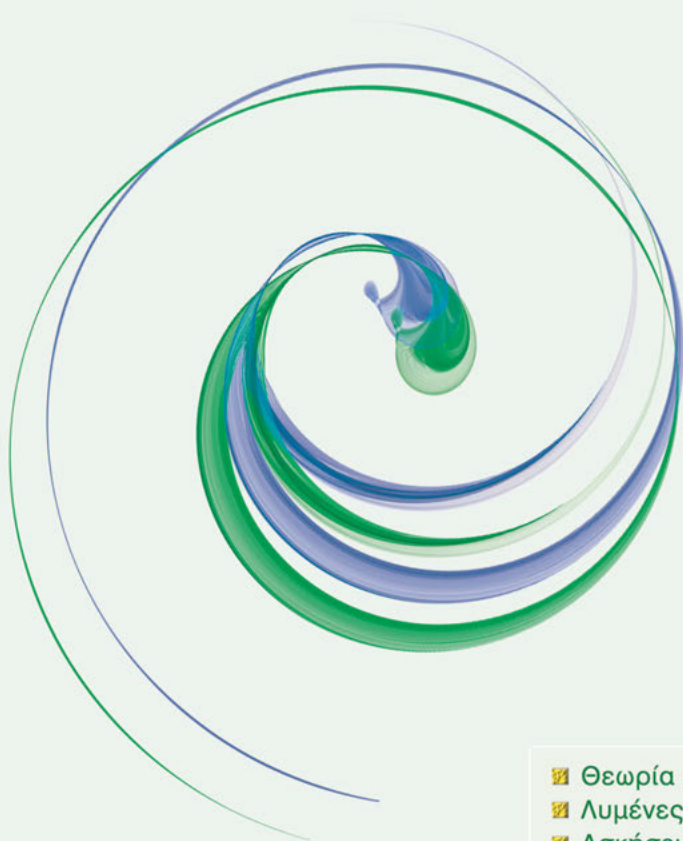


Τάσος Χ. Μπάρλας

Μαθηματικά

Α΄ Γυμνασίου
όλων των επιπέδων



- Θεωρία
- Λυμένες ασκήσεις
- Ασκήσεις για λύση
- Διαγωνίσματα
- Θέματα
- Λύσεις των ασκήσεων και του Σχολικού Βιβλίου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ τάξης Γυμνασίου και είναι γραμμένο σύμφωνα με τις τελευταίες οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Περιέχει:

- ✓ **Αναλυτική θεωρία.**
- ✓ **Παρατηρήσεις στη θεωρία**, στις οποίες στηρίζονται οι απαντήσεις των ερωτήσεων και οι λύσεις των ασκήσεων.
- ✓ **Μεθοδολογία** και **Σχόλια** για τη λύση ασκήσεων.
- ✓ **Λυμένες ασκήσεις**, ως υποδείγματα τρόπου λύσης.
- ✓ **Ασκήσεις για λύση.**
- ✓ **Θέματα** που καλύπτουν όλο το φάσμα των γνώσεων που πρέπει να έχει ο μαθητής, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των εξετάσεων.
- ✓ **Διαγωνίσματα** ανά διδακτική ενότητα.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν:

- **Οι λύσεις των ασκήσεων για λύση** του βιβλίου αυτού .
- **Οι λύσεις των ασκήσεων για λύση** του σχολικού βιβλίου.

Ιούνιος 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α' ΜΕΡΟΣ • ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. • Φυσικοί αριθμοί
 - Διάταξη φυσικών
 - Στρογγυλοποίηση 8
2. Πρόσθεση, Αφαίρεση και Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών 21
3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών 40
4. • Ευκλείδεια διαίρεση
 - Διαιρετότητα 50
5. Χαρακτήρες διαιρετότητας
ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων 58

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

6. Η έννοια του κλάσματος 72
7. Ισοδύναμα κλάσματα 86
8. Σύγκριση κλασμάτων 96
9. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων 104
10. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων 118
11. Διαίρεση κλασμάτων 130

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

12. • Δεκαδικά κλάσματα
 - Δεκαδικοί αριθμοί
 - Διάταξη – Στρογγυλοποίηση 142
13. Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης 152

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

14. Η έννοια της εξίσωσης 156
15. Επίλυση προβλημάτων – Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων 174

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο ΠΟΣΟΣΤΑ

16. Ποσοστά	178
17. Προβλήματα με ποσοστά	187

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

18. Παράσταση σημείων στο επίπεδο	198
19. Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία	206
20. Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες ανάλογων ποσών	214
21. Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας	220
22. Προβλήματα αναλογιών	226
23. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	232

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

24. • Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (ρητοί αριθμοί)	
• Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου	240
25. • Απόλυτη τιμή ρητού	
• Αντίθετοι ρητοί	
• Σύγκριση ρητών	247
26. Πρόσθεση ρητών αριθμών	255
27. Αφαίρεση ρητών αριθμών	264
28. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών	270
29. Διαίρεση ρητών αριθμών	276
30. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών	282

Β' ΜΕΡΟΣ • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^ο ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

31. • Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα	
• Ευθεία – Ημιευθεία	
• Επίπεδο – Ημιεπίπεδο	286
32. Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα	293
33. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος	299

34. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων	306
35. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας	311
36. Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες	316
37. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών	322
38. Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες	329
39. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο	336
40. Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παράλληλων ευθειών	340
41. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου	346
42. Θέσεις ευθείας και κύκλου	351
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9^ο ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ	
43. Συμμετρία ως προς άξονα – Άξονας συμμετρίας	356
44. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος	364
45. Συμμετρία ως προς σημείο – Κέντρο συμμετρίας	369
46. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία	373
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10^ο ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ	
47. Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων	382
48. • Άθροισμα γωνιών τριγώνου • Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου	387
49. • Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο • Τραπεζίο – Ισοσκελές τραπέζιο	397
50. Ιδιότητες παραλληλογράμμου – Ορθογωνίου – Ρόμβου Τετραγώνου – Τραπεζίου – Ισοσκελούς τραπέζιου	402
ΘΕΜΑΤΑ	409
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ	424
Λύσεις των Ασκήσεων για λύση και Θεμάτων	430
Λύσεις των Ασκήσεων του σχολικού βιβλίου	529

3

Δυνάμεις φυσικών αριθμών

Δυνάμεις φυσικών αριθμών

- Τα γινόμενα $3 \cdot 3$ και $5 \cdot 5 \cdot 5$ που έχουν όλους τους παράγοντες ίσους, λέγονται *δυνάμεις*.
- Το γινόμενο $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ που έχει 5 παράγοντες ίσους με το 2, λέγεται *πέμπτη δύναμη του δύο*.

Η δύναμη αυτή για συντομία συμβολίζεται με 2^5 , δηλαδή $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ και διαβάζεται και *δύο στην πέμπτη*.

- Το 2 που φανερώνει τους ίσους παράγοντες, λέγεται *βάση* της δύναμης.
- Το 5 που φανερώνει το πλήθος των ίσων παραγόντων, λέγεται *εκθέτης* της δύναμης.

εκθέτης
↓
 2^5
↑
βάση

παράδειγμα:

- Για τη δύναμη 3 στη δευτέρα, έχουμε:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

- Για τη δύναμη 2 στην τρίτη, έχουμε:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Γενικά

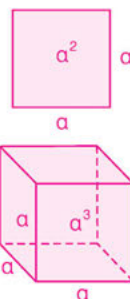
- Το γινόμενο $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ που έχει n παράγοντες ίσους με το a , λέγεται *δύναμη του a στη n ή νιοστή δύναμη του a* και συμβολίζεται a^n .

Δηλαδή $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$

Ο αριθμός a λέγεται *βάση της δύναμης* και ο n λέγεται *εκθέτης*.

Οι δυνάμεις a^2 και a^3

- Η δύναμη a^2 , που παριστάνει το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a , λέγεται και "τετράγωνο του a ".
- Η δύναμη a^3 , που παριστάνει τον όγκο ενός κύβου ακμής a , λέγεται και "κύβος του a ".



Οι δυνάμεις a^2 και a^3 διαβάζονται αντίστοιχα:

- " a στη δευτέρα" ή " a στο τετράγωνο"
- " a στην τρίτη" ή " a στον κύβο".

Η δύναμη a^1

Η δύναμη a^1 που λέγεται **πρώτη δύναμη** του a , είναι ο ίδιος ο αριθμός. Δηλαδή

$$a^1 = a$$

Οπότε οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, μπορεί να γραφεί σαν δύναμη π.χ. $3 = 3^1$.

Οι δυνάμεις 1^v και 0^v , $v \neq 0$

- Οι δυνάμεις του 1 , δηλαδή το 1^v είναι όλες ίσες με 1 . Οπότε

$$1^v = 1$$

παράδειγμα:

$$\bullet 1^{13} = 1$$

$$\bullet 1^{2016} = 1$$

- Οι δυνάμεις του 0 , δηλαδή το 0^v με $v \neq 0$ είναι όλες ίσες με 0 . Οπότε

$$0^v = 0 \text{ με } v \neq 0$$

Βασικές δυνάμεις

Χρήσιμο είναι να γνωρίζουμε τις δυνάμεις που αναφέρονται στους παρακάτω πίνακες.

α.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
a^3	1	8	27	64	125				
a^4	1	16	81	256	625				

β.

a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	25
a^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	625

γ.

	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
	8	16	32	64	128	256	512	1024

Να γράψετε τα παρακάτω γινόμενα σε μορφή δύναμης και στη συνέχεια, να βρείτε τη βάση και τον εκθέτη και να γράψετε πώς διαβάζεται η κάθε δύναμη.

α. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

β. $13 \cdot 13$

γ. $5 \cdot 5 \cdot 5$

Λύση

Είναι:

α. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$

- Η βάση της δύναμης είναι το 7 και ο εκθέτης το 4 .
- Η δύναμη 7^4 διαβάζεται "επτά στην τετάρτη".

β. $13 \cdot 13 = 13^2$

- Η βάση της δύναμης είναι το 13 και ο εκθέτης το 2 .
- Η δύναμη 13^2 διαβάζεται "δεκατρία στη δευτέρα" ή "δεκατρία στο τετράγωνο".

γ. $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$

- Η βάση της δύναμης είναι το 5 και ο εκθέτης το 3 .
- Η δύναμη 5^3 διαβάζεται "πέντε στην τρίτη" ή "πέντε στον κύβο".

Για να υπολογίσουμε δυνάμεις, εργαζόμαστε όπως στο παρακάτω παράδειγμα.

Κάθε μία από τις παρακάτω δυνάμεις να τις γράψετε πρώτα σε μορφή γινομένου και στη συνέχεια, να τις υπολογίσετε.

α. 3^2

β. 2^3

γ. 3^4

δ. 2^5

Λύση

Είναι:

α. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

β. $2^3 = \underline{2 \cdot 2} \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$

γ. $3^4 = \underline{3 \cdot 3} \cdot \underline{3 \cdot 3} = 9 \cdot 9 = 81$

δ. $2^5 = \underline{2 \cdot 2} \cdot \underline{2 \cdot 2} \cdot 2 = \underline{4 \cdot 4} \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Α. Υπολογισμός δυνάμεων**

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. 17^2

β. 5^3

γ. 3^4

δ. 1^{2010}

ε. 0^{37}

στ. 2^{32}

Λύση

Από τον ορισμό της δύναμης, έχουμε:

α. $17^2 = 17 \cdot 17 = 289$

β. $5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{}} = 25 \cdot 5 = 125$

γ. $3^4 = \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{}} = 9 \cdot 9 = 81$

δ. $1^{2010} = 1$

ε. $0^{37} = 0$

στ. Η δύναμη 2^{32} έχει βάση το 2 και εκθέτη το $3^2 = 9$. Οπότε $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

2. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε μορφή δύναμης με τη μικρότερη βάση.

α. 25

β. 81

γ. 121

δ. 32

ε. 625

στ. 1024

Λύση

Είναι:

α. $25 = 5^2$

β. $81 = 3^4$

γ. $121 = 11^2$

δ. $32 = 2^5$

ε. $625 = 5^4$

στ. $1024 = 2^{10}$

B. Δυνάμεις του 10

- Για να υπολογίσουμε μια δύναμη του 10, γράφουμε το 1 και δεξιά του τόσα μηδενικά όσα δηλώνει ο εκθέτης της δύναμης.

$$\text{Δηλαδή } 10^v = 100 \dots 0$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{v \text{ μηδενικά}}$

π.χ. $10^3 = 1000$

- Για να υπολογίσουμε μια δύναμη του 100, γράφουμε το 1 και δεξιά τόσα μηδενικά όσα δηλώνει το γινόμενο του 2 με τον εκθέτη της δύναμης.

π.χ. $100^2 = 10.000$

- Για να υπολογίσουμε μια δύναμη ενός αριθμού που έχει στο τέλος μηδενικά, βρίσκουμε τη δύναμη του αριθμού χωρίς τα μηδενικά και μετά στον αριθμό βάζουμε τόσα μηδενικά, όσο είναι το πλήθος των μηδενικών του αριθμού επί τον εκθέτη της δύναμης.

π.χ. $120^2 = 14400$

3. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. 10^5

β. 100^3

γ. 30^2

δ. 700^2

Λύση

Έχουμε:

α. $10^5 = 100.000$

β. $100^3 = 1.000.000$

γ. $30^2 = 900$

δ. $700^2 = 490.000$

4. α. Να γράψετε το ανάπτυγμα του αριθμού 5207, με χρήση των δυνάμεων του 10.**β. Να γράψετε το ανάπτυγμα του αριθμού 373737, με χρήση των δυνάμεων του 100.****Λύση**

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha. 5.207 &= 5 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 \\ &= 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. 373737 &= 37 \cdot 10.000 + 37 \cdot 100 + 37 \\ &= 37 \cdot 100^2 + 37 \cdot 100^1 + 37 \end{aligned}$$

Γ. Προτεραιότητα πράξεων

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $5^3 - 11^2 + 1^{13}$

β. $7^2 - (5^2 - 3 \cdot 6)^2 + (2^3)^2$

γ. $2 \cdot 3^2 + 2 \cdot (3^3 - 5^2)^3 - (8^2 - 7 \cdot 9)^{2017}$

δ. $2^4 \cdot 5^2 - 3 \cdot [5^3 - 4^2 \cdot (6 \cdot 3^2 - 7^2)]$

Λύση

Είναι:

α. $5^3 - 11^2 + 1^{13} = 125 - 121 + 1 = 4 + 1 = 5$

β. $7^2 - (5^2 - 3 \cdot 6)^2 + (2^3)^2 =$
 $= 49 - (25 - 18)^2 + 8^2$
 $= 49 - 7^2 + 64$
 $= 49 - 49 + 64$
 $= 64$

γ. $2 \cdot 3^2 + 2 \cdot (3^3 - 5^2)^3 - (8^2 - 7 \cdot 9)^{2017} =$
 $= 2 \cdot 9 + 2 \cdot (27 - 25)^3 - (64 - 63)^{2017}$
 $= 18 + 2 \cdot 2^3 - 1^{2017}$
 $= 18 + 2 \cdot 8 - 1$
 $= 18 + 16 - 1$
 $= 34 - 1$
 $= 33$

δ. $2^4 \cdot 5^2 - 3 \cdot [5^3 - 4^2 \cdot (6 \cdot 3^2 - 7^2)] = 16 \cdot 25 - 3 \cdot [125 - 16 \cdot (6 \cdot 9 - 49)]$
 $= 400 - 3 \cdot [125 - 16 \cdot (54 - 49)]$
 $= 400 - 3 \cdot (125 - 16 \cdot 5)$
 $= 400 - 3 \cdot (125 - 80)$
 $= 400 - 3 \cdot 45$
 $= 400 - 135$
 $= 265$

Η προτεραιότητα των πράξεων

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α. $3^2 = 3 \cdot 2$

β. $2^5 = 10$

γ. $1^7 = 1$

α.	
β.	
γ.	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Υπολογισμός δυνάμεων

2. Να γράψετε με τη μορφή δύναμης καθένα από τα παρακάτω γινόμενα και στη συνέχεια να βρείτε τη βάση της δύναμης και τον εκθέτη και να γράψετε πως διαβάζεται η κάθε δύναμη.

α. $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

β. $17 \cdot 17$

γ. $4 \cdot 4 \cdot 4$

3. Να γράψετε με τη μορφή γινομένων τις δυνάμεις και στη συνέχεια να τις υπολογίσετε.

α. 3^2

β. 2^3

γ. 11^2

δ. 2^4

4. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. 5^2

β. 7^2

γ. 9^2

δ. 1^{17}

ε. 2^3

στ. 5^3

ζ. 3^3

η. 0^7

θ. 3^4

ι. 5^4

ια. 2^4

5. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. 11^2

β. 15^2

γ. 12^2

δ. 13^2

ε. 25^2

στ. 19^2

6. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. 2^{3^2}

β. 3^{2^2}

γ. $2^{2^{2^2}}$

7. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες:

α.

a	2	3	4	5	6	8	9
a^2							
a^3							
a^4							

β.

a	11	12	13	15	17	18	19	25
a^2								

8. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:

α. $\dots^2 = 49$

β. $\dots^3 = 8$

γ. $\dots^4 = 81$

δ. $2^{\dots} = 32$

ε. $13^{\dots} = 169$

στ. $2^{\dots} = 1024$

9. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε μορφή δύναμης με τη μικρότερη βάση.

α. 9

β. 36

γ. 4

δ. 16

ε. 8

στ. 27

ζ. 125

η. 64

10. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε μορφή δύναμης με τη μικρότερη βάση.

α. 169

β. 225

γ. 121

δ. 625

ε. 144

στ. 1024

B. Δυνάμεις του 10

11. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα.

x	20	30	40	50	60	70	80	90
x^2								

12. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. 10^6

β. 100^2

γ. 40^3

δ. 130^2

ε. 500^2

13. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς στην κανονική μορφή.

α. $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4$

β. $7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1$

γ. $5 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10$

14. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε αναπτυγμένη μορφή με χρήση δυνάμεων του 10 .

α. 358

β. 2.367

γ. 53.020

15. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε μορφή δύναμης.

α. 400

β. 900

γ. 2500

δ. 4900

ε. 12100

στ. 22500

ζ. 27000

η. 8000

Γ. Προτεραιότητα πράξεων

16. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $3^2 - 2^3$

β. $5^2 - 2^4$

γ. $3^3 - 4^2 + 1^{15}$

δ. $6^2 - 2^5 + 0^3$

ε. $5^3 - 3^4 + 1^7$

στ. $8^2 - 4^3 + 0^7$

17. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $13^2 - 12^2 - 5^2$

β. $17^2 - 15^2 - 8^2$

γ. $16^2 + 12^2 - 20^2$

δ. $5^4 - 15^2 - 1^{35}$

ε. $30^3 - 20^2 - 3^4$

στ. $130^2 - 120^2 + 110^2$

18. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $7 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2^3$

β. $2 \cdot 5^2 - 7^2 + 1^{13}$

γ. $5^2 \cdot 2^3 - 5^3$

δ. $3^4 - 5 \cdot 2^4 + 2^5$

ε. $4^3 - 2 \cdot 3^3 + 1^{2017}$

στ. $2^{10} - 2^3 \cdot 5^3 - 0^{17}$

19. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(2^3)^2 + (3^2)^2$

β. $3 \cdot (2^2)^3 - (1^{13})^{15} + (5^2)^2$

20. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $3 + (2 + 3)^2 - (7 - 5)^3 + (2 \cdot 3)^2$

β. $3^4 - 2(7^2 - 6 \cdot 7)$

γ. $5 \cdot 6 + 2 \cdot (15 - 3 \cdot 4) + 7^2$

δ. $11^2 - 2(6 \cdot 3 - 2^3) + 1^7$

ε. $(2^3 - 7) \cdot (7^2 - 6 \cdot 7) + (2^2)^3$

στ. $13^2 - (2^2)^3 + 3 \cdot 2^5$

ζ. $(3 \cdot 2^3)^2 - (2^3)^2 + (10 - 3^2)^{20}$

η. $2 \cdot (9^2 - 3 \cdot 5^2)^2 + (3^2)^2 \cdot (4^3 - 62)$

21. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $12^2 - 2 \cdot [3^4 - 20(2^3 - 3 \cdot 2)]$

β. $20^2 - 3 \cdot [8^2 - 2 \cdot (5^3 - 11^2)]$

γ. $12^2 - 2^3 \cdot [3^4 - 5 \cdot (3^3 - 11)]^{2010}$

δ. $13 + (6^2 - 4 \cdot 9)^{35} \cdot (789^3 + 34^{56})$

22. Για $x = 2$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = 3x^2 - 5x - 1$

β. $B = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 3$

γ. $\Gamma = 3x^4 - 6x^3 + 5$

δ. $\Delta = 5x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 1$

23. Για $x = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$

β. $B = 2x^4 + 5x^3 - 7x - 1$

24. Για $x = 5$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = 2x^3 - 10x^2 + 3x - 2$

β. $B = x^4 - x^3 - 4x^2 - 6x - 1$

25. Για $x = 3$ και $y = 2$, να συγκρίνετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = (x + y)^2$ και $B = x^2 + 2xy + y^2$

β. $A = (x + y)^3$ και $B = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

26. Αν $x = 2^5 - 3^3$ και $y = 3^4 - 5 \cdot 2^4 + 1^{53}$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = x^3 - xy + y^7$

β. $B = (x - y)^5 - 3x^2y + x \cdot (y - 1)^{203}$

Δ. Γενικές

27. Αν $\alpha + \beta = 5^3 - 11^2$ και $\beta + \gamma = 13^2 - 12^2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 2^3 \cdot \alpha + 3^2 \cdot \beta + 1^{17} \cdot \gamma$.

28. Για $x = 17$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = (x^2 - 101) \cdot (x^2 - 102) \cdot (x^2 - 103) \cdot \dots \cdot (x^2 - 289)$$

TEST

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α. $7^2 = \dots$

β. $5^3 = \dots$

γ. $\dots^4 = 81$

2. Να κάνετε τις πράξεις $7 + 3 \cdot 4^2 + 2^3 \cdot 3^2 + 1^{23}$.

3. Να κάνετε τις πράξεις $(2^2 + 1)^4 + 10^2 \cdot [3^4 - 4^3 \cdot (6^2 - 5 \cdot 7)]$.

6

Η έννοια του κλάσματος

Η έννοια του κλάσματος

παράδειγμα

Η Έλλη κόβει με το μαχαίρι ένα καρπούζι σε 5 ίσα κομμάτια και παίρνει ένα κομμάτι.

- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η Έλλη πήρε το "ένα πέμπτο" του καρπουζιού.

Αντί για την έκφραση "το ένα πέμπτο" χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\frac{1}{5}$ που λέγεται *κλασματική μονάδα*.

Η σειρά που γράφουμε το σύμβολο $\frac{1}{5}$ είναι:

- Πρώτα γράφουμε τη *κλασματική γραμμή*, $—$, (μαχαίρι) στη γραμμή του τετραδίου.
- Ύστερα γράφουμε το 5, $\frac{1}{5}$, (αφού πρώτα το κόψαμε σε 5 ίσα κομμάτια).
- Στη συνέχεια το 1, $\frac{1}{5}$, (αφού πήραμε 1 κομμάτι).
- Αν η Έλλη πάρει 3 κομμάτια από τα 5, δηλαδή τα "τρία πέμπτα", τότε αντί για την έκφραση "τρία πέμπτα" χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\frac{3}{5}$ που λέγεται *κλάσμα*.



Γενικά

- Το σύμβολο $\frac{1}{v}$ (v φυσικός, $\neq 0$) που εκφράζει το 1 από τα v ίσα μέρη στα οποία χωρίζεται μια ποσότητα, ονομάζεται *κλασματική μονάδα*.
- **Κλάσμα** ή **κλασματικός αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{\kappa}{v}$, όπου κ, v φυσικοί αριθμοί και $v \neq 0$.

- Το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ εκφράζει τα κ μέρη από τα ν ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μια ποσότητα και διαβάζεται "κάπα νιοστά".
 - Ο αριθμός κ λέγεται **αριθμητής** και ο ν **παρονομαστής** του κλάσματος.
 - Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι διαφορετικός από το 0.
 - Οι αριθμοί κ και ν λέγονται **όροι** του κλάσματος.
- Τα κάπα νιοστά είναι κ φορές το ένα νιοστό. Δηλαδή

$$\frac{\kappa}{\nu} = \kappa \cdot \frac{1}{\nu}$$

$$\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$$

- Τα ν νιοστά: $\frac{\nu}{\nu}$ είναι **όλο** το μέγεθος.

παράδειγμα: Τα $\frac{3}{3}$ και τα $\frac{5}{5}$ εκφράζουν το ίδιο μέγεθος.

- Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή.

Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.

παράδειγμα: Είναι:

- $\frac{4}{3} > 1$, διότι $4 > 3$
- $\frac{3}{5} < 1$, διότι $3 < 5$

Το κλάσμα ως διαίρεση

Κάθε κλάσμα παριστάνει και το πηλίκο της διαίρεσης, με διαιρετέο τον αριθμητή του κλάσματος και παρονομαστή το διαιρέτη του κλάσματος. Δηλαδή

$$\frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu$$

Οπότε $\kappa \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu$.

Από τα παραπάνω έχουμε:

- $\frac{a}{1} = a : 1 = a$

Δηλαδή:

Κάθε φυσικός αριθμός a γράφεται ως κλάσμα με αριθμητή a και παρονομαστή τη μονάδα.

- $\frac{a}{a} = a : a = 1$, με $a \neq 0$

Δηλαδή:

Αν οι όροι ενός κλάσματος είναι ίσοι, τότε το κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα.

- $\frac{0}{a} = 0 : a = 0$, με $a \neq 0$

Δηλαδή:

Αν ένα κλάσμα έχει αριθμητή το 0 , τότε το κλάσμα είναι ίσο με το 0 .

παράδειγμα:

- $\frac{12}{3} = 12 : 3 = 4$

- $21 \cdot \frac{1}{7} = \frac{21}{7} = 21 : 7 = 3$

- $\frac{1}{3} \cdot 15 = \frac{15}{3} = 15 : 3 = 5$

- $\frac{3}{1} = 3$

- $5 = \frac{5}{1}$

- $\frac{7}{7} = 1$

- $1 = \frac{3}{3}$

- $\frac{0}{23} = 0$

Σύνοψη

► $\kappa \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu$

► • $a = \frac{a}{1}$

- $\frac{a}{a} = 1$

- $\frac{0}{a} = 0$

► • Αν $a < \beta$, τότε $\frac{a}{\beta} < 1$.

- Αν $a > \beta$, τότε $\frac{a}{\beta} > 1$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Ιδιότητες Κλασμάτων

1. Να βρείτε με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίσο καθένα από τα παρακάτω κλάσματα.

α. $\frac{72}{8}$

β. $\frac{17}{1}$

γ. $\frac{15}{15}$

δ. $\frac{0}{12}$

Λύση

Είναι:

α. $\frac{72}{8} = 72 : 8 = 9$

[διότι $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$]

β. $\frac{17}{1} = 17$

[διότι $\frac{\alpha}{1} = \alpha$]

γ. $\frac{15}{15} = 1$

[διότι $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$]

δ. $\frac{0}{12} = 0$

[διότι $\frac{0}{\alpha} = 0$]

2. Να βάλετε τους αριθμούς: $\frac{7}{6}$, $\frac{3}{5}$, 1 σε αύξουσα σειρά.

Λύση

- Επειδή ο αριθμητής 7 του κλάσματος $\frac{7}{6}$ είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή 6, το κλάσμα $\frac{7}{6}$ είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα. Δηλαδή

$$\frac{7}{6} > 1$$

- Είναι $3 < 5$, οπότε $\frac{3}{5} < 1$.

Οπότε, σε αύξουσα σειρά οι αριθμοί είναι:

$$\frac{3}{5}, 1, \frac{7}{6}$$

B. Αναγωγή στη (κλασματική) μονάδα $\frac{1}{v}$

Εύρεση κλασματικής μονάδας του α

Το $\frac{1}{v}$ του αριθμού α , είναι $\frac{1}{v} \cdot \alpha = \frac{\alpha}{v}$.

3. Να βρείτε το $\frac{1}{7}$ του 35.

Λύση

Το $\frac{1}{7}$ του 35 είναι:

$$\frac{1}{7} \cdot 35 = \frac{35}{7} = 5$$

Εύρεση $\frac{\kappa}{v}$ του α

Επειδή $\frac{\kappa}{v} = \kappa \cdot \frac{1}{v}$, τα $\frac{\kappa}{v}$ του α είναι κ κλασματικές μονάδες.

Οπότε, για να βρούμε τα $\frac{\kappa}{v}$ του α :

- Βρίσκουμε αρχικά την κλασματική μονάδα και στη συνέχεια
- Πολλαπλασιάζουμε την κλασματική μονάδα με το κ .

Η παραπάνω μέθοδος λέγεται **αναγωγή στη μονάδα**.

4. Να βρείτε τα $\frac{4}{5}$ του 40.

Λύση

- Το $\frac{1}{5}$ του 40 είναι $\frac{1}{5} \cdot 40 = \frac{40}{5} = 8$.
- Τα $\frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5}$ του 40 είναι $4 \cdot 8 = 32$.

Εύρεση όλου του μεγέθους

Είναι $\frac{v}{v} = v \cdot \frac{1}{v}$.

Οπότε, αν γνωρίζουμε την κλασματική μονάδα, τότε μπορούμε να βρούμε όλο το μέγεθος, που είναι v κλασματικές μονάδες.

5. Αν το $\frac{1}{5}$ ενός αριθμού v είναι 6, ποιος είναι ο αριθμός v ;

Λύση

- Το $\frac{1}{5}$ του v είναι 6.
- Τα $\frac{5}{5} = 5 \cdot \frac{1}{5}$ του v είναι $5 \cdot 6 = 30$.

Άρα $v = 30$.

6. Τα $\frac{3}{4}$ ενός αριθμού v είναι 9. Ποιος είναι ο αριθμός v ;

Λύση

- Τα $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$ του v είναι 9.
- Το $\frac{1}{4}$ του v είναι $9:3 = 3$.
- Τα $\frac{4}{4} = 4 \cdot \frac{1}{4}$ του v είναι $4 \cdot 3 = 12$.

Άρα $v = 12$.

7. Τα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού v είναι 16. Να βρείτε:

α. τον αριθμό v

β. τα $\frac{5}{8}$ του v .

Λύση

α. • Τα $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$ του ν είναι 16 .

• Το $\frac{1}{3}$ του ν είναι $16:2 = 8$.

• Τα $\frac{3}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3}$ του ν , δηλαδή ο ν είναι $3 \cdot 8 = 24$.

Άρα $\nu = 24$.

β. • Το $\frac{1}{8}$ του 24 είναι $24:8 = 3$.

• Τα $\frac{5}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$ του 24 είναι $5 \cdot 3 = 15$.

Γ. Προβλήματα

8. Μια δεξαμενή νερού χωράει 3.000 lt. Αν είναι γεμάτη κατά τα $\frac{3}{5}$, πόσα λίτρα νερού περιέχει;

Λύση

• Το $\frac{1}{5}$ της δεξαμενής χωράει $\frac{1}{5} \cdot 3.000 = \frac{3.000}{5} = 600$ lt .

• Τα $\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$ της δεξαμενής περιέχουν $3 \cdot 600 = 1800$ lt .

9. Ένα κατάστημα σε όλα τα είδη του κάνει έκπτωση ίση με τα $\frac{3}{7}$ της αρχικής τους τιμής. Ένα πουκάμισο κόστιζε 42 € πριν την έκπτωση. Να υπολογίσετε πόσα ευρώ έκπτωση έγινε στο πουκάμισο και πόσο θα πληρώσουμε για να το αγοράσουμε.

Λύση

• Το $\frac{1}{7}$ της αρχικής τιμής του πουκάμισου είναι $42:7 = 6$ € .

• Τα $\frac{3}{7} = 3 \cdot \frac{1}{7}$ είναι $3 \cdot 6 = 18$ € .

Άρα η έκπτωση είναι 18 € .

Τα χρήματα που θα πληρώσουμε για να το αγοράσουμε, είναι:

$$42 - 18 = 24 \text{ €}$$

10. Στο τμήμα A_2 μια μέρα απουσίαζε το $\frac{1}{12}$ των μαθητών. Αν οι παρόντες μαθητές ήταν 22, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το A_2 .

Λύση

Αφού απουσίαζε εκείνη την ημέρα το $\frac{1}{12}$ των μαθητών, παρόντες ήταν τα $\frac{11}{12}$.

- Τα $\frac{11}{12} = 11 \cdot \frac{1}{12}$ των μαθητών είναι 22.
- Το $\frac{1}{12}$ των μαθητών είναι $22:11 = 2$.
- Τα $\frac{12}{12} = 12 \cdot \frac{1}{12}$ των μαθητών του είναι $12 \cdot 2 = 24$.

Άρα το A_2 έχει 24 μαθητές.

11. Τα $\frac{4}{5}$ των θρανίων ενός Γυμνασίου είναι 60. Να βρείτε:

α. Πόσα θρανία έχει το Γυμνάσιο;

β. Τα $\frac{3}{5}$ των θρανίων.

Λύση

- α.**
- Τα $\frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5}$ των θρανίων είναι 60.
 - Το $\frac{1}{5}$ των θρανίων είναι $60:4 = 15$.
 - Τα $\frac{5}{5} = 5 \cdot \frac{1}{5}$ των θρανίων είναι $5 \cdot 15 = 75$ θρανία.

Άρα το Γυμνάσιο έχει 75 θρανία.

- β.**
- Το $\frac{1}{5}$ των θρανίων είναι 15.
 - Τα $\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$ των θρανίων είναι $3 \cdot 15 = 45$ θρανία.

Άρα τα $\frac{3}{5}$ των θρανίων είναι 45 θρανία.

12. Τα $\frac{2}{3}$ ενός κιλού κρέατος κοστίζουν 8 €. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{3}{4}$ του κιλού;

Λύση

► • Τα $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$ του κιλού κοστίζουν 8 € .

• Το $\frac{1}{3}$ του κιλού κοστίζει $8:2 = 4$ € .

• Τα $\frac{3}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3}$ του κιλού, δηλαδή το 1 κιλό κοστίζει $3 \cdot 4 = 12$ € .

► • Το $\frac{1}{4}$ του κιλού κοστίζει $12:4 = 3$ € .

• Τα $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$ του κιλού κοστίζουν $3 \cdot 3 = 9$ € .

Άρα τα $\frac{3}{4}$ του κιλού κοστίζουν 9 € .

Δ. Γενικές

13. Να δείξετε ότι το κλάσμα $\frac{10^v + 2 \cdot 10^u + 78}{9}$, $v, u > 2$ παριστάνει φυσικό αριθμό.

Λύση

Είναι $\frac{10^v + 2 \cdot 10^u + 78}{9} = (10^v + 2 \cdot 10^u + 78):9$.

Αρκεί να δείξουμε ότι το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $10^v + 2 \cdot 10^u + 78$ διαιρείται με το 9 .

Έχουμε

$$10^v + 2 \cdot 10^u + 78 = \underbrace{100 \dots 0}_{v \text{ μηδενικά}} + 2 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{u \text{ μηδενικά}} + 78$$

$$100 \dots 0 + 200 \dots 0 + 78$$

Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που προκύπτει μετά την πρόσθεση των αριθμών

$$\underbrace{100 \dots 0}_{v \text{ μηδενικά}} , \quad \underbrace{200 \dots 0}_{u \text{ μηδενικά}} \quad \text{και} \quad 78$$

είναι $1 + 2 + 7 + 8 = 18$ που διαιρείται με το 9 .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. $\frac{\dots}{\alpha} = 0$

β. $\frac{\alpha}{\dots} = 1$

γ. $\frac{\alpha}{\dots} = \alpha$

δ. $\kappa \cdot \frac{1}{\nu} = \dots$

ε. Το $\frac{1}{2}$ των 100 € είναι ...

στ. Το $\frac{1}{5}$ των 40 € είναι ...

ζ. Το κλάσμα $\frac{5}{7}$ είναι της μονάδας.

η. Το κλάσμα $\frac{3}{2}$ είναι της μονάδας.

2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Αν $\frac{x}{5} = 1$, τότε $x = \dots$

β. Αν $\frac{a}{3} = 0$, τότε $a = \dots$

γ. Αν $\frac{5}{\nu} = 5$, τότε $\nu = \dots$

3. Από το διπλανό σχήμα να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.



α. $AB = \frac{\dots}{\dots}$ του $A\Delta$

β. $A\Gamma = \frac{\dots}{\dots}$ του AZ

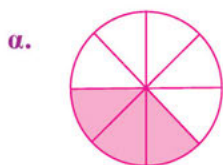
γ. $AE = \frac{\dots}{\dots}$ του $A\Gamma$

δ. $A\Theta = \frac{\dots}{\dots}$ του $A\Delta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Ιδιότητες Κλασμάτων

4. Τα παρακάτω σχήματα έχουν χωριστεί σε ίσα μέρη. Να γράψετε για το καθένα από αυτά το κλάσμα που εκφράζει το σκιασμένο μέρος του.



$\frac{\dots}{\dots}$



$\frac{\dots}{\dots}$



$\frac{\dots}{\dots}$

5. Να βρείτε με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίσα τα κλάσματα:

α. $\frac{6}{3}$

β. $\frac{10}{5}$

γ. $\frac{24}{8}$

δ. $\frac{35}{7}$

ε. $\frac{56}{8}$

στ. $\frac{72}{9}$

ζ. $\frac{90}{18}$

η. $\frac{255}{17}$

6. Να βρείτε με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίσα τα κλάσματα:

α. $\frac{5}{1}$

β. $\frac{5}{5}$

γ. $\frac{0}{7}$

δ. $\frac{13}{1}$

ε. $\frac{0}{123}$

στ. $\frac{13}{13}$

7. Να γράψετε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι μεγαλύτερα και ποια μικρότερα της μονάδας.

$$\frac{6}{11}, \quad \frac{0}{7}, \quad \frac{13}{13}, \quad \frac{83}{84}, \quad \frac{235}{137}$$

8. Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

α. $1, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{5}{6}$

β. $\frac{7}{6}, \quad \frac{6}{7}, \quad 1$

Β. Αναγωγή στη (κλασματική) μονάδα $\frac{1}{v}$

9. Να βρείτε:

α. Το $\frac{1}{5}$ του 40 .

β. Το $\frac{1}{3}$ του 52 .

10. Να βρείτε:

α. Το $\frac{1}{7}$ και τα $\frac{5}{7}$ του 21 .

β. Το $\frac{1}{5}$ και τα $\frac{3}{5}$ του 60 .

11. Να βρείτε:

α. Τα $\frac{3}{5}$ του 18 .

β. Τα $\frac{5}{7}$ του 30 .

12. Να βρείτε τον αριθμό v , του οποίου:

α. το $\frac{1}{5}$ του v είναι 20

β. το $\frac{1}{8}$ του v είναι 4 .

13. Να βρείτε τον αριθμό v , του οποίου:

α. τα $\frac{3}{5}$ του v είναι 12

β. τα $\frac{5}{6}$ του v είναι 35 .

14. Αν τα $\frac{3}{5}$ ενός αριθμού v είναι 18 , να βρείτε:

α. τον αριθμό v

β. τα $\frac{5}{6}$ του v .

15. Αν τα $\frac{3}{4}$ ενός αριθμού n είναι 15, να βρείτε:
- α. τον αριθμό n
 - β. τα $\frac{2}{5}$ του n .
16. Αν τα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού n είναι 8, να βρείτε τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού n .
17. Αν τα $\frac{5}{6}$ ενός αριθμού n είναι 15, να βρείτε τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού n .

Γ. Προβλήματα

18. Η Γ' τάξη ενός Γυμνασίου έχει 45 μαθητές και το $\frac{1}{5}$ αυτών παρακολουθεί Γερμανικά. Πόσοι μαθητές δεν παρακολουθούν Γερμανικά;
19. Η Α' τάξη ενός Λυκείου έχει 64 μαθητές και τα $\frac{5}{8}$ των μαθητών είναι κορίτσια. Πόσα είναι τα αγόρια;
20. Τα $\frac{3}{8}$ των μαθητών μιας τάξης είναι 21 μαθητές. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη.
21. Η μια πλευρά ενός ορθογωνίου είναι 24 cm και η άλλη τα $\frac{5}{4}$ της πρώτης. Να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου.
22. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση στα είδη του ίση με τα $\frac{2}{7}$ της αρχικής τους τιμής. Ένα ζευγάρι παπούτσια κόστιζε 42 € πριν την έκπτωση. Να υπολογίσετε πόσα ευρώ έγινε έκπτωση και πόσο θα πληρώσουμε για να τα αγοράσουμε.
23. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση στα είδη του ίση με τα $\frac{4}{9}$ της αρχικής τους τιμής. Η έκπτωση σ' ένα ραδιοφωνικό δέκτη είναι 20 €. Ποια είναι η αρχική τιμή του ραδιοφωνικού δέκτη και πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσουμε για να τον αγοράσουμε;

48

- Άθροισμα γωνιών τριγώνου
- Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Το **άθροισμα** των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .

Δηλαδή στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

Απόδειξη

Έστω η ευθεία xAy , που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς την ευθεία $B\Gamma$.

Παρατηρούμε ότι:

- $\hat{xAB} = \hat{\omega} = \hat{B}$ γιατί είναι εντός εναλλάξ γωνίες, των παράλληλων ευθειών xAy και $B\Gamma$, που τέμνονται από την AB .
- $\hat{yAG} = \hat{\theta} = \hat{\Gamma}$ γιατί είναι εντός εναλλάξ γωνίες των παράλληλων ευθειών xAy και $B\Gamma$, που τέμνονται από την AG .

Οι γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{A}$ και $\hat{\theta}$ σχηματίζουν μια ευθεία γωνία.

Επομένως θα είναι $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\theta} = 180^\circ$.

Επειδή όμως είναι $\hat{\omega} = \hat{B}$ και $\hat{\theta} = \hat{\Gamma}$, θα έχουμε $\hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών τριγώνου προκύπτουν οι εξής προτάσεις:

1. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.

Απόδειξη

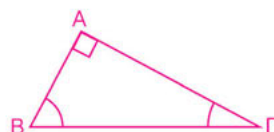
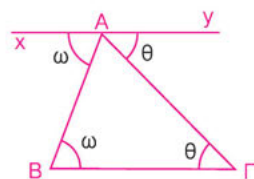
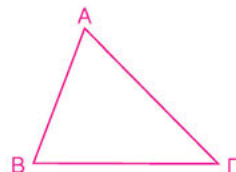
Σχεδιάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Επειδή είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ θα έχουμε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Γνωρίζουμε ότι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° λέγονται συμπληρωματικές.

Άρα σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές.



2. Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου ισούται με την εξωτερική της τρίτης γωνίας. (Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\widehat{A\Gamma x}$ που σχηματίζεται από την $A\Gamma$ και την προέκταση της $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ , ονομάζεται εξωτερική γωνία της $\widehat{\Gamma}$).

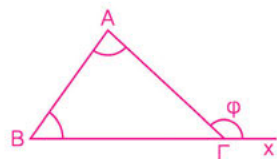
Απόδειξη

Η εξωτερική γωνία $\widehat{\phi}$ είναι παραπληρωματική της εσωτερικής γωνίας $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου, δηλαδή θα είναι $\widehat{\phi} = 180^\circ - \widehat{\Gamma}$.

Επειδή σε κάθε τρίγωνο είναι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$,

άρα $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{\Gamma}$, δηλαδή $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{\phi}$.

Άρα, η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου.



3. Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι όλες ίσες με 60° .

Απόδειξη

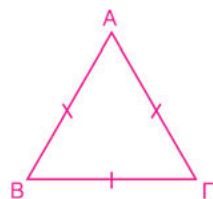
Γνωρίζουμε ότι στο ισόπλευρο τρίγωνο είναι $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Επειδή σε κάθε τρίγωνο είναι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$,

θα είναι $\widehat{A} + \widehat{A} + \widehat{A} = 180^\circ$, δηλαδή $3 \cdot \widehat{A} = 180^\circ$,

συνεπώς $\widehat{A} = 180^\circ : 3 = 60^\circ$.

Άρα όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες με 60° .



4. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι 45° .

Απόδειξη

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$.

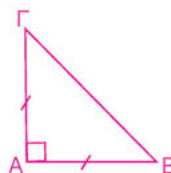
Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή,

δηλαδή $\widehat{A} = 90^\circ$, θα είναι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο είναι και ισοσκελές θα είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, άρα θα είναι

$\widehat{B} + \widehat{B} = 90^\circ$, από την οποία προκύπτει ότι $2 \cdot \widehat{B} = 90^\circ$,

δηλαδή θα έχουμε $\widehat{B} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$ και επομένως και $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$.



Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο:

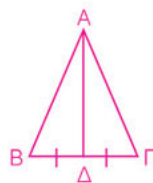
- Η ευθεία της διαμέσου, που αντιστοιχεί στη βάση είναι άξονας συμμετρίας του.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.

π.χ. Αν Δ το μέσο του $B\Gamma$, τότε:

- $AD \perp B\Gamma$
- $\widehat{BAD} = \widehat{DAG}$

- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του είναι ίσες.

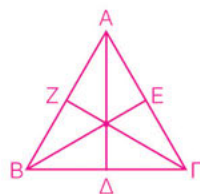
π.χ. Αν $AB = AG$, τότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$



Ιδιότητες ισόπλευρου τριγώνου

Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει:

- Οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας του.
- Κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
- Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

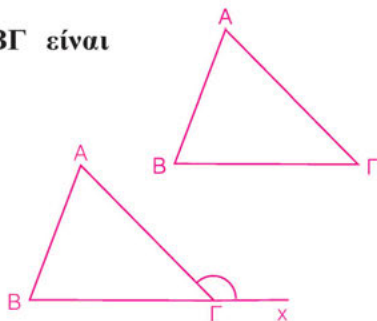


Σύνοψη

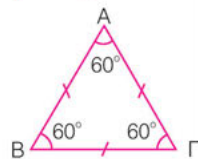
- Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 180° . Δηλαδή $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$.

- Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του.

π.χ. $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon} = \widehat{A} + \widehat{B}$

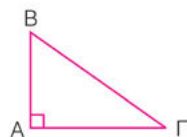


- Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι όλες ίσες με 60° .

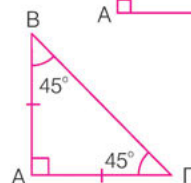


- Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.

Δηλαδή $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$.



- Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου είναι 45° .



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα μέτρα των γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου, αν το μέτρο της μίας γωνίας του είναι 92° .

Λύση

Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Τότε θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Επειδή ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο αμβλείες γωνίες αποκλείεται να είναι οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ίσες με 92° .

Οπότε $\hat{A} = 92^\circ$.

Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

$$92^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ$$

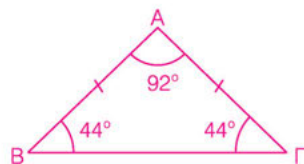
$$2\hat{B} = 180^\circ - 92^\circ$$

$$2\hat{B} = 88^\circ$$

$$\hat{B} = 88^\circ : 2$$

$$\hat{B} = 44^\circ$$

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 44^\circ$.



2. Έστω ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) στο εξωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$.

Λύση

Είναι $B\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}\Delta$.

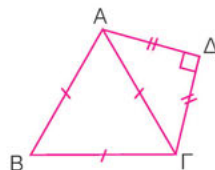
Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο έχουμε

$$B\hat{\Gamma}A = 60^\circ$$

Αφού το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές έχουμε

$$A\hat{\Gamma}\Delta = 45^\circ$$

Οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}\Delta = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$.



3. Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ η εξωτερική γωνία της $\hat{\Gamma}$ είναι 126° και η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια της $\hat{A}$. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου.

Λύση

Επειδή η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου, έχουμε:

$$\hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = \hat{A} + \hat{B} \quad \text{ή} \quad 126^\circ = \hat{A} + \hat{B} \quad \text{ή} \quad \hat{A} + \hat{B} = 126^\circ$$

Είναι $\hat{B} = 2\hat{A}$. Οπότε

$$\hat{A} + 2\hat{A} = 126^\circ$$

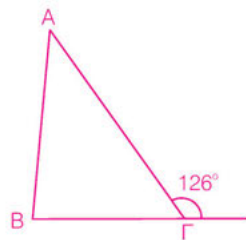
$$3\hat{A} = 126^\circ$$

$$\hat{A} = 126^\circ : 3$$

$$\hat{A} = 42^\circ$$

Άρα $\hat{B} = 2 \cdot 42^\circ = 84^\circ$.

Είναι $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$.



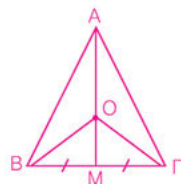
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση τη $B\Gamma$. Αν O σημείο της διαμέσου AM , να δικαιολογήσετε γιατί $OB = OG$.

Λύση

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και η AM είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.

Οπότε η ευθεία AM είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$.

Άρα $OB = OG$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

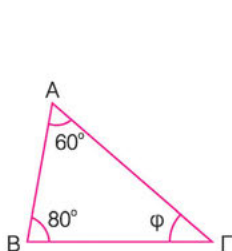
1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
 - α. Το άθροισμα των οξείων γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι
 - β. Οι οξείες γωνίες σ' ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο είναι
 - γ. Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες με
 - δ. Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι
 - ε. Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι
. και
 - στ. Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το των δύο
άλλων γωνιών του τριγώνου.
2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
 - α. Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι η μεσοκάθετος της βάσης του.
 - β. Το άθροισμα των οξείων γωνιών ενός αμβλυγωνίου τριγώνου είναι μικρότερο από μια ορθή γωνία.
 - γ. Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι οξείες.
 - δ. Η γωνία της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου δεν μπορεί να είναι αμβλεία.

α.	β.	γ.	δ.

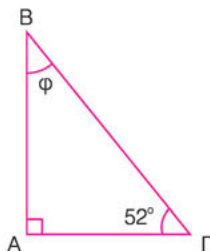
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

3. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τη γωνία φ .

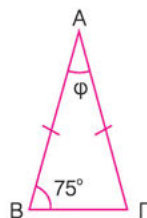
α.



β.

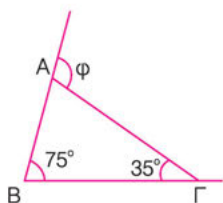


γ.

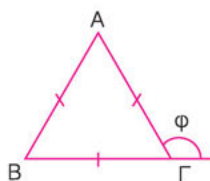


4. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τη γωνία φ .

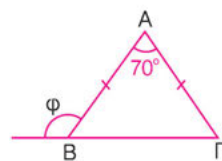
α.



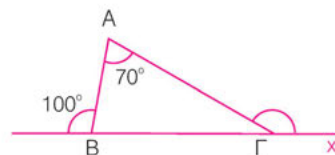
β.



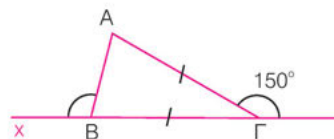
γ.



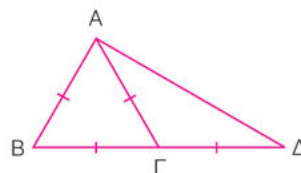
5. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\Gamma x}$ του διπλανού σχήματος.



6. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\hat{B}x}$ του διπλανού σχήματος.



7. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A\Delta\Gamma}$ και $\widehat{B\hat{A}\Delta}$ του διπλανού σχήματος.



8. Στο διπλανό σχήμα, είναι:

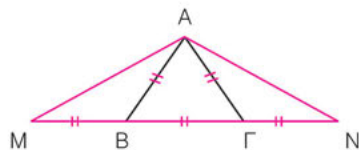
$$MB = AB = BG = AG = GN$$

Να υπολογίσετε τις γωνίες:

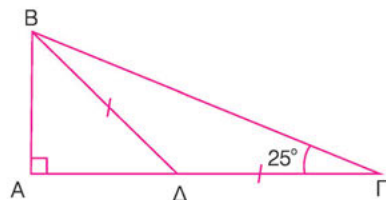
α. $\widehat{AB\Gamma}$

β. $\widehat{AMB}$

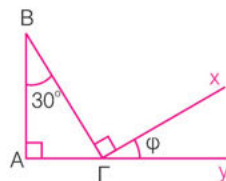
γ. $\widehat{MAG}$



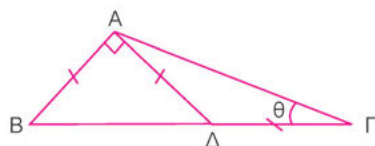
9. Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Delta = \Delta\Gamma$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{AB\Delta}$.



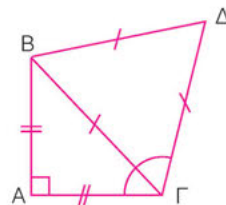
10. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\phi}$ του διπλανού σχήματος.



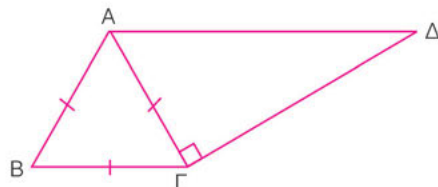
11. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\theta}$ του διπλανού σχήματος.



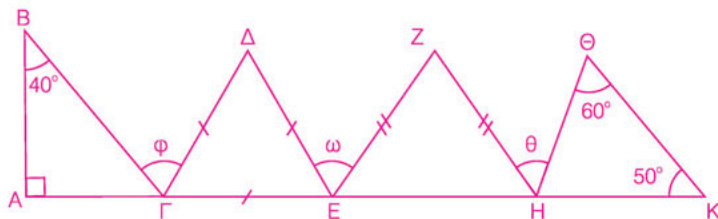
12. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta}$ του διπλανού σχήματος.



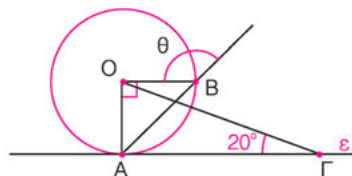
13. Στο διπλανό σχήμα είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$.
Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\Delta\Gamma}$.



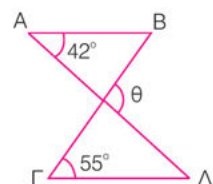
14. Στο παρακάτω σχήμα, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\phi}$, $\hat{\omega}$ και $\hat{\theta}$.



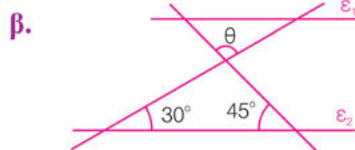
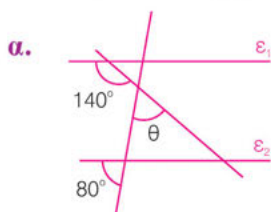
15. Αν η ευθεία ϵ είναι εφαπτόμενη του κύκλου, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\theta}$ και $\hat{\Gamma\hat{O}B}$ του διπλανού σχήματος.



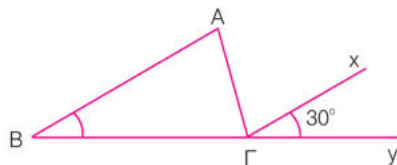
16. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\theta}$.



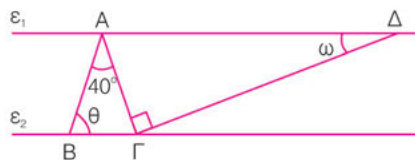
17. Στα παρακάτω σχήματα είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\theta}$.



18. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = B\Gamma$ και $\Gamma\chi \parallel AB$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



19. Στο διπλανό σχήμα είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ και $AB = A\Gamma$. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\theta}$ και $\hat{\omega}$.





Κυκλοφορούν

- Μαθηματικά Α', Β', Γ' Γυμνασίου
- Άλγεβρα Α' Λυκείου
- Άλγεβρα Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Β' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου
- Μαθηματικά Α', Β', Γ' ΕΠΑ.Λ.
- Γεωμετρία Α' Λυκείου
- Γεωμετρία Β' Λυκείου
- Θετικών Σπουδών
- Γενικής Παιδείας
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Τεύχη Α' & Β'
- Θετ. Σπουδών – Πληρ. & Οικον. Επαναλ. Θέματα
- Α', Β', Γ' ΕΠΑ.Λ.

ISBN: 978-618-5238-02-5



Λ.Τ. 19,70 €