

Φίλη μαθήτριά, φίλε μαθητή,

Το βιβλίο αυτό είναι ένα **πλήρες βοήθημα**, με το οποίο οι πρωτοεμφανιζόμενες και συνήθως δύσκολες έννοιες των Μαθηματικών θα γίνουν από όλους κατανοητές.

Η ύλη είναι χωρισμένη σε ενότητες, καθεμία από τις οποίες περιέχει:

- **βασική θεωρία**,
- **βασικές λυμένες ασκήσεις**, οι οποίες πρέπει να μελετηθούν όλες με προσοχή, διότι περιέχουν όλη τη **μεθοδολογία** για τη λύση των ασκήσεων,
- **προτεινόμενες ασκήσεις για λύση**, διαβαθμισμένης δυσκολίας, οι οποίες είναι χωρισμένες σε κατηγορίες,
- **συνδυαστικά θέματα**, στα οποία οι πρωτοεμφανιζόμενες έννοιες κάθε ενότητας συνδυάζονται με παλαιότερες από προηγούμενες ενότητες,
- **θέματα των οποίων η λύση απαιτεί ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη**, αντίστοιχου επιπέδου με τα απαιτητικά ερωτήματα των Πανελληνίων Εξετάσεων,
- **κριτήρια αξιολόγησης**.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν **απαντήσεις**, **υποδείξεις** και **λύσεις** σε όλα τα θέματα προς απάντηση.

Στο βιβλίο αυτό ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην **επανάληψη**. Η **επανάληψη είναι πλήρης** και περιέχει τόσο θέματα από κάθε κεφάλαιο ξεχωριστά όσο και **συνδυαστικά θέματα**.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Δημήτρη Τσάκο, που επιμελήθηκε την παρούσα έκδοση.

Η συνάδελφος Αντιγόνη Λυκοτραφίτη, με τις εύστοχες παρατηρήσεις της, ήταν πολύτιμη αρωγός σε όλη τη διαδικασία έκδοσης του βιβλίου.

Βασίλης Γ. Παπαδάκης
Μαθηματικός

Πρόταση μελέτης

Φίλη μαθήτριά, φίλε μαθητή,

Ένα βοηθητικό βιβλίο πρέπει να καλύπτει, εκτός από τα θέματα του σχολικού βιβλίου, και πολλά άλλα, πιο εύκολα ή πιο δύσκολα.

Εδώ σου προτείνουμε θέματα που, κατά την άποψή μας, πρέπει να μελετήσεις κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους καθώς και στο στάδιο των επαναλήψεων για τις τελικές εξετάσεις.

1. Θεώρημα Rolle

1.1 έως 1.11, 1.15, 1.17, 1.20, 1.21, 1.23, 1.25, 1.28, 1.30, 1.35, 1.36, 1.37, 1.42, 1.46, 1.49, 1.54, 1.56, 1.63, **1.66, 1.68**, 1.71, 1.77, 1.80, 1.83, 1.85, 1.86, 1.92, 1.93, 1.96, **1.98**, 1.101, **1.102, 1.106**, 1.112, 1.114, 1.118, 1.120, 1.124, **1.125, 1.127, 1.128, 1.129, 1.131**, 1.134, **1.138, 1.139**, 1.143

2. Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

2.1 έως 2.11, 2.14, 2.18, 2.21, 2.23, 2.28, 2.31, 2.33, 2.38, 2.40, 2.42, 2.46, **2.47**, 2.49, 2.51, 2.54, 2.56, 2.58, 2.59, **2.64**, 2.65, 2.67, 2.70, 2.74, 2.75, **2.76, 2.77**, 2.80, 2.88, 2.90, Κριτήριο αξιολόγησης.

3. Συνέπειες Θ.Μ.Τ.

3.1 έως 3.10, 3.13, 3.17, 3.19, 3.25, 3.28, 3.33, 3.35, 3.37, 3.41, 3.46, 3.51, 3.54, 3.56, 3.58, 3.61, 3.62, 3.65, 3.67, **3.70**, 3.73, **3.76**, 3.78, 3.80, 3.83, 3.87, **3.89, 3.92**, 3.96, **3.97, 3.98**, 3.99, 3.102, 3.105, 3.108, Κριτήριο αξιολόγησης . .

4. Μονοτονία

4.1 έως 4.17, 4.22, 4.25, 4.28, 4.32, 4.33, **4.40**, 4.43, 4.44, 4.46, 4.49, **4.52**, 4.58, 4.60, 4.63, 4.65, 4.70, 4.73, 4.77, 4.81, 4.83, 4.84, 4.86, 4.89, **4.92, 4.94**, 4.96, 4.100, 4.101, 4.102, 4.104, **4.107**, 4.110, 4.113, **4.115, 4.116**, 4.121, 4.124, 4.126

5. Σύνολο τιμών - Πλήθος ριζών εξίσωσης

5.1 έως 5.5, 5.8, 5.10, 5.14, 5.18, **5.20**, 5.22, 5.23, 5.25, **5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30**

6. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

6.1 έως 6.15, 6.18, 6.20, **6.25**, 6.30, 6.32, 6.35, 6.36, 6.39, 6.42, 6.46, 6.47, 6.49, **6.51**, 6.53, 6.56, **6.58**, 6.61, 6.64, 6.66, **6.67**, 6.69, 6.70, 6.78, 6.81, 6.84, 6.92, **6.95**, 6.97, 6.100, **6.101, 6.102, 6.105**, 6.108, 6.111, 6.112, 6.115, 6.121

- 7. Συνδυαστικά θέματα στη μονοτονία και στα ακρότατα**
7.1, 7.4, 7.5, 7.6, 7.8, **7.9**, 7.13, 7.15, 7.17, **7.19**, 7.21, **7.22**, **7.23**, **7.24**, **7.25**,
Κριτήριο αξιολόγησης
- 8. Κυρτότητα - Σημεία καμπής συνάρτησης**
8.1 έως 8.8, 8.11, 8.16, 8.18, **8.21**, **8.22**, 8.25, 8.29, 8.33, **8.34**, **8.36**, 8.40, 8.42,
8.43, 8.44, **8.45**, 8.48, 8.50, **8.51**, 8.53, 8.56, 8.61, **8.63**, **8.66**, 8.69, 8.70, 8.74,
8.75, 8.78, 8.79, 8.83, Κριτήριο αξιολόγησης
- 9. Ασύμπτωτες**
9.1 έως 9.7, 9.10, 9.14, 9.21, 9.23, 9.24, 9.26, 9.29, 9.31, 9.32, **9.33**, 9.36, 9.37,
9.40, 9.42, 9.44, 9.47, 9.49, 9.50, 9.53, **9.54**, **9.55**, **9.56**, **9.57**, 9.59, 9.63
- 10. Κανόνες De L' Hospital**
10.1 έως 10.10, 10.12, 10.14, 10.17, 10.18, 10.20, 10.21, 10.23, **10.24**, **10.25**,
10.26, 10.30, 10.34, 10.36, **10.39**, **10.43**, **10.44**, 10.45, 10.46, 10.50, **10.51**,
10.53, 10.54, 10.57, 10.60, 10.62, **10.64**, **10.65**, 10.66, 10.68, 10.72, **10.73**,
10.74, **10.75**, Κριτήριο αξιολόγησης
- 11. Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης**
11.1, 11.6, 11.10, 11.13, **11.14**, 11.17, 11.19, 11.21
- 12. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Διαφορικός Λογισμός**
12.1, 12.4, 12.6, 12.7, 12.8, 12.13, 12.17, 12.20, 12.22, 12.23, 12.29, 12.31,
12.35, **12.36**, 12.38, **12.39**, 12.42, 12.43, **12.44**, 12.48, **12.49**, **12.50**
- 13. Αρχική συνάρτηση**
13.1 έως 13.17, 13.20, 13.23, 13.24, 13.27, 13.30, 13.32, 13.38, 13.40, 13.42,
13.44, 13.46, 13.50, **13.52**, 13.53, 13.55, 13.59, 13.62, **13.63**, 13.67, 13.68,
13.69, 13.72, 13.76, 13.78, 13.79, **13.80**, **13.81**, **13.82**, **13.83**, 13.85, 13.86,
13.87, **13.88**, 13.93, Κριτήριο αξιολόγησης
- 14. Ορισμένο ολοκλήρωμα (I)**
14.1 έως 14.14, 14.15, 14.17, 14.19, 14.22, 14.23, 14.24, 14.26, 14.28, 14.30,
14.32, 14.34, 14.36, 14.38, **14.40**, 14.42, **14.43**, **14.44**, 14.46, 14.52, 14.57,
14.60, 14.63, 14.66, 14.67, 14.69, 14.71, 14.74, 14.77, 14.78, 14.81, 14.83,
14.84, 14.85, 14.88, 14.91, 14.94, 14.96, **14.98**, 14.99, **14.101**, 14.103, 14.104,
14.105, 14.106, 14.107, **14.108**, 14.109
- 15. Ορισμένο ολοκλήρωμα (II)**
15.1 έως 15.21, 15.22, 15.23, 15.26, 15.27, 15.28, 15.29, **15.30**, 15.33, 15.34,
15.36, 15.39, 15.41, 15.43, 15.44, 15.46, 15.50, 15.53, **15.59**, 15.60, 15.61,
15.62, 15.66, 15.68, 15.69, 15.73, 15.75, 15.77, 15.79, 15.80, 15.82, 15.85,
15.86, **15.87**, 15.88, 15.90, 15.93, 15.96, 15.99, 15.102, 15.103, 15.108, 15.110,
15.111, 15.112, 15.113, 15.114, **15.115**, **15.116**, 15.118, 15.120, **15.121**, **15.122**,
15.128, 15.129, 15.132

16. Ορισμένο ολοκλήρωμα (III)

16.1 έως 16.6, 16.9, 16.12, 16.14, 16.16, 16.20, 16.22, 16.23, 16.25, **16.28**,
16.30, 16.32, 16.34, 16.35, **16.37**, 16.41, 16.42, **16.43**, 16.46, 16.49, 16.50,
16.52, 16.53, 16.54, 16.56, 16.61, 16.63, 16.66, 16.70, 16.71, 16.72, **16.73**,
16.74, Κριτήριο αξιολόγησης

17. Εμβαδόν επιπέδου χωρίου

17.1 έως 17.10, 17.13, 17.16, 17.22, 17.25, 17.29, 17.31, 17.33, 17.35, 17.39,
17.41, 17.45, 17.48, 17.50, 17.51, 17.54, 17.56, 17.57, 17.60, 17.62, 17.64,
17.66, 17.68, 17.69, **17.71**, 17.78, **17.81**, **17.84**, **17.87**, **17.88**, 17.89, 17.90,
17.91, 17.92, 17.93, 17.94, Κριτήριο αξιολόγησης

18. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Ολοκληρωτικός Λογισμός

18.2, 18.4, 18.6, 18.8, 18.10, 18.13, 18.14, 18.18, **18.20**, **18.23**, 18.24, 18.25,
18.26, 18.27, 18.28, 18.29, **18.30**

19. Επαναληπτικά θέματα σε όλη την ύλη

19.2, 19.3, 19.5, 19.8, 19.12, **19.15**, 19.18, **19.20**, 19.23, 19.24, **19.28**, 19.30,
19.32, 19.35, **19.36**, **19.38**, 19.39, 19.40, 19.41, 19.43, 19.44, 19.48, 19.50,
19.52, 19.53, 19.56, 19.59, 19.61, **19.63**, 19.65, 19.67, 19.68, 19.71, 19.73,
19.75, 19.78, **19.80**, 19.83, 19.87, 19.88, 19.91, 19.93, 19.94, **19.95**, 19.96,
19.99, 19.100, 19.104, 19.106, 19.108, **19.111**, 19.114, 19.115, 19.118, 19.120,
19.122, 19.123, 19.126, 19.128, **19.129**, 19.130, 19.134, 19.136, 19.138, 19.140,
19.144, 19.147, 19.148, 19.149, 19.151, 19.153, 19.156, **19.157**, 19.160, 19.161,
19.163, 19.165, 1ο και 2ο κριτήριο αξιολόγησης.

Περιεχόμενα

1. Θεώρημα Rolle	13
2. Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)	47
3. Συνέπειες Θ.Μ.Τ.	71
4. Μονοτονία.	100
5. Σύνολο τιμών - Πλήθος ριζών εξίσωσης	139
6. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	149
7. Συνδυαστικά θέματα στη μονοτονία και στα ακρότατα	190
8. Κυρτότητα - Σημεία καμπής συνάρτησης.	200
9. Ασύμπτωτες	225
10. Κανόνες De L' Hospital	246
11. Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. . .	272
12. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Διαφορικός Λογισμός	279
13. Αρχική συνάρτηση	293
14. Ορισμένο ολοκλήρωμα (I).	326
15. Ορισμένο ολοκλήρωμα (II)	357
16. Ορισμένο ολοκλήρωμα (III)	404
17. Εμβαδόν επιπέδου χωρίου.	426
18. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Ολοκληρωτικός Λογισμός	453
19. Επαναληπτικά θέματα σε όλη την ύλη	463
<i>Απαντήσεις - Υποδείξεις</i>	<i>515</i>

13

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Βασική θεωρία και εφαρμογές

13.1 Αρχική συνάρτηση

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Εφαρμογή

Έστω $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \ln(\epsilon\phi x)$ είναι μια αρχική της f .

Λύση

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\ln(\epsilon\phi x))' = \frac{1}{\epsilon\phi x} \cdot (\epsilon\phi x)' = \\ &= \frac{1}{\epsilon\phi x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = f(x) \end{aligned}$$

Άρα η $F(x)$ είναι μια αρχική της f .

13.2 Μορφή αρχικών συναρτήσεων

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

Αφού η F είναι παράγουσα της f στο Δ , ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού ισχύει ότι:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

- Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε:

$$G'(x) = F'(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

Επομένως υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει μόνο σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, με $x \in \mathbb{R}$, είναι μια αρχική της f .
- β) Να βρείτε όλες τις αρχικές της f .

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x) \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε ότι η F είναι μια αρχική της f σε ένα διάστημα Δ , αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

Άρα η F είναι μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού η F είναι μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, κάθε άλλη αρχική G της f στο $\mathbb{R}$ θα είναι της μορφής:

$$G(x) = F(x) + c = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}$$

13.3 Παράγουσες βασικών συναρτήσεων

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι παράγουσες μερικών βασικών συναρτήσεων:

Συνάρτηση	Παράγουσες
$f(x) = 0$	$G(x) = c$
$f(x) = 1$	$G(x) = x + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln x + c$
$f(x) = x^a, a \neq -1$	$G(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$f(x) = \sin x$	$G(x) = -\cos x + c$
$f(x) = \cos x$	$G(x) = \sin x + c$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$G(x) = -\cot x + c$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$G(x) = \tan x + c$
$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c$
$f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$	$G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Οι τύποι του προηγούμενου πίνακα ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

Ιδιότητες

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντίστοιχα και λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

- η συνάρτηση $F + G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f + g$,
- η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

Εφαρμογή

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 12x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt{x} + 2e^x - 5^x$ με $x \in (0, +\infty)$

β) $f(x) = \frac{5}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt{x} + 2e^x - 5^x = \\ &= \left(12 \cdot \frac{x^4}{4}\right)' + (3\ln x)' - x^{\frac{1}{2}} + (2e^x)' - \left(\frac{5^x}{\ln 5}\right)' = \\ &= (3x^4)' + (3\ln x)' - \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)' + (2e^x)' - \left(\frac{5^x}{\ln 5}\right)' = \\ &= \left(3x^4 + 3\ln x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{5^x}{\ln 5}\right)' \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι:

$$F(x) = 3x^4 + 3\ln x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2e^x - \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

β) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι:

$$f(x) = \frac{5}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-5\sigma\phi x)' - (\epsilon\phi x)' + (-2\sigma\upsilon\nu x)' - (3\eta\mu x)' = \\
 &= (-5\sigma\phi x - \epsilon\phi x - 2\sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x)'
 \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι:

$$F(x) = -5\sigma\phi x - \epsilon\phi x - 2\sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x + c$$

13.4 Ανάπτυξη ταυτοτήτων - Διάσπαση κλασμάτων

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x^3(x-2)^2 \qquad \beta) f(x) = \frac{(x-1)^3 + 2\sqrt{x}}{x^2} \text{ με } x > 0$$

Λύση

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3(x-2)^2 = x^3(x^2 - 4x + 4) = \\
 &= x^5 - 4x^4 + 4x^3 = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{4x^5}{5} + x^4 \right)'
 \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι:

$$F(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{4x^5}{5} + x^4 + c$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{(x-1)^3 + 2\sqrt{x}}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2\sqrt{x}}{x^2} = \\
 &= \frac{x^3}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2\sqrt{x}}{x^2} = x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + 2x^{-\frac{3}{2}} = \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \right)' \stackrel{x>0}{=} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln x + \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} \right)'
 \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln x + \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + c$$

13.5 Παράγωγος γινομένου ή πηλίκου

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x \cdot \eta\mu x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x$

β) $f(x) = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$

γ) $f(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$ με $x > 0$

δ) $f(x) = \frac{2\eta\mu x}{x^3} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ με $x > 0$

Λύση

α) Είναι:

$$f(x) = 2x \cdot \eta\mu x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x = (x^2)' \eta\mu x + x^2 (\eta\mu x)' = (x^2 \cdot \eta\mu x)'$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι $F(x) = x^2 \cdot \eta\mu x + c$.

β) Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^x \cdot \eta\mu x = \\ &= (e^x)' \sigma\upsilon\nu x + e^x (\sigma\upsilon\nu x)' = (e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι $F(x) = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + c$.

γ) Είναι:

$$f(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \left(\frac{e^x}{x}\right)'$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι $F(x) = \frac{e^x}{x} + c$.

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\eta\mu x}{x^3} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \frac{2\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x^3} = \\ &= \frac{2x \cdot \eta\mu x - x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x^4} = - \frac{x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2x \cdot \eta\mu x}{x^4} = \\ &= - \frac{(\eta\mu x)'x^2 - (x^2)'\eta\mu x}{(x^2)^2} = \left(-\frac{\eta\mu x}{x^2}\right)' \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι:

$$F(x) = -\frac{\eta\mu x}{x^2} + c$$

13.6 Παράγουσες σύνθετων συναρτήσεων

Ισχύει ότι:

$$f'(g(x))g'(x) = (f(g(x)))'$$

Άρα οι παράγουσες της συνάρτησης:

$$h(x) = f'(g(x))g'(x)$$

είναι οι:

$$H(x) = f(g(x)) + c$$

Συγκεκριμένα στον παρακάτω πίνακα έχουμε τις περιπτώσεις μερικών σύνθετων συναρτήσεων:

Συνάρτηση	Παράγουσες
$g(x) = f^v(x)f'(x)$	$G(x) = \frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + c$
$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$G(x) = \ln f(x) + c$
$g(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$G(x) = \sqrt{f(x)} + c$
$g(x) = e^{f(x)}f'(x)$	$G(x) = e^{f(x)} + c$
$g(x) = a^{f(x)}f'(x)$	$G(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$g(x) = \sin f(x) \cdot f'(x)$	$G(x) = \eta \mu f(x) + c$
$g(x) = \eta \mu f(x) \cdot f'(x)$	$G(x) = -\sin f(x) + c$
$g(x) = \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$	$G(x) = \varepsilon \varphi f(x) + c$
$g(x) = \frac{f'(x)}{\eta \mu^2 f(x)}$	$G(x) = -\sigma \varphi f(x) + c$

Εφαρμογή

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^{10}(2x + 3)$

β) $f(x) = \frac{e^{\varepsilon \varphi x}}{\sin^2 x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\gamma) f(x) = x \cdot \eta\mu(3x^2)$$

$$\delta) f(x) = \frac{x^3}{(x^4 + 1)^5} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\epsilon) f(x) = \epsilon\varphi x \text{ με } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x} \text{ με } x \in (1, +\infty)$$

Λύση

α) Είναι:

$$f(x) = (x^2 + 3x + 5)^{10}(2x + 3) = (x^2 + 3x + 5)^{10}(x^2 + 3x + 5)' = \left(\frac{(x^2 + 3x + 5)^{11}}{11}\right)'$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι $F(x) = \frac{(x^2 + 3x + 5)^{11}}{11} + c$.

β) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$f(x) = \frac{e^{\epsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = e^{\epsilon\varphi x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = e^{\epsilon\varphi x}(\epsilon\varphi x)' = (e^{\epsilon\varphi x})'$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι $F(x) = e^{\epsilon\varphi x} + c$.

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \eta\mu(3x^2) = \frac{1}{6} \cdot 6x \cdot \eta\mu(3x^2) = \frac{1}{6} (3x^2)' \eta\mu(3x^2) = \\ &= \frac{1}{6} (-\sigma\upsilon\nu(3x^2))' = \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu(3x^2)}{6}\right)' \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι $F(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu(3x^2)}{6} + c$.

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{(x^4 + 1)^5} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x^4 + 1)'}{(x^4 + 1)^5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)'}{\sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{1}{4} (x^4 + 1)^{-5} (x^4 + 1)' + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)'}{\sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{(x^4 + 1)^{-4}}{-4}\right)' + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \left(-\frac{1}{16(x^4 + 1)^4} + \sqrt{x^2 + 1}\right)' \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι $F(x) = -\frac{1}{16(x^4 + 1)^4} + \sqrt{x^2 + 1} + c$.

ε) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$f(x) = \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} = (-\ln|\sigma\upsilon\nu x|)' = (-\ln(\sigma\upsilon\nu x))'$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι $F(x) = -\ln(\sigma\upsilon\nu x) + c$.

στ) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = (\ln|\ln x|)' = (\ln(\ln x))'$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι $F(x) = \ln(\ln x) + c$.

13.7 Παράγουσες συναρτήσεων της μορφής $f(ax + \beta)$

Αν η $F(x)$ είναι μια παράγουσα της $f(x)$, τότε η $\frac{F(ax + \beta)}{a}$ είναι μια αρχική της $f(ax + \beta)$. Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα του παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση	Παράγουσες
$f(x) = (ax + \beta)^v$	$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + \beta)^{v+1}}{v+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{ax + \beta}$	$F(x) = \frac{\ln ax + \beta }{a} + c$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu(ax + \beta)$	$F(x) = \frac{\eta\mu(ax + \beta)}{a} + c$
$f(x) = \eta\mu(ax + \beta)$	$F(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu(ax + \beta)}{a} + c$
$f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(ax + \beta)}$	$F(x) = \frac{\varepsilon\phi(ax + \beta)}{a} + c$
$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2(ax + \beta)}$	$F(x) = -\frac{\sigma\phi(ax + \beta)}{a} + c$
$f(x) = e^{ax+\beta}$	$F(x) = \frac{e^{ax+\beta}}{a} + c$
$f(x) = \gamma^{ax+\beta}$	$F(x) = \frac{\gamma^{ax+\beta}}{a \cdot \ln \gamma} + c$

Εφαρμογή

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

α) $f(x) = (2x + 3)^5 + \eta\mu(3x)$

β) $f(x) = \frac{1}{3x-6} + e^{4x} + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-\pi}{3}\right)$ με $x \in (2, +\infty)$

Λύση

α) Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x + 3)^5 + \eta\mu(3x) = \\ &= \left(\frac{(2x + 3)^6}{2 \cdot 6}\right)' + \left(\frac{-\sigma\upsilon\nu(3x)}{3}\right)' = \left(\frac{(2x + 3)^6}{12} - \frac{\sigma\upsilon\nu(3x)}{3}\right)' \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι:

$$F(x) = \frac{(2x + 3)^6}{12} - \frac{\sigma\upsilon\nu(3x)}{3} + c$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3x-6} + e^{4x} + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-\pi}{3}\right) = \\ &= \left(\frac{\ln|3x-6|}{3}\right)' + \left(\frac{e^{4x}}{4}\right)' + \left(\frac{\eta\mu\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{3}}\right)' \stackrel{x>2}{=} \left(\frac{\ln(3x-6)}{3} + \frac{e^{4x}}{4} + 3\eta\mu\left(\frac{x-\pi}{3}\right)\right)' \end{aligned}$$

Άρα όλες οι παράγουσες της f είναι οι:

$$F(x) = \frac{\ln(3x-6)}{3} + \frac{e^{4x}}{4} + 3\eta\mu\left(\frac{x-\pi}{3}\right) + c$$

13.8 Παράγουσες συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Για να βρούμε τις παράγουσες μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου της μορφής:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \leq x_0 \\ f_2(x), & \text{αν } x > x_0 \end{cases}$$

εργαζόμαστε ως εξής:

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 .

- Βρίσκουμε τις παράγωγους $F_1(x) + c_1$ και $F_2(x) + c_2$ κάθε κλάδου ξεχωριστά, οπότε είναι:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) + c_1, & \text{αν } x \leq x_0 \\ F_2(x) + c_2, & \text{αν } x > x_0 \end{cases}$$

- Η F είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι και συνεχής στο x_0 , οπότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x)$$

Από την παραπάνω ισότητα βρίσκουμε μια σχέση μεταξύ των c_1 και c_2 . Εκφράζουμε το c_2 με τη βοήθεια του c_1 , το αντικαθιστούμε στον τύπο της F και έχουμε έτσι τις παράγωγους της f .

Εφαρμογή

Να βρείτε τις παράγωγους της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \eta\mu x + \frac{1}{x+1}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Λύση

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο 0. Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\eta\mu x + \frac{1}{x+1} \right) = 1$
- $f(0) = 1$

Επομένως ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Επίσης η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Βρίσκουμε τις παράγωγους κάθε κλάδου ξεχωριστά.

- Για $x \leq 0$ είναι:

$$f(x) = e^x - x = \left(e^x - \frac{x^2}{2} \right)'$$

Άρα οι αρχικές της f στο $(-\infty, 0]$ είναι οι $F(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + c_1$.

- Για $x > 0$ είναι:

$$f(x) = \eta\mu x + \frac{1}{x+1} = (-\sigma\upsilon\nu x + \ln|x+1|)' = (-\sigma\upsilon\nu x + \ln(x+1))'$$

Άρα οι αρχικές της f στο $(0, +\infty)$ είναι οι $F(x) = -\sigma\upsilon\nu x + \ln(x+1) + c_2$.
Επομένως είναι:

$$F(x) = \begin{cases} e^x - \frac{x^2}{2} + c_1, & \text{αν } x \leq 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x + \ln(x+1) + c_2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Όμως η F είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι και συνεχής στο 0, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$$

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x - \frac{x^2}{2} + c_1 \right) = 1 + c_1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sigma\upsilon\nu x + \ln(x+1) + c_2) = -1 + c_2$

Επομένως ισχύει ότι:

$$1 + c_1 = -1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = c_1 + 2$$

Συνεπώς οι παράγονσες της f είναι της μορφής:

$$F(x) = \begin{cases} e^x - \frac{x^2}{2} + c_1, & \text{αν } x \leq 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x + \ln(x+1) + c_1 + 2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

13.9 Εύρεση τύπου συνάρτησης

- α) Να αποδείξετε ότι η $G(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$, με $x > 0$, είναι παράγουσα της $g(x) = \frac{1}{x^3 + x^2}$ με $x > 0$.

- β) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(1) = \ln 2 \quad \text{και} \quad xf'(x) - f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right)' = \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} \right)' = \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x(x+1) + x+1}{x^2(x+1)} = \\ &= \frac{x^2 - x^2 - x + x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^3 + x^2} = g(x) \end{aligned}$$

Άρα η $G(x)$ είναι παράγουσα της $g(x)$.

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) &= \frac{1}{x+1} \stackrel{:\cdot x^2}{\iff} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x^3 + x^2} \stackrel{(a)}{\iff} \\ &\iff \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right)' \iff \\ &\iff \frac{f(x)}{x} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} + c \iff f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1 + cx \end{aligned}$$

Όμως είναι:

$$f(1) = \ln 2 \iff \ln 2 - 1 + c = \ln 2 \iff c = 1$$

Άρα:

$$f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1 + x \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

13.10 Αρχική συνάρτηση και υπολογισμός ορίων

Έστω F και G αρχικές των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x^2$ και $g(x) = e^{x^2}$ αντίστοιχα. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2) - F(x)}{G(x^3) - G(0)}$$

Λύση

Οι συναρτήσεις F και G είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (F(x^2) - F(x)) = F(0) - F(0) = 0$$

και:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (G(x^3) - G(0)) = G(0) - G(0) = 0$$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$F'(x) = \eta\mu x^2 \quad \text{και} \quad G'(x) = e^{x^2}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2) - F(x)}{G(x^3) - G(0)} &\stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(F(x^2) - F(x))'}{(G(x^3) - G(0))'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x^2) \cdot 2x - F'(x)}{G'(x^3) \cdot 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \eta\mu x^4 - \eta\mu x^2}{3x^2 e^{x^6}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x \cdot \eta\mu x^4}{3x^2 e^{x^6}} - \frac{\eta\mu x^2}{3x^2 e^{x^6}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^3}{3e^{x^6}} \cdot \frac{\eta\mu x^4}{x^4} - \frac{1}{3e^{x^6}} \cdot \frac{\eta\mu x^2}{x^2} \right) = \\ &= 0 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

13.11 Όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} (F(g(x)) - F(h(x)))$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Έστω $F(x)$ μια αρχική της $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x))$$

Λύση

Η F είναι αρχική της f , άρα ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η F είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f(\xi) = F(x+1) - F(x)$$

Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2+1 - (x+1)x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

Παρατηρούμε ότι για $x > 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x, x+1]$, οπότε:

$$x < \xi < x+1 \Leftrightarrow f(x+1) < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^2+1}} < F(x+1) - F(x) < \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Όμως ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}} = 1$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$. Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x)) = 1$$

13.12 Συναρτησιακή σχέση με αρχική της f και εύρεση της f

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της f για την οποία ισχύει $F(1) = -2$ και:

$$f(x) = 2 + \frac{F(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Η F είναι αρχική της f στο $(0, +\infty)$, άρα ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Έχουμε:

$$f(x) = 2 + \frac{F(x)}{x} \Leftrightarrow xf(x) = 2x + F(x)$$

άρα:

$$\begin{aligned} (xf(x))' &= (2x + F(x))' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) &= 2 + F'(x) \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 2 + f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \frac{2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = (2\ln x)' \Leftrightarrow f(x) = 2\ln x + c \end{aligned}$$

Επίσης από τη δοσμένη σχέση για $x = 1$ έχουμε:

$$f(1) = 2 + F(1) \Leftrightarrow f(1) = 2 - 2 \Leftrightarrow f(1) = 0 \Leftrightarrow 2\ln 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Συνεπώς είναι $f(x) = 2\ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

13.13 Αρχική συνάρτηση και μονοτονία

Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3) = 2$. Αν F είναι μια αρχική της f , να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την:

$$g(x) = F(x^3 + 2x) - 2x^3 - 4x$$

Λύση

Η F είναι αρχική της f στο $\mathbb{R}$, άρα ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x) = (F(x^3 + 2x) - 2x^3 - 4x)' = F'(x^3 + 2x)(3x^2 + 2) - 6x^2 - 4 =$$

$$= f(x^3 + 2x)(3x^2 + 2) - 2(3x^2 + 2) = (3x^2 + 2)(f(x^3 + 2x) - 2)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad g'(x) = 0 &\Leftrightarrow (3x^2 + 2)(f(x^3 + 2x) - 2) = 0 \Leftrightarrow f(x^3 + 2x) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x^3 + 2x) = f(3) \xLeftrightarrow^{f:1-1} x^3 + 2x = 3 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad g'(x) > 0 &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x^3 + 2x) > 2 \Leftrightarrow f(x^3 + 2x) > f(3) \xLeftrightarrow^{f \uparrow} \\ &\Leftrightarrow x^3 + 2x > 3 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 3) > 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet \quad g'(x) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < 1$$

Η μονοτονία της g φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

13.14 Σταθερή συνάρτηση

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$, και F μια αρχική της f για την οποία ισχύει:

$$F(x)f(-x) = 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $F(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x)F(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Αφού η F είναι αρχική της f στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

α) Στη σχέση:

$$F(x)f(-x) = 2 \tag{2}$$

θέτουμε $x = 0$ και προκύπτει ότι:

$$F(0)f(0) = 2 \Leftrightarrow F(0) \cdot 2 = 2 \Leftrightarrow F(0) = 1$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x) = (F(x)F(-x))' = F'(x)F(-x) + F(x)F'(-x)(-x)' =$$

$$= f(x)F(-x) - F(x)f(-x)$$

αφού από τη σχέση (1), αν θέσουμε όπου x το $-x$, προκύπτει ότι:

$$F'(-x) = f(-x)$$

Επίσης από τη σχέση (2), αν θέσουμε όπου x το $-x$, προκύπτει ότι:

$$F(-x)f(x) = 2 \quad (3)$$

Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$g'(x) = f(x)F(-x) - F(x)f(-x) \stackrel{(2),(3)}{=} 2 - 2 = 0$$

Άρα η συνάρτηση $g(x) = F(x)F(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

γ) Παρατηρούμε ότι:

$$g(0) = F(0)F(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

και επειδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow F(x)F(-x) = 1 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $F(-x) \neq 0$ και $F(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) και προκύπτει ότι:

$$\frac{F(-x)f(x)}{F(x)F(-x)} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{F(x)} = 2 \Leftrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln|F(x)|)' = (2x)' \Leftrightarrow \ln|F(x)| = 2x + c \Leftrightarrow \ln(F(x)) = 2x + c \quad (5)$$

διότι η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $F(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η F διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $F(0) = 1 > 0$, θα ισχύει ότι $F(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης από τη σχέση (5) για $x = 0$ προκύπτει ότι:

$$\ln(F(0)) = 2 \cdot 0 + c \Leftrightarrow \ln 1 = c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$(5) \Leftrightarrow \ln(F(x)) = 2x \Leftrightarrow F(x) = e^{2x}$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = F'(x) \Leftrightarrow f(x) = (e^{2x})' \Leftrightarrow f(x) = 2e^{2x}$$

13.15 Αρχική συνάρτηση και θεώρημα Rolle

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της f για την οποία ισχύει $F(1) = F(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$F(\xi) = \xi f(\xi)$$

Λύση

Η F είναι αρχική της f , άρα ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in [1, 2]$$

Με $x \in [1, 2]$ έχουμε την εξίσωση:

$$F(x) = xf(x) \Leftrightarrow xf(x) - F(x) = 0 \Leftrightarrow xF'(x) - (x)'F(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{xF'(x) - (x)'F(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{F(x)}{x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x}$ με $x \in [1, 2]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, με:

$$g'(x) = \frac{xF'(x) - F(x)}{x^2} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2}$$

- $g(1) = \frac{F(1)}{1} = 0$ και $g(2) = \frac{F(2)}{2} = 0$, άρα $g(1) = g(2)$.

Από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f(\xi) - F(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow F(\xi) = \xi f(\xi)$$

13.16 Αρχική συνάρτηση - Κυρτότητα - Θ.Μ.Τ.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(4) = 6$, $f(5) = 9$ και $f'(x) > -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν F είναι μια αρχική της f , να αποδείξετε ότι:

- α) η συνάρτηση $g(x) = F(x) + x^2 - 5x$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$,
- β) $5 < F(5) - F(4) < 10$.

Λύση

α) Η F είναι αρχική της f , άρα ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x) = F'(x) + 2x - 5 = f(x) + 2x - 5$$

και:

$$g''(x) = f'(x) + 2 > 0$$

Άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Η g είναι συνεχής στο $[4, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(4, 5)$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (4, 5)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = \frac{g(5) - g(4)}{5 - 4} \Leftrightarrow g'(\xi) = F(5) + 25 - 25 - (F(4) + 16 - 20) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(\xi) = F(5) - F(4) + 4$$

Όμως η g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$4 < \xi < 5 \Leftrightarrow g'(4) < g'(\xi) < g'(5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(4) + 3 < F(5) - F(4) + 4 < f(5) + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 < F(5) - F(4) + 4 < 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 < F(5) - F(4) < 10$$

13.17 Αρχική συνάρτηση και θεώρημα Fermat

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω F μια αρχική της f για την οποία ισχύει $F(6) = 0$ και:

$$xF(x^2 + x) + 10\ln(x - 1) \geq 4 - x^2 \quad \text{για κάθε } x > 1$$

Να βρείτε την τιμή $f(6)$.

Λύση

Η F είναι αρχική της f , άρα ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in (1, +\infty)$$

Επίσης για κάθε $x \in (1, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$xF(x^2 + x) + 10\ln(x - 1) + x^2 - 4 \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = xF(x^2 + x) + 10\ln(x - 1) + x^2 - 4 \quad \text{με } x \in (1, +\infty)$$

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(2)$$

Άρα η g έχει ολικό ελάχιστο στο 2. Επίσης το 2 είναι εσωτερικό σημείο του $(1, +\infty)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο 2. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$g'(2) = 0$$

Όμως για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$g'(x) = (xF(x^2 + x) + 10\ln(x - 1) + x^2 - 4)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = F(x^2 + x) + xf'(x^2 + x)(2x + 1) + \frac{10}{x - 1} + 2x$$

οπότε:

$$g'(2) = 0 \Leftrightarrow F(6) + 10f(6) + 10 + 4 = 0 \Leftrightarrow 10f(6) = -14 \Leftrightarrow f(6) = -\frac{7}{5}$$

Θέματα προς απάντηση

Εύρεση αρχικών (παραγουσών) - Α' Ομάδα

13.18 Να βρείτε τις αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$

β) $f(x) = x^4 + \sqrt{x}$ με $x \geq 0$

γ) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ με $x > 0$

δ) $f(x) = 3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{4}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{5}{\eta\mu^2 x}$

α) $f(x) = (x + 3)(x - 1)^2$

β) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x}$ με $x \geq 0$

γ) $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ με $x > 0$

δ) $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3$ με $x > 0$

13.19 Να βρείτε τις αρχικές των επόμενων συναρτήσεων:

13.20 Να βρείτε τις αρχικές των επόμενων συναρτήσεων:

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

$$\alpha) f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^2} \text{ με } x > 0$$

$$\beta) f(x) = \frac{(x-1)^3}{x} \text{ με } x > 0$$

$$\gamma) f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} \text{ με } x > 0$$

$$\delta) f(x) = \frac{(2x+1)^3}{x^4} \text{ με } x > 0$$

13.21 Να βρείτε τις παράγουσες των επόμενων συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \text{ με } x \geq 0$$

$$\beta) f(x) = \frac{x\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^5}} \text{ με } x > 0$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}} \text{ με } x \geq 0$$

$$\delta) f(x) = (\sqrt[4]{x} + \sqrt{x})^2 \text{ με } x \geq 0$$

13.22 Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 2^x(3^x + 5^x) \quad \beta) f(x) = 5^x \cdot 3^{2x} \cdot 2^{3x}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{2^x - 3^{3x}}{3^x} \quad \delta) f(x) = (e^x + 2^x)^2$$

13.23 Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x^2y^3 \quad \beta) f(y) = x^2y^3$$

$$\gamma) f(t) = x^2y^3$$

13.24 α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sin x} + \cos x\right) \text{ με } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τις αρχικές της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{\eta\mu^4 x}{\sin x} + 2\eta\mu^2 x \cdot \sin x + \sin^3 x$$

Εύρεση αρχικών (παραγουσών) - Β' Ομάδα

13.25 Να βρείτε τις αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \eta\mu x + x \cdot \sin x$$

$$\beta) f(x) = x^2 e^x (x + 3)$$

$$\gamma) f(x) = x(x \cdot \eta\mu x - 2 \sin x)$$

$$\delta) f(x) = \ln x \cdot \sin x + \frac{\eta\mu x}{x}$$

13.26 Να βρείτε τις αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{2x \cdot \eta\mu x - x^2 \cdot \sin x}{\eta\mu^2 x} \text{ με } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\beta) f(x) = \frac{e^x (\sin x + \eta\mu x)}{\sin^2 x} \text{ με } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\eta\mu x}{x^2} \text{ με } x > 0$$

$$\delta) f(x) = \frac{2e^x - xe^x}{x^3} \text{ με } x > 0$$

13.27 Να βρείτε τις παράγουσες των επόμενων συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{e^x(1 + x \cdot \ln x)}{x} \text{ με } x > 0$$

$$\beta) f(x) = \frac{(x \cdot \ln x - 1)e^x}{x \cdot \ln^2 x} \text{ με } x > 1$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\sin x - \eta\mu x}{e^x}$$

$$\delta) f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ με } x > 0$$

13.28 Να βρείτε τις αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = (2x - 3)^5 + \sqrt{3x + 6} \text{ με } x \geq -2$$

$$\beta) f(x) = e^{3x-5} + \frac{1}{4-2x} \text{ με } x > 2$$

$$\gamma) f(x) = \frac{1}{(7x+5)^3} + \frac{1}{\sqrt{5x-5}} \text{ με } x > 1$$

$$\delta) f(x) = \frac{\eta\mu^3(5x) + 1}{\eta\mu^2(5x)} \text{ με } x \in \left(0, \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 1} \text{ με } x > \frac{1}{2}$$

13.29 Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^6(2x + 3)$

β) $f(x) = (x^3 - 1)^5 x^2$

γ) $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$ δ) $f(x) = xe^{x^2+1}$

13.30 Να βρείτε τις αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x^2$ β) $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x^3$

γ) $f(x) = \frac{3x^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x^3}$ δ) $f(x) = \frac{\epsilon\phi^5 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ε) $f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)$

13.31 Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ με $x > 0$

β) $f(x) = \frac{\eta\mu(\ln x)}{x}$ με $x > 0$

γ) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2 + \eta\mu x}}$ δ) $f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}}$

13.32 Να βρείτε τις αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (e^x + x)^4(e^x + 1)$

β) $f(x) = \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

γ) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^7 x}$ δ) $f(x) = \frac{\ln^5 x}{x}$

13.33 Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 6}$ β) $f(x) = \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2}$

γ) $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$ δ) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

13.34 Να βρείτε τις αρχικές των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^2 x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

β) $f(x) = \frac{\eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) $f(x) = \frac{1 + \eta\mu x + \epsilon\phi^7 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

13.35 Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \epsilon\phi^2 x$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

β) $f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) $f(x) = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

δ) $f(x) = \frac{1 - 2\eta\mu^2 x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

13.36 Να βρείτε τις αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x+1}}$ με $x \geq -\frac{1}{3}$

β) $f(x) = \frac{1}{1 + \eta\mu x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

13.37 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + e^x, & \text{αν } x \geq 0 \\ \eta\mu x + x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις παράγουσες της f .

13.38 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} + 1, & \text{αν } x > 0 \\ ae^{2x} - 2x - 3, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) τον πραγματικό αριθμό a ,

β) τις παράγουσες της f .

13.39 α) Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x + 6 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την παράσταση $4f(x) - 3f'(x)$.

β) Να βρείτε τις παράγουςες της:

$$g(x) = \frac{17\eta\mu x + 6\sigma\upsilon\nu x + 24}{2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x + 6}$$

13.40 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2}{2x^3 + x} \quad \text{με } x \in (0, +\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$F(x) = \ln \frac{2x^2}{2x^2 + 1} \quad \text{με } x \in (0, +\infty)$$

είναι μια παράγουσα της f .

β) Να βρείτε τις παράγουςες της:

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{2x^3 + x} \quad \text{με } x > 0$$

Θεωρητικές ασκήσεις

13.41 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και άρτια συνάρτηση. Αν F είναι μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι και η $G(x) = -F(-x)$ είναι αρχική της f στο $\mathbb{R}$.

13.42 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και περιττή συνάρτηση. Αν F και G είναι δύο αρχικές της f , να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση:

$$H(x) = \frac{F(x) + G(-x)}{2}$$

είναι αρχική της f .

13.43 Έστω ότι οι συναρτήσεις F και G είναι

αρχικές της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση:

$$H(x) = \eta\mu^2\omega \cdot F(x) + \sigma\upsilon\nu^2\omega \cdot G(x)$$

όπου $\omega \in \mathbb{R}$, είναι μια αρχική της f .

13.44 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

H g είναι $1-1$ και η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη. Αν $H(x)$ είναι μια αρχική της $h(x) = f(x)(g^{-1})'(x)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H \circ g$ είναι αρχική της $f \circ g$.

Εύρεση τύπου συνάρτησης

13.45 Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 9$, και F μια αρχική της f στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$F(x) = xf(x) - 2x^3 - x^2 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε:

α) τον τύπο της f ,

β) τις αρχικές της $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

13.46 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, με $F(0) = 0$, για την οποία ισχύει:

$$2xF(x) + x^2f(x) = 4x^3 - f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

α) τον τύπο της f ,

β) την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

13.47 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με $f(0) = e$. Η $F(x)$ είναι αρχική της $f(x)$ και ισχύει ότι:

$$e^x F(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

13.48 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

τέτοια, ώστε $f(0) = 1$ και η $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ να είναι αρχική της $f(x)$. Να βρείτε:

α) τον τύπο της f ,

β) το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $g(x) = 2016$.

13.49 Δίνεται συνεχής συνάρτηση:

$$f: \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}^* \quad \text{με } f(0) = 1$$

Αν η $\frac{1}{f(x)}$ είναι μια αρχική της $f(x)$, να βρείτε τον τύπο της f .

13.50 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 1$, και έστω F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$F(x)f(2-x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = F(x)F(2-x)$$

είναι σταθερή.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να βρείτε τις παράγωγους της $g(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)+1}$.

13.51 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και F μια αρχική της f . Ισχύουν:

$$F(3) = F(-3) = 5$$

και:

$$f(x)F(-x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $F(x)F(-x) = x^2 + 16$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

13.52 Δίνεται συνεχής συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

με $f(1) = 2$, και έστω F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$F(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_F στο σημείο της $M(1, F(1))$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)$$

είναι σταθερή.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

δ) Να βρείτε τις αρχικές της $g(x) = \frac{\ln f(x)}{f(x)}$.

Παράγωγους συνάρτησης και θεωρήματα του διαφορικού λογισμού

13.53 Αν $F(x)$ είναι μια αρχική της $f(x) = e^{x^2}$, με $F(0) = 0$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\eta \mu^2 x}$$

13.54 Έστω $F(x)$ μια αρχική της $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ στο $(0, +\infty)$ και $G(x)$ μια αρχική της $g(x) = F(3x)$ στο $(0, +\infty)$. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot G''(x) - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1}$$

13.55 Έστω $F(x)$ μια αρχική της $f(x) = \sin x^2$ στο $\mathbb{R}$. Δίνεται και η συνεχής συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{F(x^2) - F(x)}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ a, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $M(0, g(0))$.

13.56 Έστω $F(x)$ μια αρχική της $f(x) = \ln x$ στο $(0, +\infty)$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση:

$$G(x) = F\left(x + \frac{1}{2}\right) - F(2-x)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της G .

β) Να μελετήσετε την G ως προς τη μονοτονία.

13.57 Έστω $F(x)$ μια αρχική της:

$$f(x) = \frac{\ln x - \ln 3}{e^x + 1} \quad \text{στο } (0, +\infty)$$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $G(x) = F(4 - x^2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της G .

β) Να μελετήσετε την G ως προς τη μονοτονία.

13.58 Έστω F μια αρχική της $f(x) = e^{x^2}$ στο $\mathbb{R}$.

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα την:

$$g(x) = (2x + 5)F(x)$$

13.59 Έστω $F(x)$ μια αρχική της $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ στο $(0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\ln^2 x}{2}$$

είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $F(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $F(e^2) + F(e^{-2})$.

13.60 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $F(0) = 0$ και $F(2) = 4$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)F(x) = 2x^3$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 2)$.

13.61 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και έστω $F(x)$ μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Αν για τη συνάρτηση:

$$g(x) = F(x - \alpha) - F(x - \beta)$$

ισχύει ότι $g(2016) = g(2017)$, να αποδείξετε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13.62 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$F(x+1) - F(x) \leq x^2 + F(1) - F(0) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

13.63 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $F(0) = 0$ και:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - 2F(x)}{(x-1)^2} = f'(1)$$

α) Να βρείτε τις τιμές $F(1)$ και $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f^2(x) + F(x)f'(x) = 2x - 1$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$.

13.64 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(2) = 2016$. Έστω επίσης F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε η εφαπτομένη της C_F στο $M(1, F(1))$ να έχει εξίσωση:

$$2x + y - 2 = 0$$

α) Να βρείτε τις τιμές $F(1)$ και $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)\eta\mu f(x) + F(x)f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x) = 0$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.

13.65 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $F(0) = F(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)F(\xi) + f(\xi) = 0$$

13.66 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $F(x)$ μια αρχική της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x-1)F(x) - \ln x \geq e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 - x + 1$$

για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $F(1) = 0$,

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = -\frac{F(\xi)}{\xi}$$

13.67 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

και έστω F μια αρχική της f στο $[1, 4]$ για την οποία ισχύει:

$$F(2) < F(1) < F(4) < F(3)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

13.68 Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_F στο $M(0, F(0))$ να έχει εξίσωση $2x - y + 4 = 0$.

α) Να βρείτε τις τιμές $F(0)$ και $f(0)$.

β) Να μελετήσετε την F ως προς την κυρτότητα.

γ) Να αποδείξετε ότι $F(3) + F(-7) > 0$.

δ) Να αποδείξετε ότι $F(x+2) - F(x) > 4$ για κάθε $x > 0$.

13.69 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Αν $F(x)$ είναι μια αρχική της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x))$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(2x) - F(x))$

13.70 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και:

$$f^2(x) - 4f(x) + \frac{4x^2 + 3}{x^4 + 2x^2 + 1} = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Αν F είναι μια αρχική της f , να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(F(2x) - F(x))\eta\mu x]$$

Συνδυαστικά θέματα

13.71 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύουν $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ και:

$$f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu^3 x \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να βρείτε:

α) τον τύπο της f ,

β) τις αρχικές της $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

13.72 α) Να αποδείξετε ότι για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση:

$$G(x) = \frac{x + \ln(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)}{2}$$

είναι μια αρχική της $g(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$.

β) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και:

$$f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$$

για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε τον τύπο της f .

13.73 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και:

$$f(x) = x(f'(x) - 1) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f και το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις αρχικές της:

$$g(x) = \frac{f(x)f'(x)}{x^2}$$

13.74 Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει:

$$xf''(x) + f'(x) = 4x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 2$. Να βρείτε:

α) τις τιμές $f'(1)$ και $f(1)$,

β) τον τύπο της f ,

γ) τις αρχικές της $g(x) = e^{f(x)}$.

13.75 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + ax + 1} + \beta x$$

όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$. Η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = -2x$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς a και β .

β) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, την οποία και να βρείτε.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x)\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε τις αρχικές της $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

13.76 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

και έστω F μια αρχική της f για την οποία ισχύει:

$$F(1 - 2x) + F(x^2 + 2) = x^4 + 5x^2 + 2x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(3)$.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, 0)$ με $x_0 \in (1, 3)$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$, με $\xi_1 < \xi_2$, ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = 2$$

13.77 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $f(1) = 0$ και:

$$f'(x) - f(x) = \frac{e^x}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Αν $F(x)$ είναι μια αρχική της $f(x)$ στο $(0, +\infty)$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (F(2x) - F(x))$$

13.78 Α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$g(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 + 2)$$

Β. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της f για την οποία ισχύει $F(0) = 0$ και:

$$f(x) = xF(x) + x^3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = 2x(e^{\frac{x^2}{2}} - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = 1$$

και στη συνέχεια ότι $f'(\xi) = \frac{1}{\xi} + \xi + 2\xi^2$.

13.79 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 1$. Έστω επίσης F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) - F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{3F(x) + x^3}{e^x}$$

είναι σταθερή.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Έστω $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$ συνεχής συνάρτηση με $f(h(2)) < \frac{2-e^2}{e^2}$ και $H(x)$ μια αρχική της $h(x)$ στο $(0, +\infty)$ με $H(1) = 0$. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(H(x)) > \frac{2}{e}$$

13.80 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

με $f(0) > 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Δίνεται επίσης συνεχής συνάρτηση:

$$g: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$$

και έστω $G(x)$ η αρχική της $g(x)$ στο $[0, 1]$ με $G(0) = 0$. Τέλος, δίνεται $H(x)$ αρχική της συνάρτησης $h(x) = f(x)g(x)$ στο $[0, 1]$ με $H(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $H(x) > 0$ και $G(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$H(x)G(1) \leq G(x)H(1)$$

για κάθε $x \in (0, 1]$.

γ) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)(\ln^2(x+1) - \eta\mu^2 x)}{G(x)(1 - e^{-x^2})}$$

13.81 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

και έστω $G(x)$ μια αρχική της $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $G(1) = 0$ και:

$$xf(x) + 1 = -xG(x) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να λύσετε στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$G(x^2 + 7) > \frac{G(x^2 + 6) + G(x^2 + 8)}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13.82 Δίνεται συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + \eta\mu x - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{5}{2}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq 1$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

β) Έστω επίσης $G(x)$ μια αρχική της $g(x) = f^4(x)$ και $H(x)$ μια αρχική της $h(x) = f^2(x)$ στο $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{G(x)}{2} = H^2(x) \quad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

Να βρείτε:

i) τον τύπο της f ,

ii) τους τύπους των $G(x)$ και $H(x)$.

13.83 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για

την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \ell \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

γ) Έστω $H(x)$ μια παράγουσα της $h(x)$ για την οποία ισχύει $H(0) = 0$ και:

$$3H(x) = \frac{f(x)}{x^3} - 1 \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x^3 e^{x^3} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 iii) Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ να βρείτε

το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$xe^{x^3 + \ln(x^2 + 1)} = a + xe^{x^3}$$

Θέματα των οποίων η λύση απαιτεί ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη

13.84 Να βρείτε τις αρχικές των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$$

και:

$$g(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$$

με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

13.85 Δίνεται συνεχής συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

με $f(1) = 2$, και έστω $F: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ μια αρχική της f για την οποία ισχύει:

$$f(x)F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

13.86 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

- α) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
 β) Αν F είναι μια αρχική της f , να αποδείξετε ότι:

$$F(x+y) - F(x) =$$

$$= xf(y) + F(y) - F(0) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

- γ) Αν $f(1) = 2$, να βρείτε τον τύπο της f .

13.87 Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση:

$$f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

και έστω F η αρχική της f στο $[1, +\infty)$, με $F(1) = 0$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) > F(x) \quad \text{για κάθε } x \geq 1$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 1$.
 β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$F(e^{2x} + 1) - F(2x^2 + 2) = 0$$

13.88 Έστω $F(x)$ μια αρχική της $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2}$ στο $\mathbb{R}$, με $F(1) = 0$, και $G(x)$ μια αρχική της:

$$g(x) = \frac{1}{e^x(x^2 + 2)}$$

στο $\mathbb{R}$ με $G(0) = 0$.

- α) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
 β) Να λύσετε την ανίσωση $F(F(x)) > G(-1)$.
 γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει:

$$\frac{e(x-1)}{3} < F(x) < \frac{e^x(x-1)}{x^2 + 2}$$

- δ) Να υπολογίσετε το:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)\eta\mu x}{e^x}$$

13.89 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ με $x_2 < x_1$ τέτοια, ώστε:

$$f(x_2) = \frac{1-x_1}{x_1} \cdot f(x_1)$$

Ερωτήσεις θεωρίας

13.90 Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια συνάρτηση λέγεται παράγουσα ή αρχική της f στο Δ ;

13.91 Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

α) όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ ,

β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

13.92 Να συμπληρώσετε τη στήλη II του παρακάτω πίνακα με τις παράγουσες των συναρτήσεων της στήλης I.

ΣΤΗΛΗ I Συνάρτηση	ΣΤΗΛΗ II Παράγουσες
$f(x) = 0$	
$f(x) = 1$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = x^a, a \neq -1$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \eta \mu x$	
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	
$f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x}$	
$f(x) = e^x$	
$f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$	

Ερωτήσεις τύπου Σωστό ή Λάθος

13.93 Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

- α) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι αρχικές της $f'(x)$ είναι οι $G(x) = f(x) + c$ με $c \in \mathbb{R}$.
- β) Η $F(x) = \ln(2x)$ είναι μια παράγουσα της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$.
- γ) Όλες οι παράγουσες της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $\mathbb{R}^*$ έχουν τη μορφή $F(x) = \ln|x| + c$ με $c \in \mathbb{R}$.
- δ) Αν F και G είναι δύο παράγουσες της f στο διάστημα Δ , τότε η $H(x) = F(x) - G(x)$ είναι σταθερή στο Δ .
- ε) Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αρχική στο (a, β) .

Κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1ο

- α) Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
- β) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε:
- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
 - κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- γ) Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
- i) Οι αρχικές της $f(x) = \sin x + \eta \mu x$ στο $\mathbb{R}$ είναι οι:
- A:** $F(x) = \eta \mu x + \sin x + c$ **B:** $F(x) = -\eta \mu x + \sin x + c$
Γ: $F(x) = \eta \mu x - \sin x + c$ **Δ:** $F(x) = -\eta \mu x - \sin x + c$
- ii) Οι αρχικές της $f(x) = \eta \mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ στο $\mathbb{R}$ είναι οι:
- A:** $F(x) = 3\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + c$ **B:** $F(x) = -3\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + c$
Γ: $F(x) = \frac{\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}{3} + c$ **Δ:** $F(x) = -\frac{\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}{3} + c$
- iii) Οι αρχικές της $f(x) = 4^x$ στο $\mathbb{R}$ είναι οι:
- A:** $F(x) = 4^x \cdot \ln 4 + c$ **B:** $F(x) = \frac{4^{x-\frac{1}{2}}}{\ln 2} + c$
Γ: $F(x) = 4^x + c$ **Δ:** $F(x) = \frac{\ln 4}{4^x} + c$
- iv) Αν F και G είναι δύο αρχικές της f σε ένα διάστημα Δ , τότε αρχική της f στο Δ είναι και η συνάρτηση:
- A:** $H(x) = F(x) + G(x)$ **B:** $H(x) = F(x) - G(x)$
Γ: $H(x) = 5F(x) - 3G(x)$ **Δ:** $H(x) = -7F(x) + 8G(x)$

Θέμα 2ο

Να βρείτε:

α) την αρχική F της $f(x) = \frac{\eta\mu(\ln x)}{x}$ για την οποία ισχύει $F(e^\pi) = 3$,

β) την αρχική G της $g(x) = \frac{\ln \frac{e}{x}}{x^2}$ για την οποία ισχύει $G(1) = 2016$.

Θέμα 3ο

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $G(x)$ μια αρχική της $g(x) = e^x f(x)$ στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $G(0) = 0$ και:

$$f(x) = (x + G(x))e^{-x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Αν F είναι η αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0) = 0$, να βρείτε:

i) τον τύπο της $F(x)$, **ii)** το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{\eta\mu^2 x}$.

Θέμα 4ο

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^*$ και F μια αρχική της f στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για τις

οποίες ισχύουν $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και:

$$f^2(x) + F^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) + F(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = F(x)\sin x - f(x)\eta\mu x$$

είναι σταθερή.

γ) Να βρείτε τους τύπους $F(x)$ και $f(x)$.

δ) Να βρείτε τις αρχικές της συνάρτησης:

$$h(x) = \frac{1 - 2\eta\mu^2 x}{(F(x) + f(x))^2}$$