτός από τις ρίζες της εξίσωσης

$$2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{2} \Leftrightarrow x=2$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

γ. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα τα x που ισχύουν:

- $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και
- $2-x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq -2 \Leftrightarrow x \neq 2$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x}$

β. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

γ. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

δ. $f(x) = \frac{1}{2-\eta\mu x}$

Λύση

Είναι:

α. $x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x-3=0$
 $\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3$

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

β. $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=\pm 2$

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}, \quad a \geq 0$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

γ. $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$, που είναι αδύνατη.

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

δ. $2-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow -\eta\mu x=-2 \Leftrightarrow \eta\mu x=2$, που είναι αδύνατη, αφού $\eta\mu x \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x+5}{2x^2-x-1}$

β. $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$

γ. $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$

Λύση

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, εκτός από τις ρίζες της εξίσωσης $2x^2-x-1=0$.

Η παραπάνω εξίσωση είναι της μορφής $ax^2+bx+\gamma=0$ με $a=2$, $b=-1$, $\gamma=-1$ και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$, οπότε:

$$\bullet \quad x_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\bullet \quad x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, 1\}$.

β. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, εκτός από τις ρίζες της εξίσωσης $x^2-x+1=0$.

Η παραπάνω εξίσωση είναι της μορφής $ax^2+bx+\gamma=0$ με $a=1$, $b=-1$, $\gamma=1$ και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

Οπότε η εξίσωση δεν έχει καμία πραγματική ρίζα.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

γ. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, εκτός από τις ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x+1=0$.

Η παραπάνω εξίσωση είναι της μορφής $ax^2+bx+\gamma=0$ με $a=1$, $b=-2$, $\gamma=1$ και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Οπότε έχει διπλή ρίζα την $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$.

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

Άλλος τρόπος

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\alpha \pm \beta)^2 &= \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 \\ \bullet \quad \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha \pm \beta)^2 \end{aligned}$$

11. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

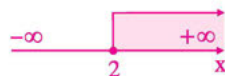
α. $f(x) = \sqrt{5x-10}$

β. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

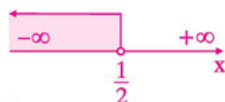
γ. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}$

Λύση**α.** Πρέπει

$$5x-10 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 10 \Leftrightarrow x \geq \frac{10}{5} \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty)$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [2, +\infty)$.**β.** Πρέπει

$$1-2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

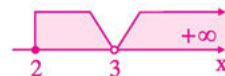
Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, \frac{1}{2})$.**γ.** Πρέπει

$$\bullet \quad x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty) \text{ και}$$

$$\bullet \quad \sqrt{x-2}-1 \neq 0$$

$$\text{Είναι } \sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow (\sqrt{x-2})^2=1^2 \Leftrightarrow x-2=1$$

$$\Leftrightarrow x=1+2 \Leftrightarrow x=3$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [2, 3) \cup (3, +\infty)$.**12. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:**

α. $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

β. $f(x) = \sqrt{x^2+x+2}$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Λύση**α.** Πρέπει $x^2-3x+2 \geq 0$, (1).Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x+2=0$.Είναι: $\bullet \quad \alpha=1, \beta=-3, \gamma=2$ και

$$\bullet \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$\text{Έχουμε } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}.$$

$$\text{Οπότε } x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ και } x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$, έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

β. Πρέπει $x^2 + x + 2 \geq 0$, (2).

Η εξίσωση $x^2 + x + 2 = 0$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0, \text{ οπότε δεν έχει καμία ρίζα.}$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων του τριωνύμου $x^2 + x + 2$ έχουμε ότι η (2) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + x + 2$	+	

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ. Πρέπει $x^2 + 1 \geq 0$, η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

β. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 1}$

Λύση

α. Πρέπει $x^2 - 2x \geq 0$, (1).

$$\text{Είναι } x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων του τριωνύμου $x^2 - 2x$ έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
x^2-2x	+	0	-	0	+

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

β. Πρέπει $-x^2 + 1 \geq 0$, (2).

$$\text{Είναι } -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1^2 = 0$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ή } x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων του τριωνύμου $-x^2 + 1$ έχουμε ότι η $(2) \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$-x^2+1$	-	0	+	0	-

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [-1, 1]$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

Λύση

α. Πρέπει $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

Είναι $x^2 - 4x + 3 = 0$, (1).

Η εξίσωση (1) έχει $\alpha = 1$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Οι ρίζες της (1) είναι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$, οπότε

$$\bullet \quad x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \bullet \quad x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{1, 3\}$.

β. Είναι: $\bullet \quad x^2 - 3x = x(x-3)$

$$\bullet \quad x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1), \quad \boxed{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2), \alpha \neq 0}$$

αφού το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ από το προηγούμενο ερώτημα έχει ρίζες τις $x_1 = 3$ και $x_2 = 1$.

Οπότε για κάθε $x \in A$ έχουμε $f(x) = \frac{x(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x}{x-1}$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

Λύση

α. Πρέπει $x^2 - x \neq 0$.

Είναι $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

β. Είναι: $\bullet \quad x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x-1)^2$

$$\bullet \quad x^2 - x = x(x-1)$$

Για κάθε $x \in A$ έχουμε $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x}$.

Γ. Πράξεις με συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$
- Το πηλίκο $R = \frac{f}{g}$, με $R(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ και $g(x) = x^2 - x$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

α. $S = f + g$ β. $D = f - g$ γ. $P = f \cdot g$ δ. $R = \frac{f}{g}$

Λύση

Οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

Οπότε οι συναρτήσεις S, D και P έχουν πεδίο ορισμού το A .

α. Για κάθε $x \in A$, έχουμε

$$S(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x^2 - 2x + 5 + x^2 - x = 4x^2 - 3x + 5$$

β. Για κάθε $x \in A$, έχουμε

$$\begin{aligned} D(x) &= (f - g)(x) = f(x) - g(x) = 3x^2 - 2x + 5 - (x^2 - x) = 3x^2 - 2x + 5 - x^2 + x \\ &= 2x^2 - x + 5 \end{aligned}$$

γ. Για κάθε $x \in A$, έχουμε

$$\begin{aligned} P(x) &= (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x^2 - 2x + 5) \cdot (x^2 - x) \\ &= 3x^4 - 3x^3 - 2x^3 + 2x^2 + 5x^2 - 5x = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x \end{aligned}$$

δ. Η συνάρτηση $R = \frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$, εκτός της ρίζας της

εξίσωσης:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Άρα η συνάρτηση R έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Για κάθε $x \in B$, έχουμε

$$R(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 - x}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

- 1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.**
 Αν δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε η συνάρτηση:
- α.** $f + g$ ορίζεται στο και $(f + g)(x) = \dots\dots\dots$.
- β.** $f \cdot g$ ορίζεται στο και $(f \cdot g)(x) = \dots\dots\dots$.
- γ.** $\frac{f}{g}$ ορίζεται όταν και με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dots\dots\dots$.
- 2. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).**
 Αν δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε η συνάρτηση:
- α.** $f \cdot g$ έχει πεδίο ορισμού το A **β.** $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το A
- γ.** $\frac{f}{g}$ ορίζεται για εκείνα τα $x \in A$ με $g(x) \neq 0$.

α.	β.	γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Τιμές συνάρτησης

- 3.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$. Να βρείτε τις τιμές:
 $f(2)$, $f(1)$, $f(0)$
- 4.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Να βρείτε τις τιμές:
 $f(-2)$, $f(-1)$
- 5.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x - 1$.
 Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(-3) + 2f(-1)$.
- 6.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 9x - 2$. Να δείξετε ότι
 $3f(0) - 5f(4) = -256$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x - 1$.

α. Να βρείτε την τιμή $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 - 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές: $f(-1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ 5, & \text{αν } x = 1 \\ x^3 - 5, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{f(-2) + f(1) + f(2)}{3}$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - ax^2 - 3$.

Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία ισχύει $f(2) = 16$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - ax - b - 1$. Να βρείτε τις τιμές των a και b , για τις οποίες ισχύουν: $f(0) = -2$ και $f(-1) = -5$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \epsilon\phi x$

α. Να βρείτε τις τιμές: $f(0)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = g(0) - g\left(\frac{\pi}{4}\right) + g\left(\frac{3\pi}{4}\right) + g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

B. Πεδίο ορισμού συνάρτησης

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2} - 1 \qquad \beta. f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 7, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$$

14. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \frac{x-1}{x-2} \qquad \beta. f(x) = \frac{3-x}{x} \qquad \gamma. f(x) = \frac{x}{3x-6}$$

$$\delta. f(x) = \frac{1}{2-5x} \qquad \epsilon. f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

15. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x} \qquad \beta. f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x} \qquad \gamma. f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\delta. f(x) = \frac{x+1}{x^2-9} \qquad \epsilon. f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \qquad \sigma\tau. f(x) = \frac{1}{2-\sin x}$$

16. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \frac{x}{x^2-3x+2} \qquad \beta. f(x) = \frac{x+1}{3x^2-x-2}$$

$$\gamma. f(x) = \frac{1}{x^2-x+3} \qquad \delta. f(x) = \frac{x}{x^2+3x+5}$$

$$\epsilon. f(x) = \frac{x}{x^2-6x+9} \qquad \sigma\tau. f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+1}$$

17. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \sqrt{x-3} \qquad \beta. f(x) = \sqrt{3x-2} \qquad \gamma. f(x) = \sqrt{5-x}$$

$$\delta. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}} \qquad \epsilon. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} \qquad \sigma\tau. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}$$

18. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \sqrt{x^2-5x+6} \qquad \beta. f(x) = \sqrt{2x^2-x-1} \qquad \gamma. f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$$

$$\delta. f(x) = \sqrt{x^2+x+3} \qquad \epsilon. f(x) = \sqrt{x^2+3} \qquad \sigma\tau. f(x) = \sqrt{2-\eta\mu x}$$

19. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

β. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

δ. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

20. Στις παρακάτω συναρτήσεις, να βρείτε το πεδίο ορισμού τους και στη συνέχεια, να απλοποιήσετε τον τύπο τους.

α. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

β. $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

γ. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

δ. $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$

ε. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 6}$

στ. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12}$

Γ. Πράξεις με συναρτήσεις

21. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 \quad \text{και} \quad g(x) = x - 2$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και στη συνέχεια, να απλοποιήσετε τον τύπο της.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 1$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

α. $S = f + g$

β. $D = f - g$

γ. $P = f \cdot g$

δ. $R = \frac{f}{g}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + \beta$.

α. Αν ισχύει $f(0) = 2$ και $f(3) = 2$, να βρείτε τις τιμές των a και β .

Για $a = 3$ και $\beta = 2$:

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f(x)}$ και στη συνέχεια, να απλοποιήσετε τον τύπο της.

δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{ax}{\sqrt{x} - 1}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Αν ισχύει $f(\lambda) = 1$, να βρείτε τις τιμές του λ .

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

δ. Αν ισχύει $f(1) = g(4)$, να βρείτε το a .

25. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 3x$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων:

i. $S = f + g$

ii. $P = f \cdot g$

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $R = \frac{f}{g}$ και στη συνέχεια, να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Αν $f(\lambda) = 4$, να βρείτε τις τιμές του λ .

δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{g(x)}$.

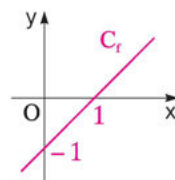


Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

Μονοτονία

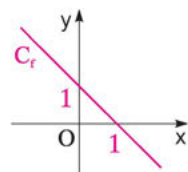
- Για τη συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f'(x) = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.



- Για τη συνάρτηση $f(x) = -x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f'(x) = -1 < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.



Γενικά

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ .
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ .

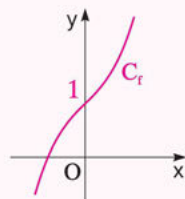
παραδείγματα:

- Αν $f(x) = x^3 + x + 1$, τότε $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

[Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παραπάνω πίνακα.]

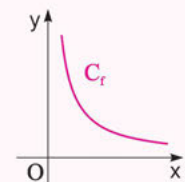
x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f		



- Αν $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, τότε

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

x	0	$+\infty$
f'	-	
f		



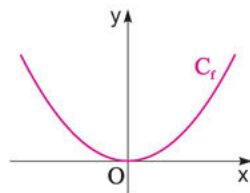
Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Ακρότατα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.



Αν κάνουμε τον πίνακα προσήμων της f' που φαίνεται στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι στο σημείο $x_0 = 0$ που η f παρουσιάζει ελάχιστο, η f' μηδενίζεται, αριστερά του 0 είναι αρνητική και δεξιά του 0 είναι θετική.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+

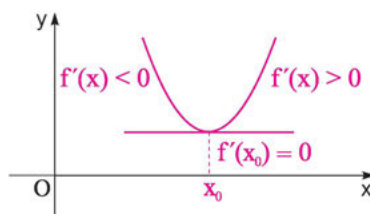
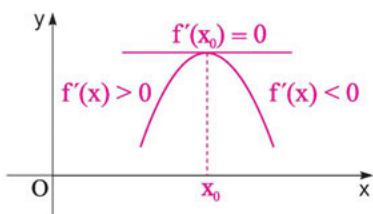
Γενικά

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν:

$f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν:

$f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.



παραδείγματα:

- Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, έχουμε $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x - 1 = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

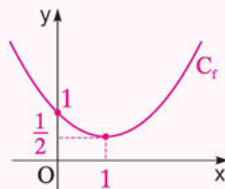
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Οπότε η συνάρτηση f παρουσιάζει

ελάχιστο στο 1 το $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 + 1 = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

ελάχιστο



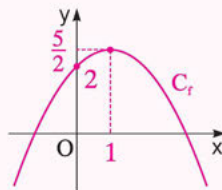
- Για τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$, έχουμε

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x + 1 = -x + 1, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι:}$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	-
f	↗ ↘		

μέγιστο



Οπότε η συνάρτηση f παρουσιάζει

$$\text{μέγιστο στο } 1 \text{ το } f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + 2 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{-1+6}{2} = \frac{5}{2}.$$

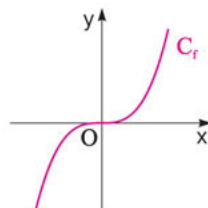
Μονοτονία – Ακρότατα όταν η f' μηδενίζεται σε εσωτερικό σημείο διαστήματος

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από τη γραφική παράσταση της f , έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Παρατηρούμε ότι η f' μηδενίζεται στο 0 και εκατέρωθεν αυτού έχει το ίδιο πρόσημο $+$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	+
f	↗		

Γενικά

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι:

- $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, b)$ και
- η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, b) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

παράδειγμα:

Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$f'(x) = x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x - 2)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι: • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- $f'(x) > 0$, για κάθε $x \neq 2$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων, έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+	0	+
f	↗		

Παρατήρηση

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει:

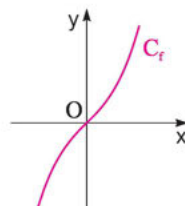
- $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$.
- $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \beta]$.

Η f δεν έχει ακρότατα

Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = x^2 + 1 > 0 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση της f , ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατο.



Γενικά

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) και ισχύει

$$f'(x) > 0 \text{ , για κάθε } x \in (a, \beta) \text{ ή } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (a, \beta) ,$$

τότε η f δεν έχει ακρότατα.

Εύρεση προσήμου της $f'(x)$, όταν είναι πολυωνυμική

► Για την εύρεση του προσήμου της $f'(x)$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ που χωρίζουν τον άξονα σε υποδιαστήματα
- Στο τελευταίο δεξιά υποδιάστημα ως πρόσημο βάζουμε το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου της $f'(x)$ και κινούμαστε προς τα αριστερά.
- Αν η ρίζα που συναντάμε είναι απλή, τότε θα αλλάζουμε το πρόσημο, ενώ αν είναι διπλή θα γράφουμε το ίδιο.

παράδειγμα:

Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ρίζες το 2 (απλή) και το 1 (διπλή). Ο πίνακας προσήμων της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f'(x)	-	0	-	0	+

Σημείωση

Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα, τότε το πρόσημο της $f'(x)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου της.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

Σχόλιο

Αν θέλουμε να εξετάσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία ή τα ακρότατα:

► Βρίσκουμε:

- το πεδίο ορισμού της f
- την παράγωγο της f και το πεδίο ορισμού της
- τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$, (αν υπάρχουν).

► Κάνουμε τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$.

► Στα διαστήματα του x που η $f'(x)$ είναι θετική (αρνητική), η f είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα).

► Αν η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν μιας ρίζας της $f'(x) = 0$, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο.

1. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

β. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

α. Είναι: • $f'(x) = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

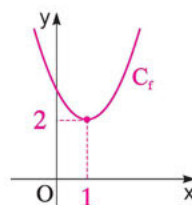
Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 4 - 2 = 2$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

ελ.



β. Είναι: • $f'(x) = -2x + 4, x \in \mathbb{R}$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$

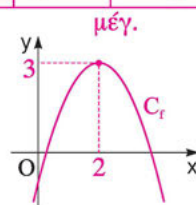
Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

- η f παρουσιάζει μέγιστο στο 2 το

$$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = -4 + 8 - 1 = -5 + 8 = 3$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+	0	-
f			



2. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

β. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

γ. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

α. Είναι: • $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0, (1)$

Η εξίσωση (1) έχει $\alpha = 1 > 0, \beta = -4, \gamma = 3$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Άρα η (1) έχει ρίζες $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 2}{2}$.

Οπότε $x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

- η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 το

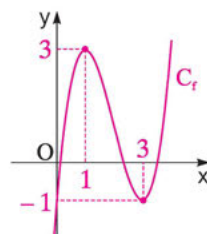
$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 1 = 1 - 6 + 9 - 1 = -6 + 9 = 3 \text{ και}$$

τοπικό ελάχιστο στο 3 το

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 1 = 27 - 54 + 27 - 1 = 54 - 55 = -1$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f					

τ.μέγ. τ.ελ.



- β. Είναι: • $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$
 • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 1 = 0$, (2)

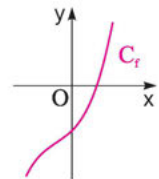
Η εξίσωση (2) έχει $\alpha = 3 > 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8 < 0$$

Άρα η (2) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι:

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	↗	



- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 • Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

- γ. Είναι: • $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, $x \in \mathbb{R}$
 • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$, (3)

Η εξίσωση (3) έχει $\alpha = 3 > 0$, $\beta = -6$, $\gamma = 3$ και

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 - 36 = 0$$

Άρα η (3) έχει διπλή ρίζα την $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-6}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	+
f	↗		

3. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων των συναρτήσεων:

α. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x - 1$

β. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$

γ. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι:

α. • $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{5}{2} \cdot 2x - 6 = -x^2 + 5x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0$, (1).

Η εξίσωση (1) έχει $\alpha = -1 < 0$, $\beta = 5$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της (1) είναι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 1}{-2}$,

οπότε $x_1 = \frac{-5+1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$, $x_2 = \frac{-5-1}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f					
		τ.ε.		τ.μ.	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 2]$, $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, 3]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1 = 2$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_2 = 3$.

β. $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 2x - 3 = -2x^2 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x - 3 = 0$, (2).

Η εξίσωση (2) έχει $\alpha = -2 < 0$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 4 - 24 = -20 < 0$$

Άρα η (2), δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	-	
f	↘	

γ. $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$, (3).

Η εξίσωση (3) έχει $\alpha = -1 < 0$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$$

Άρα η (3) έχει διπλή ρίζα την $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = -\frac{2}{-2} = 1$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	-
f	↘		

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

β. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$

γ. $f(x) = x^3 + x - 5$

δ. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + 7$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι:

α. • $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f					

β. • $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 1 = -x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f					

γ. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f		

δ. • $f'(x) = -\frac{5}{3} \cdot 3x^2 = -5x^2$, $x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (διπλή)

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	-
f			

5. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = 3x^4 + 3x^2 - 2$

β. $f(x) = x^4 - 4x + 3$

γ. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι:

α. • $f'(x) = 12x^3 + 6x = 6x(2x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $2x^2 + 1 > 0$, οπότε το πρόσημο της $f'(x)$ είναι ίδιο με το πρόσημο του $6x$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

β. • $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$, $x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1^3 \Leftrightarrow x = 1$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

γ. • $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow 4x(x - 2)(x + 2) = 0$$

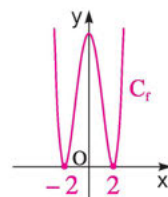
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \text{ ή } x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' προκύπτει ότι η f είναι:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
f'	-	0	+	0	-	0	+
f							

- γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$, $[0, 2]$ και
- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, 0]$, $[2, +\infty)$.



6. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

α. $f(x) = x + \sqrt{x-1}$

β. $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [0, 3]$

Λύση

α. Για τη συνάρτηση f πρέπει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [1, +\infty)$.



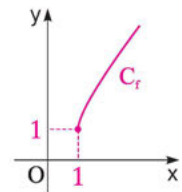
$$\text{Είναι } f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)'$$

$$= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0 \text{ , για κάθε } x > 1$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι:

x	1	$+\infty$
f'		+
f		$\nearrow$

ελ.



- η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και
- παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το

$$f(1) = 1 + \sqrt{1-1} = 1$$

β. Είναι:

- $f'(x) = 2x - 2$ και
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

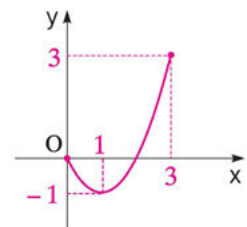
Από το διπλανό πίνακα προσήμων, έχουμε ότι:

x	0	1	3
f'	-	0	+
f	$\nwarrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

τ.μ.

ελ.

μεγ.



- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$ και

- γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$.

Είναι

$$f(0) = 0 \text{ και } f(3) = 3^2 - 3 \cdot 2 = 9 - 6 = 3$$

Οπότε η f παρουσιάζει στο 0 τοπικό μέγιστο το $f(0) = 0$, στο 3 μέγιστο το $f(3) = 3$ και στο 1 , ελάχιστο το $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$.

B. Ανισοτικές σχέσεις

Ανισοτικές σχέσεις που προκύπτουν από Μονοτονία – Ακρότατα

► Έστω $\alpha, \beta \in \Delta$ και $\alpha < \beta$.

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , ισχύει

$$f(\alpha) < f(\beta)$$

- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , ισχύει

$$f(\alpha) > f(\beta)$$

► Αν η συνάρτηση f στο διάστημα Δ έχει:

- ελάχιστη τιμή το m , τότε

$$f(x) \geq m, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$
- μέγιστη τιμή το M , τότε

$$f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 4x + 1$.

α. Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι $x^4 + 4x \geq -3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α. Έχουμε $f(x) = x^4 + 4x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι: • $f'(x) = 4x^3 + 4$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = -4 \Leftrightarrow x^3 = -1 \\ &\Leftrightarrow x^3 = (-1)^3 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , έχουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο -1 , το

$$f(-1) = (-1)^4 + 4 \cdot (-1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$$

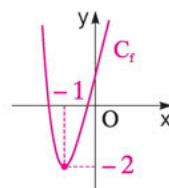
Άρα το ελάχιστο της f είναι το -2 .

β. Από το ερώτημα **α.** προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) \geq f(-1) &\Leftrightarrow f(x) \geq -2 \Leftrightarrow x^4 + 4x + 1 \geq -2 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 4x \geq -1 - 2 \Leftrightarrow x^4 + 4x \geq -3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\swarrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$\epsilon\lambda.$



8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(17)$ και $f(18)$.

Λύση

α. Είναι $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Οπότε η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Για κάθε $x \in A$ έχουμε

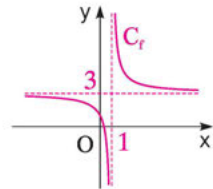
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x-1)'(x-1) - (3x-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1) - (3x-1) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x-3-3x+1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0 \end{aligned}$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-		-
f			

β. Επειδή $17, 18 \in (1, +\infty)$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$, έχουμε

$$17 < 18 \Rightarrow f(17) > f(18)$$



9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Λύση

α. Πρέπει $x \neq 0$. Οπότε η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$A = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)' \cdot x - (x^2+1) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

Για κάθε $x \in A$ είναι $x^2 > 0$.

Οπότε το πρόσημο της $f'(x)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του $x^2 - 1$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι η συνάρτηση f :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+
f						
		Τ.μ.		Τ.ε.		

- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1, 0]$, $(0, 1]$.

- Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1) = \frac{(-1)^2 + 1}{-1} = \frac{1+1}{-1} = -2$ και

$$\text{τοπικό ελάχιστο στο } 1 \text{ το } f(1) = \frac{1^2 + 1}{1} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

β. Παρατηρούμε ότι αν $x \in (0, +\infty)$ η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1)=2$.

Άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι αν $x \in [2, 3]$, τότε $f(3) \leq f(x) \leq f(2)$.

Λύση

α. Πρέπει $x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow -x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

Επειδή $(x^2+1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το πρόσημο της f' είναι το ίδιο με το πρόσημο του $-x^2+1$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι η συνάρτηση f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f					
	τ.ε.		τ.μ.		

- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

- Παρουσιάζει στο -1 τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$

$$\text{και στο } 1 \text{ τοπικό μέγιστο το } f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

β. Επειδή $x \in [2, 3]$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, έχουμε

$$2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow f(2) \geq f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow f(3) \leq f(x) \leq f(2)$$

Γ. Εύρεση παραμέτρων

11. Αν η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + ax - 2$ παρουσιάζει στο $x_0 = -3$ ακρότατο, να βρείτε:

α. την τιμή του a

β. το είδος του τοπικού ακρότατου.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 2x + a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. Επειδή η f παρουσιάζει στο $x_0 = -3$ ακρότατο, έχουμε

$$f'(-3) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-3) + a = 0 \Leftrightarrow -6 + a = 0 \Leftrightarrow a = 6$$

$$\text{Άρα } a = 6.$$

β. Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -3$ ελάχιστο.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	-	0	+
f			
	$\epsilon\lambda_0$		

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + \beta$. Να βρείτε τις τιμές των a, β , για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει στο 2 ακρότατο το 5.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 2x + a$, $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f παρουσιάζει στο 2 ελάχιστο το 5, έχουμε:

- $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + a = 0 \Leftrightarrow 4 + a = 0 \Leftrightarrow a = -4$ και
- $f(2) = 5 \Leftrightarrow 2^2 + a \cdot 2 + \beta = 5 \Leftrightarrow 4 + (-4) \cdot 2 + \beta = 5 \Leftrightarrow 4 - 8 + \beta = 5$
 $\Leftrightarrow -4 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 + 4 \Leftrightarrow \beta = 9$

Άρα $a = -4$ και $\beta = 9$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + \beta$. Αν η f παρουσιάζει στο $x_0 = -2$ τοπικό ακρότατο και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

- α.** Να βρείτε τις τιμές των a, β .
- β.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ.** Να βρείτε το είδος του ακρότατου και την τιμή του.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 2x + a$, $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f παρουσιάζει στο $x_0 = -2$ τοπικό ακρότατο, έχουμε

$$f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-2) + a = 0 \Leftrightarrow -4 + a = 0 \Leftrightarrow a = 4$$

Για $a = 4$ έχουμε $f(x) = x^2 + 4x + \beta$.

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(-1) = 2 &\Leftrightarrow (-1)^2 + 4(-1) + \beta = 2 \Leftrightarrow 1 - 4 + \beta = 2 \\ &\Leftrightarrow -3 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 5 \end{aligned}$$

Άρα $a = 4$ και $\beta = 5$.

β. Είναι $f(x) = x^2 + 4x + 5$ και $f'(x) = 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{2} \Leftrightarrow x = -2.$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, +\infty)$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

ελ.

γ. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -2$ το

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2ax + 3$, $a > 0$. Αν η τιμή του τοπικού ακρότατου της f είναι 2, τότε:

α. Να βρείτε την τιμή του a .

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι: • $f'(x) = 2x - 2a$, $x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2a = 0 \Leftrightarrow 2x = 2a \Leftrightarrow x = a$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο a το

$$f(a) = a^2 - 2a \cdot a + 3 = a^2 - 2a^2 + 3 = -a^2 + 3$$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

ελ.

Έχουμε

$$f(a) = 2 \Leftrightarrow -a^2 + 3 = 2 \Leftrightarrow -a^2 = 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow -a^2 = -1 \Leftrightarrow a^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ ή } a = -1$$

Επειδή $a > 0$, έχουμε $a = 1$.

β. Για $a = 1$, έχουμε από το ερώτημα **α.** ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $a = 1$ το $f(a) = f(1) = -1^2 + 3 = -1 + 3 = 2$.

Άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \alpha - 1$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

β. Αν το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f είναι τριπλάσιο από το τοπικό μέγιστο, να βρείτε την τιμή του α .

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι: • $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 2x = -2x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow -2x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων της f' , έχουμε ότι η f παρουσιάζει:

- στο 0 τοπικό ελάχιστο το

$$f(0) = -\frac{2}{3} \cdot 0^3 - 0^2 + \alpha - 1 = \alpha - 1$$

- στο 1 τοπικό μέγιστο το

$$f(1) = -\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 1^2 + \alpha - 1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + 1 + \alpha - 1 = -\frac{2}{3} + \alpha$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f					
		τ.ε.	τ.μ.		

β. Έχουμε

$$f(0) = 3 \cdot f(1) \Leftrightarrow \alpha - 1 = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3} + \alpha \right) \Leftrightarrow \alpha - 1 = -3 \cdot \frac{2}{3} + 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = -2 + 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 3\alpha = -2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha = -1$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Άρα $\alpha = \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

- 1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.**
- α.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι
..... στο
- β.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$
- γ.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι
..... στο
- δ.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$
- ε.** Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$ και η παράγωγος της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε η f είναι στο (a, β) και δεν παρουσιάζει στο διάστημα αυτό.
- 2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.**
- α.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο (a, β) .
- β.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, \beta)$ και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο.
- γ.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$ και εκατέρωθεν του x_0 η f' αλλάζει πρόσημο, τότε η f παρουσιάζει για $x = x_0$ ακρότατο.

α.	β.	γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**A. Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης**

3. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^2 - 6x + 1$

β. $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + 1$

γ. $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

δ. $f(x) = -3x^2 + 12x$

4. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$

β. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

γ. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - \sqrt{2}$

δ. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 5$

ε. $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + 1$

στ. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - 2$

5. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$

β. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 1$

γ. $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 5$

δ. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x - 11$

ε. $f(x) = -3x^3 + 3x^2 - x + 2$

στ. $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x - 4$

6. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

β. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$

γ. $f(x) = -x^3 + 12x - 5$

δ. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$

ε. $f(x) = 2x^3 + x - 1$

στ. $f(x) = -x^3 - x + 4$

ζ. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 7$

η. $f(x) = -\frac{7}{3}x^3 + 10$

7. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 + x + 1$

β. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

γ. $f(x) = x^3 + 5$

δ. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$



Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α' Λυκείου
- Άλγεβρα Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' ΕΠΑΛ
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α' & Β'
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα
- Γεωμετρία Α' Λυκείου
- Γεωμετρία Β' Λυκείου
- Γεωμετρία Β' Λυκείου Θετικών Σπουδών
- Γεωμετρία Β' Λυκείου Γενικής Παιδείας

ISBN: 978-618-5238-04-9



Λ.Τ. 21,70 €