

Τάσος Χ. Μπάρλας

Γεωμετρία

Β' Λυκείου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ τάξης Λυκείου.

Περιέχει:

- ✓ **Αναλυτική θεωρία.**
- ✓ **Παρατηρήσεις στη θεωρία**, στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ✓ **Μεθοδολογία** και **Σχόλια** για τη λύση ασκήσεων.
- ✓ **Λυμένες ασκήσεις**, ως υποδείγματα τρόπου λύσης.
- ✓ **Ασκήσεις για λύση.**
- ✓ **Διαγωνίσματα** ανά διδακτική ενότητα.
- ✓ **Θέματα** και **Διαγωνίσματα** που καλύπτουν όλο το φάσμα των γνώσεων που πρέπει να έχει ο μαθητής, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των εξετάσεων.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν:

- **Λύσεις των ασκήσεων για λύση** του βιβλίου αυτού .
- Τα **θέματα** και οι **λύσεις** των θεμάτων στις **Πανελλήνιες εξετάσεις**.

Σεπτέμβρης 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

1. Αναλογίες	8
2. Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου	24
3. Ομοιότητα	32

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

4. Το Πυθαγόρειο θεώρημα	46
5. Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος	66
6. Θεωρήματα διαμέσων	78
7. Μετρικές σχέσεις στον κύκλο	96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΕΜΒΑΔΑ

8. Εμβαδόν βασικών σχημάτων	120
9. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου	140
10. Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων	148

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

11. Κανονικά πολύγωνα	172
12. Μήκος – Εμβαδόν κύκλου	186

ΘΕΜΑΤΑ	206
--------------	-----

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ	222
--------------------	-----

Λύσεις των Ασκήσεων για λύση, Θεμάτων και Διαγωνισμάτων	234
---	-----

Θέματα Πανελληνίων εξετάσεων	314
------------------------------------	-----

Λύσεις Θεμάτων Πανελληνίων εξετάσεων	342
--	-----

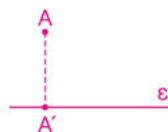
4

Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Ορθές προβολές

Έστω μία ευθεία ε .

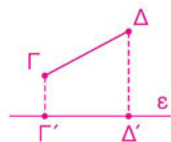
- Αν ένα σημείο A δεν ανήκει στην ευθεία ε , τότε το ίχνος A' της καθέτου που φέρουμε από το A προς της ε λέγεται **ορθή προβολή** ή απλώς **προβολή** του A στην ευθεία ε .



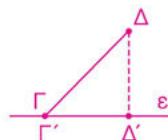
- Αν ένα σημείο B ανήκει στην ευθεία ε , τότε ως προβολή του B' πάνω στην ε θεωρούμε το ίδιο το B .



- Ορθή προβολή ενός τμήματος $\Gamma\Delta$ πάνω στην ευθεία ε λέμε το τμήμα $\Gamma'\Delta'$ που έχει άκρα τις ορθές προβολές Γ' , Δ' των άκρων Γ , Δ αντίστοιχα του τμήματος $\Gamma\Delta$.

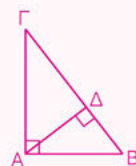


- Αν το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ε , τότε η προβολή του $\Gamma\Delta$ στην ευθεία ε , είναι το τμήμα $\Gamma\Delta'$.



παράδειγμα:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, οι προβολές των κάθετων πλευρών AB και $A\Gamma$ στην υποτί-
νουςα $B\Gamma$ είναι τα τμήματα ΔB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.



Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) του παρακάτω σχήματος και Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$.

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\bullet \quad AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}, \quad (1)$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBA είναι όμοια γιατί έχουν:

$$\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\text{L} \quad \text{και τη γωνία } \hat{B} \text{ κοινή.}$$

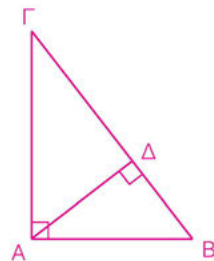
Οπότε η σχέση (1) ισχύει.

$$\bullet \quad A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}, \quad (2)$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma A$ είναι όμοια γιατί έχουν:

$$\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\text{L} \quad \text{και τη γωνία } \hat{\Gamma} \text{ κοινή.}$$

Οπότε η σχέση (2) ισχύει.



Πόρισμα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Στο διπλανό σχήμα θα αποδείξουμε ότι

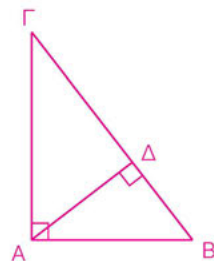
$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

$$\text{Ισχύουν ότι: } \bullet \quad AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta, \quad (1)$$

$$\bullet \quad A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta, \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Gamma \cdot B\Delta}{B\Gamma \cdot \Gamma\Delta} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$



Πυθαγόρειο θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινουσας.

Απόδειξη

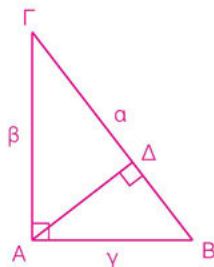
Στο διπλανό σχήμα θα αποδείξουμε ότι

$$AB^2 + AG^2 = BG^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Ισχύουν ότι:

- $AB^2 = BG \cdot B\Delta$

- $AG^2 = BG \cdot \Gamma\Delta$



Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και έχουμε

$$\begin{aligned} AB^2 + AG^2 &= BG \cdot B\Delta + BG \cdot \Gamma\Delta \\ &= BG \cdot (B\Delta + \Gamma\Delta) \\ &= BG \cdot BG \\ &= BG^2 \end{aligned}$$

Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AB^2 + AG^2 = BG^2$, τότε $\hat{A} = 1\text{L}$.

Απόδειξη

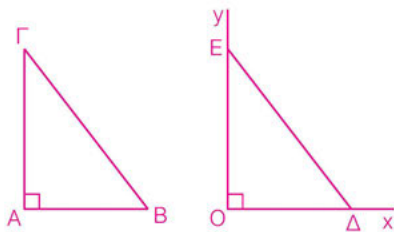
Πάνω στις πλευρές Ox , Oy ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα $OD = AB$ και $OE = AG$.

Επειδή το τρίγωνο $OΔΕ$ είναι ορθογώνιο σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα και την υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta E^2 &= O\Delta^2 + O\Gamma^2 \\ &= AB^2 + AG^2 \\ &= BG^2 \end{aligned}$$

Άρα $\Delta E = BG$.

Επομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $OΔΕ$ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, οπότε θα είναι $\hat{A} = \hat{O} = 1\text{L}$.



Θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

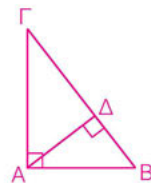
Έστω AD το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Θα αποδείξουμε ότι $AD^2 = BD \cdot \Delta\Gamma$.

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της $\widehat{B}$.

Επομένως οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{AD}{BD} = \frac{\Delta\Gamma}{AD}$, άρα

$$AD^2 = BD \cdot \Delta\Gamma$$



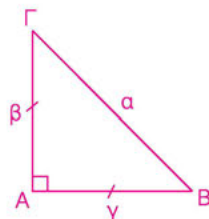
Πρόταση 1

Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\widehat{A} = 90^\circ$) και ισοσκελές τότε $\alpha = \sqrt{2}\beta$.

Απόδειξη

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 2\beta^2 \quad \text{ή} \quad \alpha = \sqrt{2}\beta$$



Πρόταση 2

Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς α , τότε το ύψος του u είναι $u = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Απόδειξη

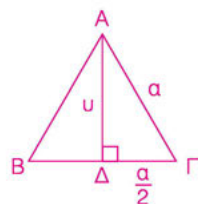
Το ύψος AD στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος, οπότε $\Delta\Gamma = \frac{\alpha}{2}$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ του διπλανού σχήματος και έχουμε

$$AD^2 + \Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 \Leftrightarrow u^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow u^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow u^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow u^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$



Πρόταση 3

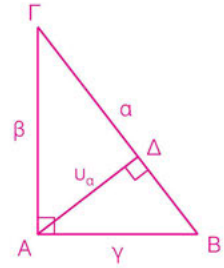
Αν AD είναι το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε ισχύει

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

Απόδειξη

Ισχύει ότι $\beta\gamma = \alpha \cdot \alpha_a$. Έχουμε

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 \gamma^2} = \frac{\alpha^2}{(\beta\gamma)^2} = \frac{\alpha^2}{(\alpha \cdot \alpha_a)^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \cdot \alpha_a^2} = \frac{1}{\alpha_a^2}$$



Σχόλιο

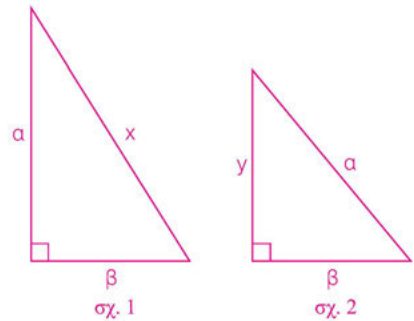
- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \mu_a = \frac{\alpha}{2}$.
- Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει: $\hat{B} = 30^\circ \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$.

Γεωμετρικές κατασκευές

1. Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, τότε με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος κατασκευάζουμε τα τμήματα:

$$x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\text{σχ. 1}) \quad \text{και}$$

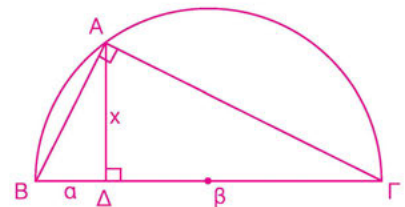
$$y = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad (\text{σχ. 2})$$



2. Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, τότε με εφαρμογή του θεωρήματος:

«Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD ύψος του, τότε $AD^2 = DB \cdot DG$ »

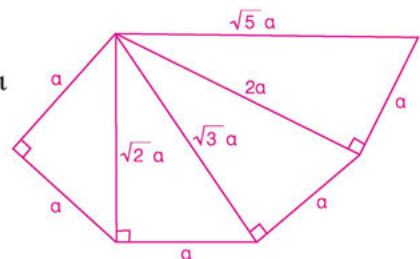
κατασκευάζουμε το τμήμα $x = \sqrt{\alpha\beta}$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



3. Αν α είναι γνωστό τμήμα, τότε κατασκευάζεται τμήμα ίσο με:

$$\sqrt{2}\alpha, \sqrt{3}\alpha, 2\alpha, \sqrt{5}\alpha, \dots, \sqrt{n}\alpha$$

όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



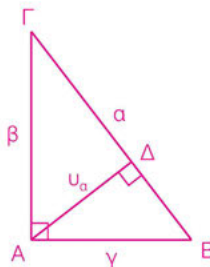
Συνοπτική θεωρία

Μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο

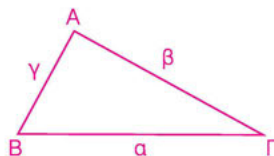
► Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του $A\Delta$.

Τότε ισχύουν τα εξής:

- $AB^2 = \Delta B \cdot B\Gamma$
- $A\Gamma^2 = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma$
- $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$
- $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$
- $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot B\Gamma$

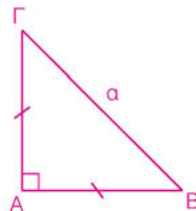


► Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε $\hat{A} = 90^\circ$.



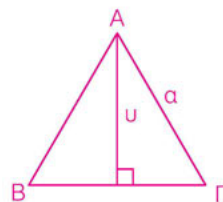
► Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) και ισοσκελές, τότε

$$\alpha = \beta\sqrt{2}$$



► Το ύψος u ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$u = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Προβολές κάθετων πλευρών

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = 4$ και $B\Gamma = 8$.
Να υπολογίσετε την προβολή της AB στη $B\Gamma$.

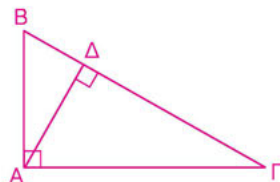
Λύση

Η προβολή της AB στη $B\Gamma$ είναι το τμήμα $B\Delta$.

Ισχύει ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$.

Οπότε $4^2 = 8 \cdot B\Delta \Leftrightarrow 16 = 8B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = 2$.

Άρα $B\Delta = 2$.



2. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AD . Αν $AB = 2$ και $\Gamma\Delta = 3$, να βρείτε το μήκος του $B\Delta$.

Λύση

Έστω $x > 0$ το μήκος του $B\Delta$.

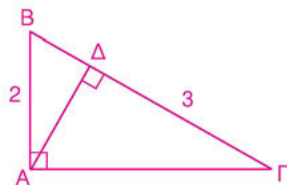
Ισχύει ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$.

Οπότε $2^2 = (x + 3)x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -4, \text{ που απορρίπτεται.}$$

Άρα $x = 1$.



3. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AD . Αν ισχύει $AB = 2A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Delta B = 4\Delta\Gamma$.

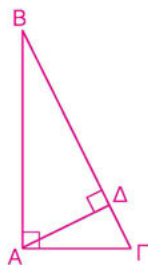
Λύση

Ισχύει ότι $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$, (1).

Επειδή $AB = 2A\Gamma$ από την (1) έχουμε

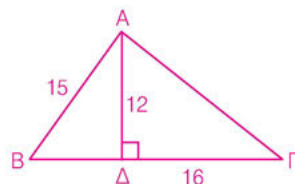
$$\frac{(2A\Gamma)^2}{A\Gamma^2} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{4A\Gamma^2}{A\Gamma^2} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \Delta B = 4\Delta\Gamma$$



B. Πυθαγόρειο θεώρημα

4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Αν $AB=15$, $A\Delta=12$ και $\Gamma\Delta=16$, να υπολογίσετε:



- α. Το μήκος του $A\Gamma$.
- β. Το μήκος του $B\Delta$.

Λύση

- α. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$, έχουμε:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$$

Άρα $A\Gamma = 20$.

- β. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο ΔAB , έχουμε:

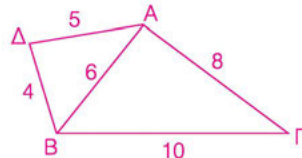
$$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 = 9^2$$

Άρα $B\Delta = 9$.

Γ. Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

5. Να εξετάσετε στο διπλανό σχήμα:

- α. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- β. Αν η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.



Λύση

- α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $B\Gamma$.

Έχουμε: $B\Gamma^2 = 10^2 = 100$

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Οπότε $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, επομένως $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

- β. Στο τρίγωνο $A\Delta B$ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η AB .

Έχουμε: $AB^2 = 6^2 = 36$

$$A\Delta^2 + \Delta B^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$$

Επειδή $AB^2 \neq A\Delta^2 + \Delta B^2$, προκύπτει ότι $\hat{A} \neq 90^\circ$.

Άρα η γωνία $\hat{A}$ δεν είναι ορθή.

Μέθοδος

Για να εξετάσουμε, αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, βρίσκουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου και το συγκρίνουμε με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του.

Δ. Ύψος προς υποτείνουσα

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AD .

Αν $AD = \sqrt{6}$ και $\Gamma D = 1$, να υπολογίσετε το μήκος του $B\Gamma$.

Λύση

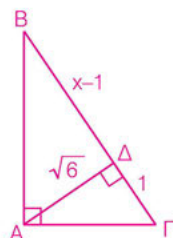
Αν $B\Gamma = x$, τότε $BD = x - 1$.

Ισχύει ότι $AD^2 = DB \cdot \Gamma D$.

Οπότε

$$(\sqrt{6})^2 = (x-1) \cdot 1 \Leftrightarrow 6 = x-1 \Leftrightarrow x = 7$$

Άρα $B\Gamma = 7$.



7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{L}$) φέρουμε το ύψος AD . Αν είναι

$AB = 8$, $A\Gamma = 6$, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $B\Gamma$, DB , $D\Gamma$ και AD .

Λύση

Έχουμε:

- $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

Οπότε $B\Gamma = \sqrt{100} = 10$.

- $AB^2 = B\Gamma \cdot DB$. Οπότε

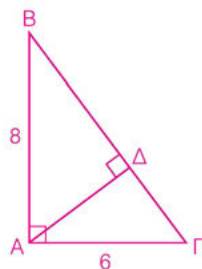
$$8^2 = 10 \cdot DB \Leftrightarrow DB = \frac{64}{10} \Leftrightarrow DB = 6,4$$

- $D\Gamma = B\Gamma - DB = 10 - 6,4 = 3,6$.

- $AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot AD$.

Οπότε $8 \cdot 6 = 10 \cdot AD \Leftrightarrow 48 = 10AD \Leftrightarrow AD = 4,8$.

Άρα $B\Gamma = 10$, $DB = 6,4$, $D\Gamma = 3,6$ και $AD = 4,8$.



8. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο AB και η χορδή του $A\Gamma = 2\sqrt{6}$. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην AB που την τέμνει στο D . Αν $DB = 2$, να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου και το μήκος του ΓD .

Λύση

Φέρουμε τη χορδή ΓΒ, οπότε $\widehat{A\Gamma B} = 1\text{L}$.

Είναι $A\Gamma = 2\sqrt{6}$ και $B\Delta = 2$.

Έστω $AB = x$, $x > 0$, οπότε $R = \frac{x}{2}$.

Έχουμε $\Delta A = x - 2$ και $A\Gamma^2 = AB \cdot \Delta A$.

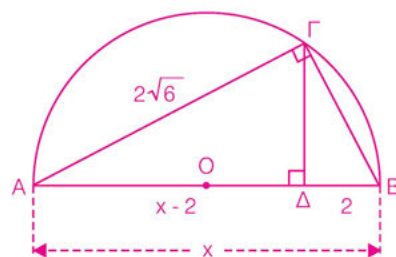
$$\text{Άρα } (2\sqrt{6})^2 = x \cdot (x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 6)(x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \text{ ή } x = -4, \text{ που απορρίπτεται}$$

Άρα $AB = 6$, οπότε $R = 3$.

Έχουμε $\Gamma\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta B = (6 - 2) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$. Άρα $\Gamma\Delta = 2\sqrt{2}$.



Ε. Ορθογώνιο και ισοσκελές - Ισόπλευρο

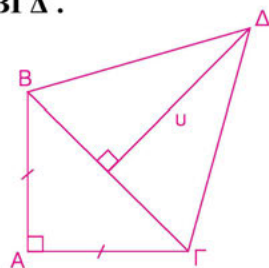
9. Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με $AB = \sqrt{2}$.

Να υπολογίσετε το ύψος v του ισόπλευρου τριγώνου $B\Gamma\Delta$.

Λύση

Είναι: • $B\Gamma = AB \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

• $v = \frac{B\Gamma \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$



ΣΤ. Αποδεικτικές ασκήσεις

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$). Αν $M\Delta$ η απόσταση του μέσου M της πλευράς AB από την $B\Gamma$, να δείξετε ότι:

$$\Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = A\Gamma^2$$

Λύση

Φέρουμε τη $M\Gamma$ και εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα $M\Delta\Gamma$ και $M\Delta B$. Είναι

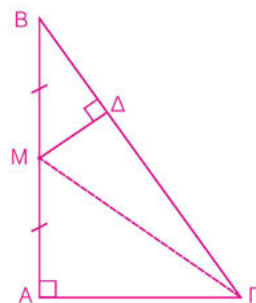
$$\Delta\Gamma^2 = M\Gamma^2 - M\Delta^2, \quad \Delta B^2 = MB^2 - M\Delta^2$$

$$\text{Οπότε } \Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = M\Gamma^2 - M\Delta^2 - (MB^2 - M\Delta^2)$$

$$= M\Gamma^2 - MB^2$$

$$= M\Gamma^2 - MA^2 \text{ (αφού } M \text{ μέσο } AB)$$

$$= A\Gamma^2 \text{ (από το ορθογώνιο τρίγωνο } AM\Gamma)$$



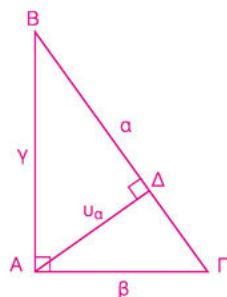
Ζ. Γενικές

11. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\beta + \gamma = \sqrt{15}$ και $v_\alpha = 1$. Να υπολογίσετε την α .

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}\beta + \gamma = \sqrt{15} &\Leftrightarrow (\beta + \gamma)^2 = 15 \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma = 15 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha \cdot v_\alpha = 15 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha \cdot 1 = 15 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 15 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3) \cdot (\alpha + 5) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 \quad (\text{αφού } \alpha > 0)\end{aligned}$$



Σχόλιο

- Η ισότητα $\alpha^4 = \kappa$ προκύπτει από την:
 - $\alpha^2 = \lambda$ με ύψωση στο τετράγωνο ή
 - $\alpha^2 = \mu$ και $\alpha^2 = \nu$ με πολλαπλασιασμό κατά μέλη.
- Η ισότητα $\alpha^3 = \kappa$ προκύπτει από την $\alpha^4 = \kappa\alpha$ (με απλοποίηση του $\alpha \neq 0$)

12. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{L}$) και το ύψος του AD . Αν E, Z είναι οι προβολές του Δ στις $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

α. $\frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$

β. $AD^3 = BG \cdot DE \cdot \Delta Z$

Λύση

α. Έχουμε $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{AD}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{AB^4}{A\Gamma^4} = \frac{AD^2}{\Delta\Gamma^2} \Leftrightarrow \frac{AB^4}{A\Gamma^4} = \frac{AB \cdot BE}{A\Gamma \cdot \Gamma Z}$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$$

β. Από τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta A\Gamma$ έχουμε αντίστοιχα

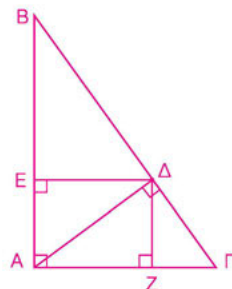
$$AD^2 = AB \cdot AE \quad \text{και} \quad AD^2 = A\Gamma \cdot AZ$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και έχουμε

$$AD^4 = AB \cdot A\Gamma \cdot AE \cdot AZ \Leftrightarrow AD^4 = AD \cdot BG \cdot AE \cdot AZ$$

$$\Leftrightarrow AD^3 = BG \cdot \Delta Z \cdot DE$$

[αφού $AB \cdot A\Gamma = AD \cdot BG$ και το $AE\Delta Z$ ορθογώνιο].

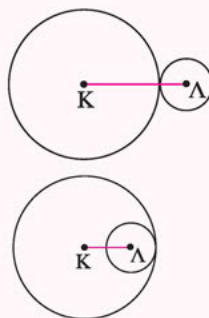


Σχόλιο

Οι κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) εφάπτονται:

• Εξωτερικά $\Leftrightarrow K\Lambda = R + \rho$

• Εσωτερικά $\Leftrightarrow K\Lambda = R - \rho$



13. Δίνονται δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο A και $B\Gamma$ το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.

α. Να δείξετε ότι $B\Gamma = 2\sqrt{R\rho}$.

β. Αν (O, σ) ο κύκλος που εφάπτεται στους (K, R) , (Λ, ρ) και στη $B\Gamma$ να δείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$.

Λύση

[Εδώ έχουμε υπολογισμό προβολής τμήματος σε ευθεία].

α. Φέρουμε $\Lambda\Delta \perp KB$. Οπότε $\Lambda\Delta = B\Gamma$ και $K\Delta = R - \rho$. Είναι $K\Lambda = R + \rho$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\Lambda\Delta$ έχουμε

$$\begin{aligned}\Lambda\Delta^2 &= K\Lambda^2 - K\Delta^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = (R + \rho)^2 - (R - \rho)^2 \\ &\Leftrightarrow B\Gamma^2 = 4R\rho \Leftrightarrow B\Gamma = 2\sqrt{R\rho}\end{aligned}$$

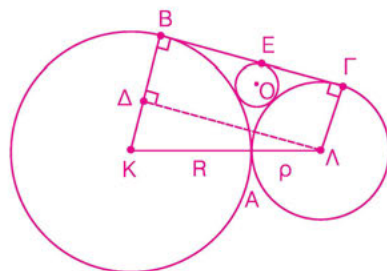
β. Αν E το σημείο επαφής του κύκλου (O, σ) με τη $B\Gamma$, τότε από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$BE = 2\sqrt{R\sigma} \quad \text{και} \quad E\Gamma = 2\sqrt{\rho\sigma}$$

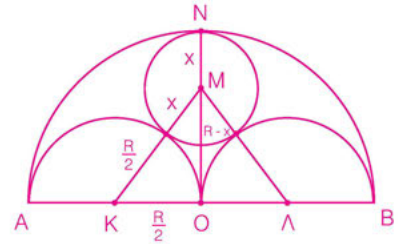
$$\text{Είναι} \quad BE + E\Gamma = B\Gamma \Leftrightarrow 2\sqrt{R\sigma} + 2\sqrt{\rho\sigma} = 2\sqrt{R\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{R\sigma}}{\sqrt{R\rho\sigma}} + \frac{\sqrt{\rho\sigma}}{\sqrt{R\rho\sigma}} = \frac{\sqrt{R\rho}}{\sqrt{R\rho\sigma}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$$



- 14.** Στο διπλανό σχήμα έχουμε τρία ημικύκλια με διαμέτρους $AB = 2R$, $AO = R$ και $BO = R$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται και των τριών ημικυκλίων.



Λύση

Έστω x η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου.

Είναι $KM = ML = x + \frac{R}{2}$ και $OM = ON - MN = R - x$.

Αφού το τρίγωνο MKL είναι ισοσκελές και η MO είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο MOK έχουμε:

$$\begin{aligned} MO^2 + OK^2 &= MK^2 \Leftrightarrow (R - x)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{R}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow R^2 - 2Rx + x^2 + \frac{R^2}{4} &= x^2 + Rx + \frac{R^2}{4} \\ \Leftrightarrow 3Rx &= R^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{3} \end{aligned}$$

- 15.** Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται του κύκλου (O, R) και των ακτίνων του OA, OB με $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

Λύση

Έστω x η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου και I το κέντρο του.

Είναι $OI = OD - ID = R - x$.

Αν Γ το σημείο επαφής του κύκλου (I, x) με την OA , τότε $I\Gamma \perp OA$ και η OI διχοτόμος της $\widehat{O}$, οπότε $\widehat{AOI} = 45^\circ$.

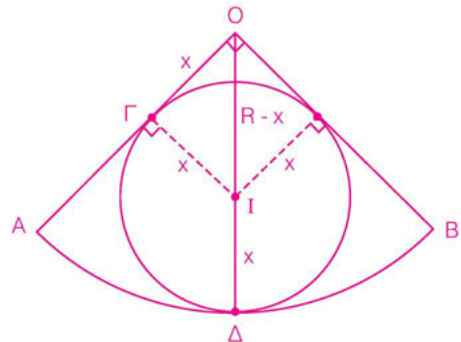
Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο $OI\Gamma$ είναι $\widehat{AOI} = 45^\circ$, έχουμε $O\Gamma = \Gamma I = x$, οπότε

$$\begin{aligned} OI^2 &= I\Gamma^2 + O\Gamma^2 \Leftrightarrow (R - x)^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow R^2 - 2Rx + x^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2Rx - R^2 &= 0 \end{aligned}$$

Είναι $\Delta = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2 > 0$, οπότε

$$x = \frac{-2R \pm \sqrt{8R^2}}{2} = \frac{-2R \pm 2R\sqrt{2}}{2} = R(-1 \pm \sqrt{2})$$

Επειδή $x > 0$, έχουμε $x = R(\sqrt{2} - 1)$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

A. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$)

και το $A\Delta$ ύψος του, τότε:

i. $AB^2 = \dots \cdot \dots$

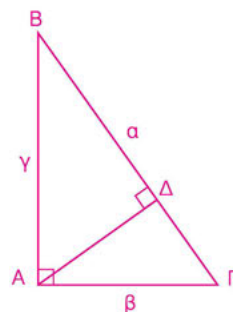
ii. $A\Gamma^2 = \dots \cdot \dots$

iii. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \dots$

iv. $B\Gamma^2 = \dots + \dots$

v. $AB^2 = \dots - \dots$

vi. $A\Delta^2 = \dots \cdot \dots$



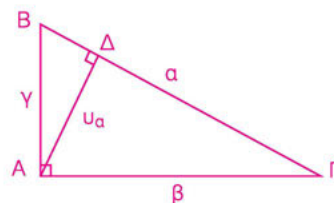
B. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε $\hat{A} = \dots$

Γ. Αν το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι ισοσκελές, τότε $\alpha = \dots \beta$

Δ. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, τότε το ύψος του είναι: $u = \frac{\alpha \dots}{\dots}$

2. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της γραμμής A με τα ίσα τους της γραμμής B από το διπλανό σχήμα.

Στήλη A	Στήλη B
A. $A\Delta^2$	1. $AB \cdot A\Gamma$
B. AB^2	2. $B\Gamma \cdot \Delta B$
Γ. $A\Delta \cdot B\Gamma$	3. $\Delta B \cdot \Delta \Gamma$



A	B	Γ

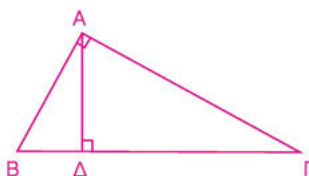
3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ). Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{L}$) και το ύψος του $A\Delta$.

α. $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$

β. $B\Gamma \cdot A\Delta = AB \cdot A\Gamma$

γ. $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 - AB^2$

δ. $\Delta B \cdot \Delta \Gamma = A\Delta^2$



α.	
β.	
γ.	
δ.	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

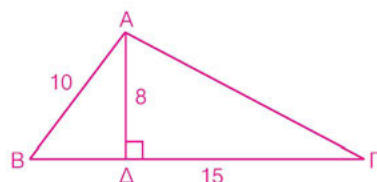
Α. Προβολές κάθετων πλευρών

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = 6$ και $B\Gamma = 9$. Να υπολογίσετε την προβολή της AB στη $B\Gamma$.
5. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AD . Αν $AB = \sqrt{6}$ και $\Gamma D = 1$, να βρείτε το μήκος του BD .
6. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AD . Αν ισχύει $AB = 3A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $DB = 9D\Gamma$.

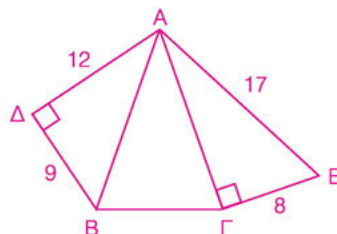
Β. Πυθαγόρειο θεώρημα

7. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AD . Αν $AB = 10$, $D\Gamma = 15$ και $AD = 8$, να βρείτε:

- α. το μήκος του $A\Gamma$,
- β. το μήκος του BD .

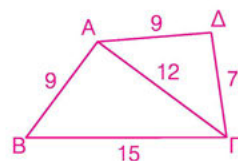


8. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές.



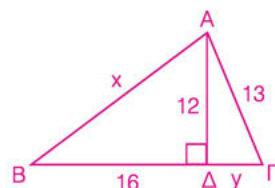
Γ. Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

9. Να εξετάσετε στο διπλανό σχήμα:
 - α. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
 - β. Αν η γωνία Δ είναι ορθή.

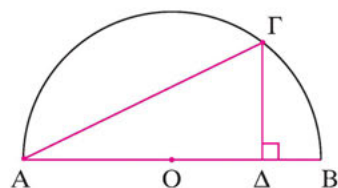


10. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος:

- α. Να υπολογίσετε τα x και y .
- β. Να εξετάσετε, αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

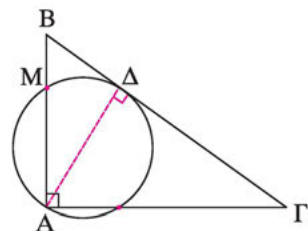


18. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $AB=20$ και σημείο Γ του ημικυκλίου. Αν $\Gamma\Delta \perp AB$ και $A\Delta=4\Delta B$, να υπολογίσετε το μήκος του $A\Gamma$.

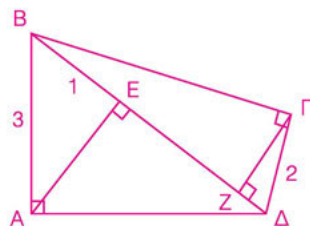


19. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\circ$) με $\beta = 12$ και $\mu_a = 6,5$. Αν το $A\Delta$ είναι ύψος του, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων AB , ΔB και $A\Delta$.
20. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και $AB = 4$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $B\Gamma$, $A\Gamma$, ΔB , $\Delta\Gamma$ και του ύψους $A\Delta$.
21. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 15$ και το ύψος $A\Delta = 6$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$.

22. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$ και $\beta > \gamma$) με $B\Gamma = 25$, το ύψος του $A\Delta = 12$ και τον κύκλο διαμέτρου $A\Delta$ που τέμνει την AB στο M . Να υπολογίσετε το μήκος του AM .

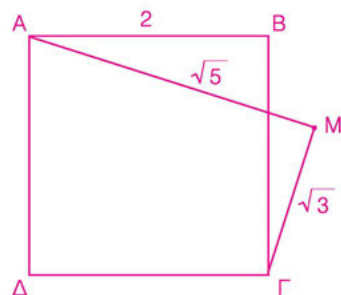


23. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του ZE .

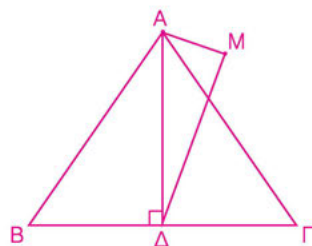


Ε. Ορθογώνιο και ισοσκελές - Ισόπλευρο

24. Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = \sqrt{3}$. Να υπολογίσετε το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου $B\Gamma\Delta$.
25. Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με $AB = 2$. Αν $MA = \sqrt{5}$ και $M\Gamma = \sqrt{3}$. Να δείξετε ότι $\hat{M} = 90^\circ$.



26. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο με $AB = 4\sqrt{3}$. Αν $MA = 2$ και $MD = 4\sqrt{2}$, να δείξετε ότι $\widehat{AM\Delta} = 1\text{L}$.



ΣΤ. Αποδεικτικές

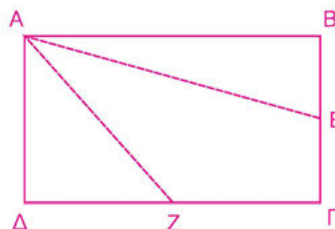
27. Αν οι διαγώνιες ενός τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + A\Delta^2$$

28. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$). Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ . Να δείξετε ότι: $B\Gamma^2 + A\Delta^2 = \Gamma\Delta^2 + AB^2$.

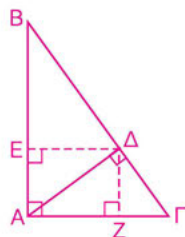
29. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και E, Z τα μέσα των $B\Gamma, \Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι

$$AE^2 + AZ^2 = \frac{5}{4}A\Gamma^2$$



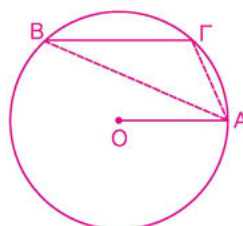
30. Αν $A\Delta$ το ύψος προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ και E, Z οι προβολές του Δ στις $AB, A\Gamma$ αντιστοίχως, να δείξετε ότι:

$$\Delta B \cdot \Delta \Gamma = EA \cdot EB + ZA \cdot Z\Gamma$$



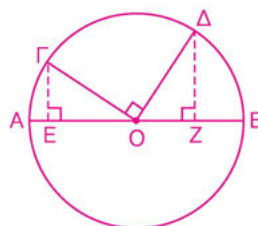
31. Αν μια χορδή $B\Gamma$ ενός κύκλου (O, R) είναι παράλληλη προς μία ακτίνα του OA , να δείξετε ότι:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2$$



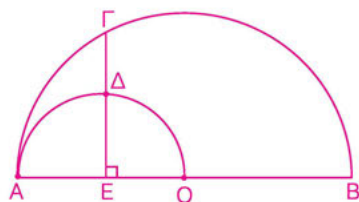
32. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τον κύκλο (O, R) και τις κάθετες ακτίνες $O\Gamma, O\Delta$. Αν $\Gamma E \perp AB$ και $\Delta Z \perp AB$ να δείξετε ότι

$$OE^2 + OZ^2 = R^2$$



33. Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο ημικύκλια με διαμέτρους AB και AO (O το μέσο του AB). Να δείξετε ότι

$$AG = A\Delta\sqrt{2}$$



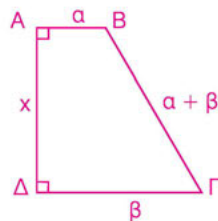
34. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Να δείξετε ότι:

$$\mu_a^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{2}a^2$$

Z. Γενικές

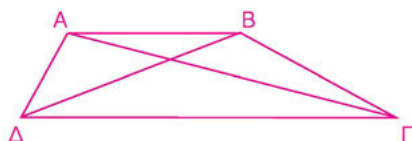
35. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{L}$) είναι: $\beta - \gamma = 2\sqrt{2}$ και $v_a = 1$. Να υπολογίσετε την a .
36. Η περίμετρος ενός ρόμβου είναι 20 και το άθροισμα των διαγώνιών του 14. Να υπολογίσετε τις διαγωνίες του.

37. Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι: $x = 2\sqrt{a\beta}$.



38. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_\beta = 9$, $\mu_\gamma = 12$ και $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$. Να υπολογίσετε την απόσταση του βαρύκεντρου Θ από την πλευρά $B\Gamma$.

39. Αν οι μη παράλληλες πλευρές AD , $B\Gamma$ τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι κάθετες, να δείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεων του.



40. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$ να δείξετε ότι: $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \mu_a^2$.
41. Σε ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και E , Z είναι τα μέσα των διαγωνίων του. Να δείξετε ότι

$$B\Gamma^2 - A\Delta^2 = 4EZ^2$$

42. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει το ύψος AD στο Z και τη διάμεσο AM στο E . Να δείξετε ότι

$$AE \cdot AZ = 2EM \cdot \Delta Z$$

43. Από την κορυφή A ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε μια ευθεία που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Z και την ευθεία $\Gamma\Delta$ στο H . Να δείξετε ότι

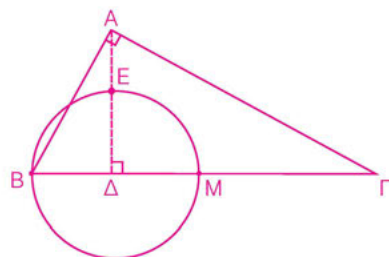
$$\frac{1}{AZ^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2}$$

44. Αν AE, AZ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών AG, AD ενός κύκλου σε μια διάμετρο AB , να δείξετε ότι $\frac{AG^2}{AD^2} = \frac{AE}{AZ}$

45. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, AD το ύψος του και M το μέσο της $B\Gamma$. Αν ο κύκλος διαμέτρου BM τέμνει την AD στο E , να αποδείξετε ότι:

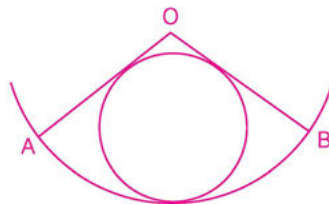
α. $AB = BE\sqrt{2}$

β. $\frac{AD^2}{ED^2} = \frac{DG}{DM}$



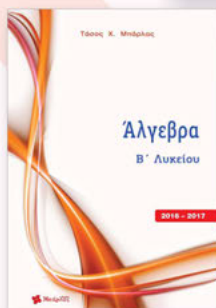
46. Έστω οι κύκλοι $(K, 4a), (L, a)$ με $KL = 6a$. Να υπολογίσετε το μήκος του κοινού εξωτερικού και εσωτερικού εφαπτόμενου τμήματος.

47. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται του κύκλου (O, R) και των ακτίνων του OA, OB με $\hat{AOB} = 120^\circ$.



48. Αν δύο κάθετες χορδές AG και BD κύκλου (O, R) τέμνονται στο Σ , να δείξετε ότι:

$$\Sigma A^2 + \Sigma B^2 + \Sigma \Gamma^2 + \Sigma \Delta^2 = 4R^2$$



Κυκλοφορούν

■ Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου

■ Άλγεβρα Α' Λυκείου

■ Γεωμετρία Α' Λυκείου

■ Άλγεβρα Β' Λυκείου

■ Γεωμετρία Β' Λυκείου

■ Μαθηματικά Β' Λυκείου

■ Μαθηματικά Γ' Λυκείου

■ Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Γενικής Παιδείας

Θετ. Σπουδών – Οικον. & Πληρ. Τεύχη Α' & Β'

ISBN: 978-618-5238-03-2



Λ.Τ. 18,70 €