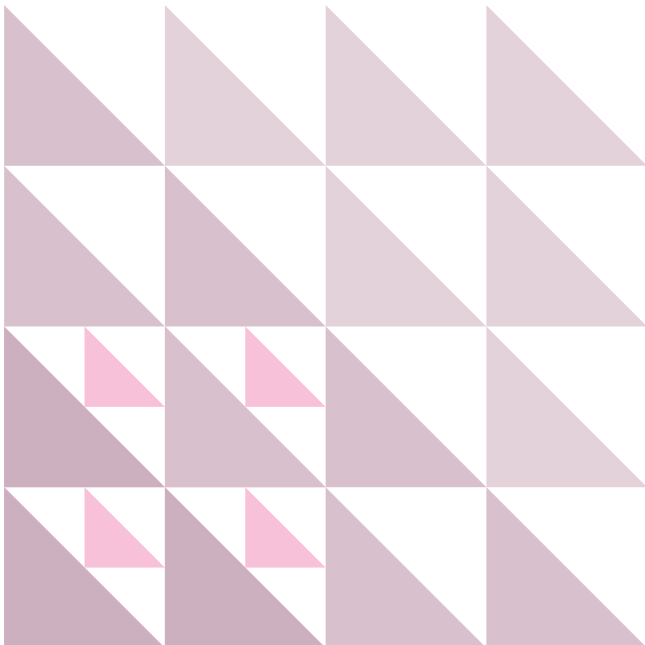


Βασίλης Παπαδάκης

Μαθηματικά

Β' Γυμνασίου

Θεωρία – Μεθοδολογία
Ασκήσεις για λύση
Ασκήσεις για δυνατούς λύτες
Λύσεις των ασκήσεων του Σχολικού Βιβλίου



Φίλη μαθήτριά, φίλε μαθητή

Η ύλη των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου αποτελείται από δύο μέρη, την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία, τα οποία περιέχουν σημαντικά κεφάλαια. Η εξοικείωση με τις νέες έννοιες είναι απαραίτητη τόσο για την Γ΄ Γυμνασίου, όσο και για τις τάξεις του Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό έχει γραφεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μαθητής να ξεκινά από τη θεωρία και τις βασικές εφαρμογές της, να συνεχίζει με τη λύση ασκήσεων, η δυσκολία των οποίων προοδευτικά αυξάνεται, και να φτάνει σταδιακά στο επίπεδο να λύνει σύνθετα θέματα.

Κάθε ενότητα του βιβλίου περιέχει:

- βασική θεωρία και εφαρμογές της,
- λυμένες ασκήσεις,
- ερωτήσεις κατανόησης,
- πολλές ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας,
- συνδυαστικά θέματα,
- ασκήσεις για δυνατούς λύτες,
- κριτήριο αξιολόγησης.

Στην αρχή του βιβλίου υπάρχει μία παράγραφος με βασικές γνώσεις από την Α΄ Γυμνασίου και ακολουθούν **τρεις παράγραφοι (7.8, 7.9 και 7.10) από το σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου**, οι οποίες έχουν ενταχθεί στην ύλη της Β΄ Γυμνασίου.

Επιπλέον στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν τόσο οι απαντήσεις των θεμάτων αυτού του βιβλίου όσο και οι **αναλυτικές λύσεις όλων των δραστηριοτήτων - ερωτήσεων - ασκήσεων - προβλημάτων του σχολικού βιβλίου**.

Θα ήθελα τέλος να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Δημήτρη Τσάκο για την επιμέλεια του βιβλίου και τις εύστοχες παρατηρήσεις του.

*Βασίλης Γ. Παπαδάκης
Μαθηματικός*

Περιεχόμενα

1. Ρητοί αριθμοί	9
2. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό	26
3. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο	39
4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών	51
5. Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις	62
6. Εξισώσεις α' βαθμού.	71
7. Επίλυση τύπων	88
8. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	92
9. Ανισώσεις α' βαθμού	102
10. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Εξισώσεις – Ανισώσεις.	125
11. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	129
12. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί	146
13. Προβλήματα	160
14. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Πραγματικοί αριθμοί	164
15. Η έννοια της συνάρτησης	168
16. Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης	179
17. Η συνάρτηση $y = ax$	198
18. Η συνάρτηση $y = ax + \beta$	209
19. Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ – Η υπερβολή.	224
20. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Συναρτήσεις	234
21. Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα.	238
22. Γραφικές παραστάσεις	243
23. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων	250
24. Ομαδοποίηση παρατηρήσεων	255
25. Μέση τιμή – Διάμεσος	258
26. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας	266
27. Μονάδες μέτρησης επιφανειών	269
28. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων.	274

29. Πυθαγόρειο θεώρημα	290
30. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα	299
31. Εφαπτομένη οξείας γωνίας.	302
32. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας.	313
33. Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης	325
34. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	331
35. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Τριγωνομετρία	341
36. Η έννοια του διανύσματος	345
37. Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων	351
38. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες	357
39. Εγγεγραμμένες γωνίες	361
40. Κανονικά πολύγωνα.	373
41. Μήκος κύκλου	382
42. Μήκος τόξου	389
43. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	398
44. Εμβαδόν κυκλικού τομέα	405
45. Επανάληψη στο κεφάλαιο: Μέτρηση κύκλου	415
46. Ευθείες και επίπεδα στον χώρο	419
47. Μέτρηση στερεών	426
48. Γενικά θέματα σε όλη την ύλη για τις εξετάσεις.	447
<i>Απαντήσεις – Υποδείξεις</i>	457
<i>Απαντήσεις σχολικού βιβλίου</i>	569

1

Ρητοί αριθμοί (Βασικές γνώσεις από το σχολικό βιβλίο της Α' Γυμνασίου)

Βασική θεωρία και εφαρμογές

1.1 Βασικές έννοιες

Πρόσημο - Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

- Τα σύμβολα «+» (συν) και «-» (πλην) λέγονται **πρόσημα**.
- Οι αριθμοί που έχουν μπροστά τους το πρόσημο «+» λέγονται **θετικοί αριθμοί**.
- Οι αριθμοί που έχουν μπροστά τους το πρόσημο «-» λέγονται **αρνητικοί αριθμοί**.
- Στους θετικούς αριθμούς μπορούμε να παραλείψουμε το πρόσημο «+».
- Το 0 (μηδέν) δεν έχει πρόσημο, δηλαδή δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

Ομόσημοι αριθμοί - Ετερόσημοι αριθμοί

- **Ομόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν το **ίδιο πρόσημο**.
- **Ετερόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν **διαφορετικό πρόσημο**.

Φυσικοί, ακέραιοι και ρητοί αριθμοί

- **Φυσικοί αριθμοί** είναι οι:

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

- **Ακέραιοι αριθμοί** είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς, δηλαδή οι:

$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

- **Ρητοί αριθμοί** είναι όλοι οι γνωστοί μας, έως τώρα, αριθμοί, δηλαδή οι φυσικοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί, μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

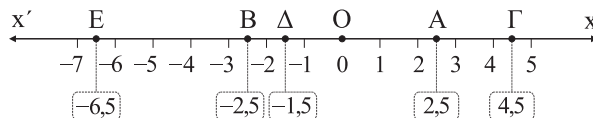
Εφαρμογή

Να παραστήσετε με σημεία ενός άξονα τους αριθμούς:

$$+2\frac{1}{2}, \quad -\frac{5}{2}, \quad 4,5, \quad -\frac{3}{2}, \quad -6,5$$

Λύση

Οι αριθμοί $+2\frac{1}{2} = +2,5$, $-\frac{5}{2} = -2,5$, $4,5$, $-\frac{3}{2} = -1,5$ και $-6,5$ παριστάνονται στον παρακάτω άξονα από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε αντίστοιχα.



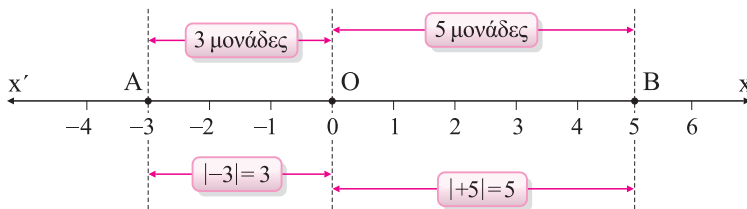
1.3 Απόλυτη τιμή

Ορισμός της απόλυτης τιμής ρητού αριθμού

Η **απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού a είναι η απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

Παράδειγμα

Οι αριθμοί -3 και $+5$ παριστάνονται στον άξονα των ρητών αριθμών από τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτουν τα εξής:

- Το σημείο Α, που έχει τετμημένη -3 , απέχει 3 μονάδες από την αρχή O του άξονα. Αυτό σημαίνει ότι $|-3|=3$.
- Το σημείο Β, που έχει τετμημένη $+5$, απέχει 5 μονάδες από την αρχή O του άξονα. Αυτό σημαίνει ότι $|+5|=5$.

Αντίθετος ρητού αριθμού

- Δύο αριθμοί ονομάζονται **αντίθετοι** όταν είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.
- Ο αντίθετος του αριθμού x είναι ο αριθμός $-x$.

Παράδειγμα

- Ο αντίθετος του αριθμού $+4$ είναι ο αριθμός -4 .
- Ο αντίθετος του αριθμού $-\frac{2}{5}$ είναι ο αριθμός $+\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$.

Υπολογισμός απόλυτων τιμών

- Η απόλυτη τιμή ενός **θετικού αριθμού** είναι ο ίδιος ο αριθμός.
- Η απόλυτη τιμή ενός **αρνητικού αριθμού** είναι ο αντίθετός του.
- Η απόλυτη τιμή του **μηδενός (0)** είναι το μηδέν (0).

Εφαρμογή

Να βρείτε τις παρακάτω απόλυτες τιμές:

α) $|+6|$

β) $|-8|$

γ) $|0|$

Λύση

α) Ο αριθμός $+6$ είναι θετικός αριθμός, άρα:

$$|+6| = 6$$

β) Ο αριθμός -8 είναι αρνητικός αριθμός, άρα:

$$|-8| = -(-8) = 8$$

γ) Είναι $|0| = 0$.

Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού δεν είναι ποτέ αρνητικός αριθμός, αλλά πάντα θετικός ή μηδέν.

1.4 Σύγκριση ρητών αριθμών

Σύγκριση ρητού αριθμού με το μηδέν

- Αν ο ρητός αριθμός x είναι **θετικός**, τότε ο x είναι μεγαλύτερος από το μηδέν (ή το μηδέν είναι μικρότερο από τον x) και γράφουμε:

$$x > 0 \quad \text{ή} \quad 0 < x$$

- Αν ο ρητός αριθμός x είναι **αρνητικός**, τότε ο x είναι μικρότερος από το μηδέν (ή το μηδέν είναι μεγαλύτερο από τον x) και γράφουμε:

$$x < 0 \quad \text{ή} \quad 0 > x$$

Σύγκριση θετικών - αρνητικών αριθμών

- Από δύο **θετικούς αριθμούς**, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
- Από δύο **αρνητικούς αριθμούς**, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

Εφαρμογή

Να συγκρίνετε τους παρακάτω ρητούς αριθμούς:

α) -8 και 0

β) 6 και 0

γ) $+5$ και $+7$

δ) -3 και -8

ε) -4 και 2

Λύση

α) Ο αριθμός -8 είναι αρνητικός, άρα $-8 < 0$.

β) Ο αριθμός 6 είναι θετικός, άρα $6 > 0$.

γ) Οι αριθμοί $+5$ και $+7$ είναι θετικοί. Ισχύει ότι:

$$|+5| = 5 \quad \text{και} \quad |+7| = 7$$

Παρατηρούμε ότι $5 < 7$, άρα $|+5| < |+7|$, οπότε θα είναι:

$$+5 < +7$$

δ) Οι αριθμοί -3 και -8 είναι αρνητικοί. Ισχύει ότι:

$$|-3| = 3 \quad \text{και} \quad |-8| = 8$$

Παρατηρούμε ότι $3 < 8$, άρα $|-3| < |-8|$, οπότε θα είναι:

$$-3 > -8$$

ε) Ο αριθμός -4 είναι αρνητικός και ο αριθμός 2 είναι θετικός, άρα ισχύει:

$$-4 < 2$$

1.5 Πρόσθεση ρητών αριθμών

- Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους ρητούς**, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.
- Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους ρητούς**, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά αυτή βάζουμε το πρόσημο του ρητού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(+7) + (+3)$

β) $(-2) + (-4)$

γ) $(+5) + (-9)$

δ) $(-6) + (+10)$

Λύση

α) Οι αριθμοί $+7$ και $+3$ είναι ομόσημοι, άρα τους προσθέτουμε ως εξής:

$$(+7) + (+3) = +(|+7| + |+3|) = +(7 + 3) = +10$$

β) Οι αριθμοί -2 και -4 είναι ομόσημοι, άρα τους προσθέτουμε ως εξής:

$$(-2) + (-4) = -(|-2| + |-4|) = -(2 + 4) = -6$$

γ) Οι αριθμοί $+5$ και -9 είναι ετερόσημοι. Παρατηρούμε ότι:

$$|+5| = 5 \quad \text{και} \quad |-9| = 9$$

Άρα μεγαλύτερη απόλυτη τιμή έχει ο αριθμός -9 . Έτσι έχουμε:

$$(+5) + (-9) = -(|-9| - |+5|) = -(9 - 5) = -4$$

δ) Οι αριθμοί -6 και $+10$ είναι ετερόσημοι. Παρατηρούμε ότι:

$$|-6| = 6 \quad \text{και} \quad |+10| = 10$$

Άρα μεγαλύτερη απόλυτη τιμή έχει ο αριθμός $+10$. Έχουμε:

$$(-6) + (+10) = +(|+10| - |-6|) = +(10 - 6) = +4$$

1.6 Ιδιότητες της πρόσθεσης

- **Αντιμεταθετική ιδιότητα**

Σε ένα άθροισμα μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των προσθετέων. Δηλαδή ισχύει:

$$a + b = b + a$$

- **Προσεταιριστική ιδιότητα**

Σε ένα άθροισμα πολλών προσθετέων μπορούμε να αντικαταστήσουμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύσουμε έναν προσθετέο σε άθροισμα. Δηλαδή ισχύει:

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma)$$

- Το μηδέν, όταν προστεθεί σε έναν ρητό αριθμό, δεν τον μεταβάλλει. Δηλαδή ισχύει:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

- Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν. Δηλαδή ισχύει:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε το παρακάτω άθροισμα:

$$(+7) + (-10) + (-6) + (-19) + (+10) + (+15) + (-3)$$

Λύση

Σε ένα άθροισμα πολλών προσθετέων δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία θα τους προσθέσουμε. Για τον λόγο αυτό έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίζουμε απλούστερα τέτοια αθροίσματα ως εξής:

- Διαγράφουμε τους αντίθετους αριθμούς (αν υπάρχουν).
- Προσθέτουμε ξεχωριστά όλους τους θετικούς και όλους τους αρνητικούς αριθμούς.
- Τέλος, προσθέτουμε τα δύο επιμέρους αθροίσματα.

Έχουμε:

$$(+7) + \cancel{(-10)} + (-6) + (-19) + \cancel{(+10)} + (+15) + (-3) = \leftarrow \text{Διαγράφουμε τους αντίθετους αριθμούς.}$$

$$= (+7) + (-6) + (-19) + (+15) + (-3) =$$

$$= (+7) + (+15) + (-6) + (-19) + (-3) = \leftarrow \text{Χωρίζουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς αριθμούς.}$$

$$= (+22) + (-28) = -6 \quad \leftarrow \text{Προσθέτουμε ξεχωριστά τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς και στο τέλος προσθέτουμε τα επιμέρους αθροίσματα.}$$

1.7 Αφαίρεση ρητών αριθμών

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό a τον αριθμό β , προσθέτουμε στον a τον αντίθετο του β . Δηλαδή:

$$a - \beta = a + (-\beta)$$

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές:

α) $(+12) - (+5)$

β) $(+4) - (+7)$

γ) $(-6) - (-3)$

δ) $(+3) - (-8)$

Λύση

α) Για να βρούμε τη διαφορά $(+12) - (+5)$, θα προσθέσουμε στον $+12$ τον αντίθετο του $+5$, δηλαδή τον -5 :

$$(+12) - (+5) = (+12) + (-5) = +(12 - 5) = +7$$

Ομοίως έχουμε:

$$\beta) (+4) - (+7) = (+4) + (-7) = -(7 - 4) = -3$$

$$\gamma) (-6) - (-3) = (-6) + (+3) = -(6 - 3) = -3$$

$$\delta) (+3) - (-8) = (+3) + (+8) = +(3 + 8) = +11$$

Όπως φαίνεται στα προηγούμενα παραδείγματα, στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση. Αυτό σημαίνει ότι η αφαίρεση δύο ρητών μπορεί να γίνει πάντα. Δηλαδή δεν είναι απαραίτητο ο μειωτέος να είναι μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο.

1.8 Απαλοιφή παρενθέσεων

Σε ορισμένες αριθμητικές παραστάσεις εμφανίζονται παρενθέσεις, οι οποίες περιέχουν έναν ή περισσότερους αριθμούς με τα πρόσημά τους. Μπροστά από τις παρενθέσεις αυτές μπορεί να υπάρχουν τα πρόσημα «+» ή «-». Για να τις απαλείψουμε, εργαζόμαστε ως εξής:

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το «+» (ή δεν έχει πρόσημο), τότε μπορούμε να απαλείψουμε την παρένθεση, μαζί με το «+» (αν έχει), και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους όπως είναι.
- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το «-», τότε μπορούμε να την απαλείψουμε και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα.

Εφαρμογή

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = +(-5) - (-3) + (+6) - (+14)$$

$$\beta) B = -(12 - 8) + (-7 + 5) - (6 - 8 - 10)$$

Λύση

α) Έχουμε:

$$A = +(-5) - (-3) + (+6) - (+14) =$$

$$= -5 + 3 + 6 - 14 =$$

← Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.

$$= +3 + 6 - 5 - 14 =$$

← Χωρίζουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς αριθμούς.

$$= +9 - 19 = -10$$

← Προσθέτουμε ξεχωριστά τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς και στο τέλος προσθέτουμε τα επιμέρους αθροίσματα.

β) Θα βρούμε την τιμή της παράστασης B κάνοντας πρώτα απαλοιφή των παρενθέσεων:

$$B = -(12 - 8) + (-7 + 5) - (6 - 8 - 10) = -12 + 8 - 7 + 5 - 6 + 8 + 10 = \\ = +8 + 5 + 8 + 10 - 12 - 7 - 6 = +31 - 25 = 6$$

Άλλος τρόπος

Μπορούμε να βρούμε την τιμή της παράστασης **B** κάνοντας πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις:

$$B = -(12 - 8) + (-7 + 5) - (6 - 8 - 10) = \\ = -(+4) + (-2) - (-12) = -4 - 2 + 12 = 6$$

1.9 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς (δύο θετικούς ή δύο αρνητικούς), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο τους βάζουμε το πρόσημο «+». Θα θυμόμαστε τους κανόνες:

$$+ \cdot + = + \quad \text{και} \quad - \cdot - = +$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ετερόσημους** ρητούς αριθμούς (έναν θετικό με έναν αρνητικό), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο τους βάζουμε το πρόσημο «-». Θα θυμόμαστε τους κανόνες:

$$+ \cdot - = - \quad \text{και} \quad - \cdot + = -$$

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(+3) \cdot (+5)$ **β)** $(-4) \cdot (-9)$ **γ)** $-7 \cdot (+2)$

Λύση

α) Οι αριθμοί $+3$ και $+5$ είναι ομόσημοι (θετικοί και οι δύο). Άρα το γινόμενό τους είναι:

$$(+3) \cdot (+5) = +(3 \cdot 5) = +15$$

β) Οι αριθμοί -4 και -9 είναι ομόσημοι (αρνητικοί και οι δύο). Άρα το γινόμενό τους είναι:

$$(-4) \cdot (-9) = +(4 \cdot 9) = +36$$

γ) Οι αριθμοί -7 και $+2$ είναι ετερόσημοι. Άρα το γινόμενό τους είναι:

$$-7 \cdot (+2) = -(7 \cdot 2) = -14$$

1.10 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

Αντιμεταθετική ιδιότητα

Σε ένα γινόμενο μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά δύο παραγόντων. Δηλαδή ισχύει:

$$a \cdot \beta = \beta \cdot a$$

Προσεταιριστική ιδιότητα

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε δύο παράγοντες με το γινόμενό τους ή να αναλύσουμε έναν παράγοντα σε γινόμενο. Δηλαδή ισχύει:

$$a \cdot (\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta) \cdot \gamma$$

Γινόμενο ρητού με το 1

Όταν ένας ρητός αριθμός πολλαπλασιάζεται με τη μονάδα, δεν μεταβάλλεται. Δηλαδή ισχύει:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Γινόμενο ρητού με το 0

Όταν ένας ρητός αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 0, το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ίσο με μηδέν (0). Δηλαδή ισχύει:

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

Επιμεριστική ιδιότητα

- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την **πρόσθεση**:

$$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$$

- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την **αφαίρεση**:

$$a \cdot (\beta - \gamma) = a \cdot \beta - a \cdot \gamma$$

Εφαρμογή

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $[(-98) \cdot (+5)] \cdot (-2)$

β) $1 \cdot (-73)$

γ) $(-65) \cdot 0$

δ) $-7 \cdot (-18) + 5 \cdot (-18)$

ε) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 9 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5$

Λύση

α) Σύμφωνα με την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, έχουμε:

$$[(-98) \cdot (+5)] \cdot (-2) = (-98) \cdot [(+5) \cdot (-2)] = (-98) \cdot (-10) = +980$$

β) Ισχύει ότι $1 \cdot (-73) = -73$.

γ) Ισχύει ότι $(-65) \cdot 0 = 0$.

δ) Εκμεταλλευόμαστε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$-7 \cdot (-18) + 5 \cdot (-18) = (-7 + 5) \cdot (-18) = (-2) \cdot (-18) = +36$$

ε) Θα εκμεταλλευτούμε κι εδώ την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 9 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (9 - 5) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 = -2$$

1.11 Αντίστροφοι αριθμοί

- Δύο ρητοί αριθμοί α και β , **διάφοροι του μηδενός**, λέγονται **αντίστροφοι** όταν το γινόμενο τους είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή όταν ισχύει:

$$\alpha \cdot \beta = 1$$

- Ο καθένας από τους α και β είναι αντίστροφος του άλλου.
- Ο αντίστροφος του κ είναι ο $\frac{1}{\kappa}$.
- Ο αντίστροφος του $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ο $\frac{\lambda}{\kappa}$.
- Δύο αντίστροφοι αριθμοί έχουν το **ίδιο πρόσημο**.

Εφαρμογή

Να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω ρητών αριθμών:

α) -10 β) $+\frac{1}{7}$ γ) $-\frac{6}{11}$ δ) -1 ε) 0

Λύση

α) Ο αντίστροφος του -10 είναι ο αριθμός $-\frac{1}{10}$, διότι:

$$(-10) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) = +\left(10 \cdot \frac{1}{10}\right) = +\frac{10}{10} = 1$$

β) Ο αντίστροφος του $+\frac{1}{7}$ είναι ο αριθμός $+7$, διότι:

$$\left(+\frac{1}{7}\right) \cdot (+7) = +\left(\frac{1}{7} \cdot 7\right) = +\frac{7}{7} = 1$$

γ) Ο αντίστροφος του $-\frac{6}{11}$ είναι ο αριθμός $-\frac{11}{6}$, διότι:

$$\left(-\frac{6}{11}\right) \cdot \left(-\frac{11}{6}\right) = +\left(\frac{6}{11} \cdot \frac{11}{6}\right) = +\frac{66}{66} = 1$$

δ) Ο αντίστροφος του -1 είναι ο ίδιος αριθμός, δηλαδή ο -1 , διότι:

$$(-1) \cdot (-1) = +(1 \cdot 1) = 1$$

ε) Ο αριθμός 0 (μηδέν) **δεν έχει αντίστροφο**, διότι οποιονδήποτε αριθμό και να πολλαπλασιάσουμε με το 0, το αποτέλεσμα είναι 0 (και όχι 1).

1.12 Γινόμενο πολλών παραγόντων

- Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο **πολλών παραγόντων** (που είναι διάφοροι του μηδενός), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:
 - ▶ το πρόσημο «+» αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο** (ζυγό),
 - ▶ το πρόσημο «-» αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό** (μονό).
- Αν **τουλάχιστον ένας** παράγοντας είναι μηδέν (0), τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν (0).

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5)$ β) $(-1) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-2) \cdot (-2)$

γ) $(-1821) \cdot (+1940) \cdot 0$

Λύση

α) Στο γινόμενο:

$$(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5)$$

υπάρχουν 3 αρνητικοί παράγοντες (**περιττό πλήθος**). Επομένως έχουμε:

$$(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5) = -(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = -120$$

β) Στο γινόμενο:

$$(-1) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-2) \cdot (-2)$$

υπάρχουν 4 αρνητικοί παράγοντες (**άρτιο πλήθος**). Επομένως έχουμε:

$$(-1) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-2) \cdot (-2) = +(1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2) = +12$$

γ) Στο γινόμενο $(-1821) \cdot (+1940) \cdot 0$ ένας παράγοντας είναι το 0. Επομένως το γινόμενο είναι ίσο με 0. Δηλαδή:

$$(-1821) \cdot (+1940) \cdot 0 = 0$$

1.13 Διαίρεση ρητών αριθμών

- Για να διαιρέσουμε δύο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «+». Θα θυμόμαστε τους κανόνες:

$$+ : + = + \quad \text{και} \quad - : - = +$$

- Για να διαιρέσουμε δύο **ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «-». Θα θυμόμαστε τους κανόνες:

$$+ : - = - \quad \text{και} \quad - : + = -$$

Εφαρμογή

Να βρείτε τα παρακάτω πηλίκα:

α) $(+10) : (+2)$

β) $(-12) : (-4)$

γ) $21 : (-7)$

δ) $(-32) : 8$

Λύση

α) Οι αριθμοί +10 και +2 είναι ομόσημοι (θετικοί και οι δύο). Άρα το πηλίκο τους είναι:

$$(+10) : (+2) = +(10 : 2) = +5$$

β) Οι αριθμοί -12 και -4 είναι ομόσημοι (αρνητικοί και οι δύο). Άρα το πηλίκο τους είναι:

$$(-12) : (-4) = +(12 : 4) = +3$$

γ) Οι αριθμοί 21 και -7 είναι ετερόσημοι (ένας θετικός και ένας αρνητικός). Άρα το πηλίκο τους είναι:

$$21 : (-7) = -(21 : 7) = -3$$

δ) Οι αριθμοί -32 και 8 είναι ετερόσημοι. Άρα το πηλίκο τους είναι:

$$(-32) : 8 = -(32 : 8) = -4$$

1.14 Αριθμητικές παραστάσεις

Ορισμός

Αριθμητική παράσταση λέγεται μια παράσταση η οποία περιέχει πράξεις με αριθμούς.

Προτεραιότητα των πράξεων

1. Σε αριθμητικές παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις:
 - Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις, αν υπάρχουν.
 - Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με τη σειρά που δίνονται.
 - Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
2. Σε αριθμητικές παραστάσεις που έχουν παρενθέσεις, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και στη συνέχεια τις πράξεις, με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω, στην αριθμητική παράσταση που προκύπτει.

Εφαρμογή

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{6 \cdot [3 \cdot 2^2 - (2 \cdot 7 - 3^2)] - (-5 + 7)^3}{4 \cdot [(-6) \cdot (-3) + 5 \cdot (-4)] - (3 \cdot 5 - 6 \cdot 2)^2}$$

Λύση

Η αριθμητική παράσταση γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} A &= \frac{6 \cdot [3 \cdot 2^2 - (2 \cdot 7 - 3^2)] - (-5 + 7)^3}{4 \cdot [(-6) \cdot (-3) + 5 \cdot (-4)] - (3 \cdot 5 - 6 \cdot 2)^2} = \\ &= \frac{6 \cdot [3 \cdot 4 - (14 - 9)] - 2^3}{4 \cdot (18 - 20) - (15 - 12)^2} = \frac{6 \cdot (12 - 5) - 8}{4 \cdot (-2) - 3^2} = \\ &= \frac{6 \cdot 7 - 8}{-8 - 9} = \frac{42 - 8}{-17} = \frac{34}{-17} = -2 \end{aligned}$$

Θέματα προς απάντηση

Πρόσθεση - Αφαίρεση

1.15 Να υπολογίσετε τα επόμενα αθροίσματα:

α) $(+7) + (-8) + (-2)$

β) $(-5) + (-9) + (+6)$

γ) $(+2) + (-11) + (+3)$

δ) $(-3) + (-12) + (-17)$

ε) $(+4) + (-5) + (+9) + (-16)$

στ) $(-11) + (+7) + (-29) + (+13)$

ζ) $(+14) + (-8) + (-10) + (+7)$

1.16 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $7 - (+3) - (-2) + (-6)$

β) $-5 - (-4) + (-8) - (+1)$

γ) $11 + (-6) + (+9) - (+20)$

δ) $-4 - (+5) - (-12) + (-14)$

1.17 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων, αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις.

α) $-(-2 + 5) + (-7 + 4)$

β) $9 - (3 - 5 - 8)$

γ) $-(6 - 10) - (12 - 8 - 9)$

δ) $-(-4 + 1) + (-13 - 15 + 5)$

ε) $(12 - 26) - (-5 - 7 + 16)$

στ) $-(1 - 0,8 - 0,9) - (0,4 - 0,7 - 1,1)$

1.18 Να υπολογίσετε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

α) $-(-3 + 5) - [-7 + (6 - 3)]$

β) $-(-2 - 4) - [4 - (3 - 8)]$

γ) $-(-2 + 5 - 8) - [3 - (2 - 7 + 6)]$

δ) $(-7 + 4) - [-(-9 + 2) - (4 - 3)]$

ε) $-\left(-\frac{1}{2} + 3\right) - \left[2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right]$

στ) $-\frac{1}{2} - \left[2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right] - \left(1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\right)$

1.19 Να συμπληρώσετε τα κενά, βάζοντας τα σύμβολα $<$, $>$ ή $=$, σε καθεμία από τις επόμενες παραστάσεις:

α) $-8 + (-2) \dots - 5 - 6$

β) $-7 + (-4) \dots - 5 - 5$

γ) $-11 - 11 \dots 0 - 20$

δ) $-15 - 15 \dots 0 - 30$

ε) $5 - (-1) \dots 5 - 1$

στ) $-6 - 6 \dots - 12 - 0$

Πολλαπλασιασμός - Διάρθρωση

1.20 Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $(+4) \cdot (+6)$

β) $(+3) \cdot (-5)$

γ) $(-2) \cdot (-7)$

δ) $9 \cdot (-8)$

ε) $-7 \cdot (+6)$

στ) $-5 \cdot (-4)$

1.21 Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις:

α) $(+8) : (-2)$

β) $(-12) : (+3)$

γ) $(-15) : (-3)$

δ) $-24 : (+4)$

ε) $40 : (-5)$

στ) $(-63) : 9$

ζ) $-120 : 10$

η) $-72 : (-8)$

1.22 Να κάνετε τις επόμενες πράξεις:

α) $4 \cdot (-7) - 3 \cdot (-9)$

β) $-4 \cdot (-10) + 8 \cdot (-6)$

γ) $(-7) \cdot (-9) + 11 \cdot (-3)$

δ) $3 \cdot (-8) + 4 \cdot (-9)$

ε) $24 - 7 \cdot (-5) + 9 \cdot (-11)$

στ) $-(-8) \cdot (-9) + 4 \cdot (-2) - 5 \cdot (-20)$

1.23 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $-11 \cdot (-13) + 8 \cdot (-13)$

β) $21 \cdot (-17) - 19 \cdot (-17)$

γ) $-37 \cdot 12 - 63 \cdot 12$

δ) $-24 \cdot 19 + (-24) \cdot (-18)$

ε) $-21 \cdot (-27) - (-21) \cdot (-24)$

στ) $\frac{3}{4} \cdot (-7) + \frac{3}{4} \cdot (+5)$

ζ) $\left(-\frac{7}{10}\right) \cdot (-2) + \left(-\frac{7}{10}\right) \cdot (-3)$

1.24 Να υπολογίσετε τα επόμενα γινόμενα:

α) $(-1) \cdot (-1) \cdot (+3)$

β) $(-1) \cdot (-2) \cdot (+6)$

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- γ) $(-5) \cdot (-2) \cdot (+3) \cdot (-4)$
 δ) $(+2) \cdot 0 \cdot (-10) \cdot (+5)$
 ε) $(-5) \cdot (+4) \cdot (-8) \cdot (+10)$
 στ) $(-10) \cdot (-25) \cdot (+4) \cdot (-1) \cdot (-6)$

1.25 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

- α) $(-3 + 2) \cdot (5 - 7) \cdot (-3 + 9)$
 β) $(1 - 3) \cdot (-1 - 2) \cdot (-9 + 5)$
 γ) $(-2 + 7) \cdot (5 - 7) \cdot (-6 + 3) \cdot (-2 - 2)$
 δ) $(-3 - 2) \cdot (6 - 10) \cdot (-2 - 6) \cdot (-7 - 3)$
 ε) $(-5 - 18) \cdot (3 - 21) \cdot (-9 + 34) \cdot (-7 + 7)$

1.26 Να κάνετε τις επόμενες πράξεις:

- α) $\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\right) : \frac{14}{25}$ β) $\left(\frac{5}{8} - \frac{7}{8}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right)$
 γ) $\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) : \frac{5}{12}$ δ) $\frac{3}{8} : \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)$
 ε) $\frac{8}{15} : \left(-\frac{7}{10} + \frac{1}{30}\right)$ στ) $\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{6}\right)$

1.27 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

- α) $\frac{-3}{8} + \frac{-5}{-6}$ β) $\frac{-7}{-10} - \frac{3}{-5}$
 γ) $-\frac{1}{-6} + \frac{-5}{9}$ δ) $-\frac{-3}{-4} - \frac{-7}{6}$
 ε) $\frac{-18}{6} + \frac{48}{-8} - \frac{-63}{7} + \frac{-72}{-9} - \frac{-28}{-4}$

Απόλυτη τιμή

1.28 Να συμπληρώσετε τα κενά που υπάρχουν μεταξύ των αριθμών με ένα από τα σύμβολα $<$, $>$ ή $=$, ώστε να προκύψει αληθής σχέση:

- α) $-|-2| \dots 2$ β) $-|-6| \dots -6$
 γ) $-|5| \dots -|-5|$ δ) $-|-4| \dots -|-2|$
 ε) $|-10| \dots -|10|$ στ) $-|-12| \dots -|+12|$

1.29 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- α) $[(|-6| + |+12|) : |-3| + |-4|] : |5|$
 β) $|-15| - [2^3 - (|-8| - |-2|) : |-2|]$
 γ) $|-7| \cdot [|+5| \cdot (|7| - |-3|) - (|-1| + |3|)^2]$
 δ) $\left(|-10| \cdot |-8| - \frac{|8| \cdot |-5|}{|-10|} \right) : (|-9| - |-5|)$

1.30 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

- α) $|3 - 8| - |-4 - 9|$
 β) $-|-2 + 6| - |-11 + 3|$
 γ) $|5 - 6 - 2| - |-16 + 3 + 4|$
 δ) $-|3 - 7 + 1| - (2 - |-3| - |-6|)$
 ε) $-|-30 - (10 - 20)| - |5 - (10 - 15)|$
 στ) $|-6 - [9 - (-3 + 8)]| - |-20 - [-14 - (2 - 6)]|$

1.31 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- α) $\left| \frac{1}{2} \right| - \left| -\frac{1}{4} \right| + 3 \cdot \left(\left| -\frac{5}{4} \right| - \left| -\frac{1}{2} \right| \right)$
 β) $\left[\left(\left| \frac{5}{6} \right| - \left| -\frac{1}{4} \right| \right) : \left| -\frac{14}{3} \right| + \left| +\frac{1}{12} \right| \right] : \left| -\frac{5}{6} \right|$

Σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις

1.32 Να βρείτε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

- α) $4 \cdot (3 + 2 \cdot 4) - 3 \cdot (2 \cdot 5 - 6)$
 β) $(-4) \cdot (-8) - 5 \cdot (2^3 - 2^2) - 3 \cdot (2 - 8)$
 γ) $(2 \cdot 3^2 - 42 : 7) : (10 - 4^2)$
 δ) $(6 \cdot 2 + 15 - 12 : 4) : (24 : 2 - 8 : 4 - 6 \cdot 3)$
 ε) $10^2 : (2 \cdot 5^2 - 5 \cdot 4 - 2^5 : 4 - 3 \cdot 9)$

1.33 Να βρείτε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

- α) $-3 \cdot [8 + 4 \cdot (-2 - 5)]$
 β) $[18 + 3 \cdot (-14) - 4 \cdot (2 - 7)] \cdot (-9)$
 γ) $(-1 - 3) \cdot [(-7) \cdot (-9) + 8 \cdot (3 - 9)]$
 δ) $10 \cdot (-8) - [7 \cdot (14 - 23) - 3 \cdot (5 - 10 + 4)]$
 ε) $5 \cdot (9 - 21) - 3 \cdot [4 \cdot (25 - 31) - 2 \cdot (9 - 11)]$

1.34 Να βρείτε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

- α) $(6 - 2) : (-2) + 12 : (-4)$
 β) $(-6) \cdot (-2) + (17 - 25) : (-4)$
 γ) $(3 - 9) : 3 - (7 - 11) : (-2)$
 δ) $[24 : (-2) - 8 : (-4) - (-6) \cdot (-3)] : (-7)$
 ε) $10 : [36 : (-4) - 24 : 2 + (-2) \cdot (-8)]$

1.35 Να βρείτε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

- α) $(5 \cdot 2 - 8) \cdot [30 - (6 \cdot 7 - 28)]$
 β) $[4 \cdot 7 - 3 \cdot (-6) + 2 \cdot (-8)] : [3^3 - (9 + 3 \cdot 4)]$
 γ) $[23 - (-2)^3 + (-3)^2] : (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 - 7)$
 δ) $[5 \cdot (-2) + 3 \cdot (-7) + 6 \cdot (-4)] : (-5 - 6)$
 ε) $-3^2 - [-6 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-5)]$

1.36 Να βρείτε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

- α) $\frac{-4 \cdot (-8) + 6 \cdot (-7) - 11 \cdot 0}{-9 \cdot 5 - 7 \cdot (-8) + 3 \cdot (-7)}$
 β) $\frac{5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - (-2)^3 - 5 \cdot 3^2}{-3 \cdot (2 - 5) + 8 : 2^2}$
 γ) $\frac{(8 + 7) \cdot 3 + 4 \cdot (9 - 13) - 3 \cdot (7 - 2)}{(2 - 6) : 2 - 5}$
 δ) $\frac{2^3 \cdot 3^2 + 6 \cdot [-7 + 2 \cdot (13 - 5 \cdot 3)]}{[4 \cdot (3 - 2^3) - 2 \cdot (-1 - 4)] : 5}$

1.37 Να βρείτε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

- α) $\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{-3} + \frac{-4}{6}\right) : \frac{-4 - 7}{(-3) \cdot (-7) + 6 \cdot (-2)}$
 β) $\frac{(-2) \cdot 6 \cdot (-4)}{-10 - 2} : \left(-\frac{5}{-6} + \frac{-3}{4}\right)$
 γ) $\frac{-2 + (-3) \cdot (-2)}{-2 - 4 \cdot (-1)} : \left(\frac{-7}{(-5) \cdot (-2)} - \frac{8}{3 \cdot (-5)}\right)$
 δ) $\frac{(-2) \cdot (-3) - 12 : (-1)}{-4 - 2} : \frac{(-4) \cdot 5 + 20 : (-2)}{7 - 17}$

1.38 Να βρείτε τις τιμές των επόμενων αριθμητικών παραστάσεων:

- α) $-\left(-\frac{1}{4} + 3\right) - \left[2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]$
 β) $\frac{1}{2} - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}\right) - 2\right] - \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}\right)$
 γ) $\left(1 + \frac{10}{21} : \frac{2}{7} - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{4}\right)$
 δ) $\left(-1 - \frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15}\right)$

1.39 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- α) $\frac{\frac{2}{3} - \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}}{1 + \frac{1}{2}}$ β) $\frac{5 \cdot \frac{3}{4} - 3}{2 \cdot \frac{3}{4} + 1} \cdot \frac{2 - \frac{14}{15} : \frac{7}{5}}{2}$
 γ) $\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} : 2}{\frac{3}{4} - 1 : \frac{4}{5}} : \frac{\frac{2}{3} : \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{4 : (3^{-1} - 2^{-1})}$

1.40 Να γράψετε ως ανάγωγα κλάσματα τις τιμές των παραστάσεων:

- α) $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2} : (-2)}{4 : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)}$
 β) $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{2}{3} : \left(-\frac{5}{3}\right)} : \frac{\frac{1}{4} : 2 - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} + \left[1 : \left(-\frac{4}{5}\right)\right]}$

1.41 Να βρείτε τον αντίθετο και τον αντίστροφο του αριθμού:

$$x = (-1)^{15} + \left[\frac{3}{2} - 1 - \left(2 - \frac{5}{3}\right) : \frac{1}{5}\right] \cdot \left(-2 + \frac{1}{2}\right)$$

1.42 Δίνεται η παράσταση:

$$A = -2^3 - |-5| + 3^2 - 2 \cdot (|-3| - |-1|)$$

Να υπολογίσετε τις τιμές:

- α) A β) -A γ) -(-A)
 δ) |A| ε) |-A| στ) -|A|

2

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό*

Από το σχολικό βιβλίο της Α' Γυμνασίου

Βασική θεωρία και εφαρμογές

2.1 Ορισμός της δύναμης ρητού αριθμού με εκθέτη φυσικό

- Έστω n ένας φυσικός αριθμός με $n > 1$. Το γινόμενο n παραγόντων ίσων με τον ρητό αριθμό a ονομάζεται **δύναμη με βάση a και εκθέτη n** και συμβολίζεται a^n . Δηλαδή:

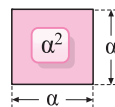
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

Η δύναμη a^n διαβάζεται «**νιοστή δύναμη του a** » ή « **a στη νιοστή**».

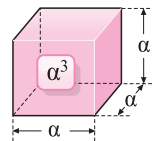
- Όταν $n = 1$, τότε:

$$a^1 = a$$

- Η δύναμη a^2 , εκτός από « **a στη δεύτερη**», λέγεται και «**τετράγωνο του a** » ή « **a στο τετράγωνο**».



- Η δύναμη a^3 , εκτός από « **a στην τρίτη**», λέγεται και «**κύβος του a** » ή « **a στον κύβο**».



Εφαρμογή

Να υπολογίσετε:

α) το τετράγωνο του 7,

β) τον κύβο του 4,

γ) τις δυνάμεις 23^1 , 3^4 , 0^8 , 1^{20} .

* Η ενότητα 2 του βιβλίου αυτού αντιστοιχεί στην παράγραφο 7.8, σελίδα 137 του **σχολικού βιβλίου της Α' Γυμνασίου**. Στο τέλος της ενότητας, στη σελίδα 37, θα βρείτε τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου.

Λύση

α) Το τετράγωνο του 7 είναι $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$.

β) Ο κύβος του 4 είναι $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

γ) Έχουμε:

- $23^1 = 23$
- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
- $0^8 = 0$
- $1^{20} = 1$

Αν v είναι φυσικός αριθμός, με $v \geq 1$, τότε:

$$0^v = 0 \quad \text{και} \quad 1^v = 1$$

2.2 Πρόσημο δύναμης

- Μια δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι πάντα θετικός αριθμός. Δηλαδή:

$$\text{αν } a > 0, \text{ τότε } a^v > 0$$

- Μια δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή:

$$\text{αν } a < 0 \text{ και } v \text{ άρτιος, τότε } a^v > 0$$

- Μια δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός. Δηλαδή:

$$\text{αν } a < 0 \text{ και } v \text{ περιττός, τότε } a^v < 0$$

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $(-2)^3$

β) $(-2)^6$

γ) $(-1)^9$

δ) $(-1)^{20}$

ε) -3^4

στ) $-(-2)^5$

Λύση

α) Στη δύναμη $(-2)^3$, η βάση (-2) είναι αρνητική και ο εκθέτης (3) είναι περιττός, άρα είναι $(-2)^3 < 0$. Πράγματι έχουμε:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

β) Στη δύναμη $(-2)^6$, η βάση (-2) είναι αρνητική και ο εκθέτης (6) είναι άρτιος, άρα είναι $(-2)^6 > 0$. Πράγματι έχουμε:

$$(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +64$$

γ) Ισχύει $(-1)^9 = -1$.

δ) Ισχύει $(-1)^{20} = 1$.

ε) Στη δύναμη -3^4 , η βάση είναι το 3 και ο εκθέτης είναι το 4. Άρα έχουμε:

$$-3^4 = -(3^4) = -81$$

στ) Στη δύναμη $-(-2)^5$, η βάση είναι το -2 και ο εκθέτης είναι το 5. Άρα έχουμε:

$$-(-2)^5 = -[-(2^5)] = -(-32) = +32 = 32$$

Δεν πρέπει να συγχέουμε μεταξύ τους δυνάμεις όπως οι $(-3)^4$ και -3^4 . Ισχύουν:

- $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
- $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

2.3 Δυνάμεις με την ίδια βάση

- Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την **ίδια βάση**, αφήνουμε βάση την ίδια και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών. Δηλαδή:

$$a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}$$

- Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την **ίδια βάση**, αφήνουμε βάση την ίδια και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου. Δηλαδή:

$$a^{\mu} : a^{\nu} = a^{\mu-\nu} \quad \text{ή} \quad \frac{a^{\mu}}{a^{\nu}} = a^{\mu-\nu}$$

Εφαρμογή

α) Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $A = (-5)^3 \cdot (-5)^6$

ii) $B = 7^{13} : 7^4$

iii) $\Gamma = \frac{17^{26}}{17^{19}}$

iv) $\Delta = 6^3 \cdot 6^9 \cdot 6^8$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$E = \frac{(-2)^7 \cdot (-2)^8}{2^{10}}$$

Λύση

α) i) $A = (-5)^3 \cdot (-5)^6 = (-5)^{3+6} = (-5)^9$

ii) $B = 7^{13} : 7^4 = 7^{13-4} = 7^9$

iii) $\Gamma = \frac{17^{26}}{17^{19}} = 17^{26-19} = 17^7$

iv) $\Delta = 6^3 \cdot 6^9 \cdot 6^8 = 6^{3+9+8} = 6^{20}$

β) Η παράσταση γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} E &= \frac{(-2)^7 \cdot (-2)^8}{2^{10}} = \frac{(-2)^{7+8}}{2^{10}} = \frac{(-2)^{15}}{2^{10}} = \\ &= \frac{-2^{15}}{2^{10}} = -\frac{2^{15}}{2^{10}} = -2^{15-10} = -2^5 = -32 \end{aligned}$$

2.4 Δυνάμεις με τον ίδιο εκθέτη

- Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτόν. Δηλαδή:

$$(a \cdot b)^v = a^v \cdot b^v$$

- Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε κάθε όρο του πηλίκου στον εκθέτη αυτόν. Δηλαδή:

$$(a : b)^v = a^v : b^v \quad \text{ή} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^v = \frac{a^v}{b^v}$$

Εφαρμογή

α) Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $A = 7^3 \cdot 5^3$

ii) $B = 12^8 : 4^8$

iii) $\Gamma = \frac{16^{10}}{12^{10}}$

iv) $\Delta = 4^5 \cdot 3^5 \cdot 2^5$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $E = \frac{6^4 \cdot 5^4}{3^4}$.

Λύση

α) i) $A = 7^3 \cdot 5^3 = (7 \cdot 5)^3 = 35^3$

ii) $B = 12^8 : 4^8 = (12 : 4)^8 = 3^8$

iii) $\Gamma = \frac{16^{10}}{12^{10}} = \left(\frac{16}{12}\right)^{10} = \left(\frac{4}{3}\right)^{10}$

iv) $\Delta = 4^5 \cdot 3^5 \cdot 2^5 = (4 \cdot 3 \cdot 2)^5 = 24^5$

β) Η παράσταση γράφεται διαδοχικά:

$$E = \frac{6^4 \cdot 5^4}{3^4} = \frac{(6 \cdot 5)^4}{3^4} = \frac{30^4}{3^4} = \left(\frac{30}{3}\right)^4 = 10^4 = 10.000$$

2.5 Δύναμη με βάση δύναμη

Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών. Δηλαδή:

$$(a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu \cdot \nu}$$

Εφαρμογή

α) Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $A = (6^4)^5$ ii) $B = ((-5)^3)^7$ iii) $\Gamma = ((-11)^4)^8$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Delta = \frac{8^{10}}{2^{15} \cdot 4^6}$.

Λύση

α) i) $A = (6^4)^5 = 6^{4 \cdot 5} = 6^{20}$

ii) $B = ((-5)^3)^7 = (-5)^{3 \cdot 7} = (-5)^{21} = -5^{21}$

iii) $\Gamma = ((-11)^4)^8 = (-11)^{4 \cdot 8} = (-11)^{32} = 11^{32}$

β) Παρατηρούμε ότι $8 = 2^3$ και $4 = 2^2$, οπότε η παράσταση Δ γράφεται:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{8^{10}}{2^{15} \cdot 4^6} = \frac{(2^3)^{10}}{2^{15} \cdot (2^2)^6} = \frac{2^{30}}{2^{15} \cdot 2^{12}} = \\ &= \frac{2^{30}}{2^{27}} = 2^3 = 8\end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Όταν σε μια παράσταση εμφανίζονται δυνάμεις με διαφορετικές βάσεις και διαφορετικούς εκθέτες, τότε προσπαθούμε να γράψουμε τις δυνάμεις που έχουμε ως δυνάμεις με την ίδια βάση.

Συνοπτικά, όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων που μάθαμε είναι οι παρακάτω:

Ιδιότητες των δυνάμεων

• $a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}$

• $(a \cdot \beta)^{\nu} = a^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$

• $(a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu \cdot \nu}$

• $a^{\mu} : a^{\nu} = \frac{a^{\mu}}{a^{\nu}} = a^{\mu-\nu}$

• $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{a^{\nu}}{\beta^{\nu}}$

2.6 Προτεραιότητα των πράξεων

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2 \cdot (-3)^2 - [(-24)^6 : 12^6] : 8 + [(-6)^{11} : (-6)^9 + 9] : (-3)$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot (-3)^2 - [(-24)^6 : 12^6] : 8 + \\ &+ [(-6)^{11} : (-6)^9 + 9] : (-3) = \\ &= 2 \cdot 9 - [(-24 : 12)^6] : 8 + \\ &+ [(-6)^{11-9} + 9] : (-3) = \\ &= 18 - (-2)^6 : 8 + [(-6)^2 + 9] : (-3) = \\ &= 18 - 64 : 8 + (36 + 9) : (-3) = \\ &= 18 - 8 + 45 : (-3) = 10 - 15 = -5 \end{aligned}$$

- Σε μια παράσταση οι πράξεις γίνονται με την εξής σειρά:
 - ▶ Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
 - ▶ Κατόπιν εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
 - ▶ Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Αν στην παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις και αγκύλες, τότε πρώτα κάνουμε τις πράξεις μέσα σ' αυτές, με την παραπάνω σειρά.

Θέματα προς απάντηση

Ορισμός της δύναμης

2.7 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) 2^4 β) 3^4 γ) $(-2)^5$
δ) $(-3)^3$ ε) $(-4)^2$ στ) $(-5)^3$
ζ) $(-2)^6$ η) $(-10)^4$ θ) $(-10)^5$

2.8 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $(-2)^3$ β) -2^4 γ) -4^3
δ) $(-6)^2$ ε) -10^6 στ) $(-1)^3$
ζ) $(-1)^8$ η) -1^{10} θ) 0^{12}

2.9 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $-(-10)^3$ β) $-(-7)^2$ γ) $-(-6^2)$
δ) $-(-2^3)$ ε) $-(-1)^7$ στ) $-(-1^{10})$

2.10 Να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς, τοποθετώντας στα κενά το κατάλληλο σύμβολο (<, >, =).

α) $(-3)^{10} \dots 0$ β) $(-5)^7 \dots 0$
γ) $(-6)^8 \dots 6^8$ δ) $(-7)^9 \dots 7^9$
ε) $-5^6 \dots 5^6$ στ) $(-9)^{11} \dots -9^{11}$

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

$$\zeta) -(-3)^8 \dots 0 \quad \eta) -(-7)^{13} \dots 0$$

$$\theta) -(-3)^7 \dots 3^7 \quad \iota) -(-4)^6 \dots 4^6$$

$$\omega) (-8)^{11} \dots -8^{11} \quad \upsilon\beta) -(-9)^{20} \dots -9^{20}$$

2.11 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

$$\alpha) -1^7 + (-1)^7 \quad \beta) -1^8 + (-1)^8$$

$$\gamma) (-1)^9 + (-1)^{10} \quad \delta) -2^3 + (-2)^4$$

$$\epsilon) -2^5 + (-2)^5 \quad \sigma\tau) (-3)^2 + (-3)^3$$

Ιδιότητες δυνάμεων

2.12 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

$$\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad \beta) \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \quad \gamma) \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$\delta) \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \quad \epsilon) \left(\frac{4}{5}\right)^3 \quad \sigma\tau) \left(-\frac{3}{10}\right)^4$$

2.13 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

$$\alpha) 2^5 \cdot 2^7 \quad \beta) 7^{12} : 7^4$$

$$\gamma) 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^7 \quad \delta) \frac{11^{15}}{11^8}$$

$$\epsilon) (-3)^{21} : (-3)^{10} \quad \sigma\tau) 2^8 \cdot 3^8$$

$$\zeta) (-6)^9 \cdot (-7)^9 \quad \eta) \frac{63^{10}}{9^{10}}$$

$$\theta) (-48)^{11} : 6^{11} \quad \iota) (2^9)^5$$

$$\omega) ((-5)^6)^9 \quad \upsilon\beta) (-5^8)^7$$

2.14 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) 7^{10} : 7^8 \quad \beta) 8^5 : 8^3$$

$$\gamma) \frac{2^{25}}{2^{21}} \quad \delta) \frac{3^{10}}{3^7}$$

$$\epsilon) (-9)^{21} : (-9)^{19} \quad \sigma\tau) \frac{(-5)^{12}}{(-5)^9}$$

2.15 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) \frac{(-3)^9}{3^6} \quad \beta) \frac{(-2)^{15}}{2^{11}} \quad \gamma) \frac{5^{10}}{(-5)^8}$$

$$\delta) -\frac{6^9}{(-6)^7} \quad \epsilon) -\frac{(-8)^6}{8^4} \quad \sigma\tau) \frac{(-2)^{12}}{-2^8}$$

$$\zeta) -\frac{(-3)^7}{-3^4} \quad \eta) -\frac{-7^7}{(-7)^5}$$

2.16 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) 2,5^4 \cdot 4^4 \quad \beta) 28^3 : 7^3$$

$$\gamma) 45^4 : 15^4 \quad \delta) (-36)^5 : 18^5$$

$$\epsilon) \frac{55^3}{11^3} \quad \sigma\tau) \frac{(-72)^2}{9^2}$$

$$\zeta) \frac{(-34)^3}{17^3} \quad \eta) \frac{(-52)^4}{(-13)^4}$$

$$\theta) \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 \quad \iota) \left(\frac{2}{15}\right)^4 : \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

2.17 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) \frac{2^5 \cdot 2^{10}}{2^{11}} \quad \beta) \frac{3^{15}}{3^4 \cdot 3^8}$$

$$\gamma) \frac{7^8 \cdot 7^5}{7^2 \cdot 7^9} \quad \delta) \frac{(-4)^7 \cdot (-4)^9}{(-4)^{10} \cdot (-4)^3}$$

$$\epsilon) \frac{(-2)^{11} \cdot (-2)^{10}}{(-2)^{12} \cdot (-2)^3} \quad \sigma\tau) (5^8 \cdot 5^{11}) : (5^{21} : 5^4)$$

2.18 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) \frac{5^4 \cdot 6^4}{3^4} \quad \beta) \frac{7^5 \cdot 4^5}{14^5}$$

$$\gamma) \frac{9^3 \cdot 8^3}{3^3 \cdot 4^3} \quad \delta) \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 \cdot 5^4$$

$$\epsilon) \left(-\frac{3}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^5 \cdot 3^5$$

$$\sigma\tau) \frac{(-24)^3}{6^3} - \frac{15^4}{(-5)^4} - \frac{44^5}{(-22)^5}$$

2.19 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) \frac{(2^4)^5}{2^6 \cdot 2^7} \quad \beta) \frac{(3^7)^5}{(3^8)^4}$$

$$\gamma) \frac{(5^3)^8 \cdot (5^2)^6}{(5^{11})^3}$$

$$\delta) \frac{(7^5)^9 \cdot (7^4)^7}{(7^6)^6 \cdot (7^7)^5}$$

$$\alpha) \frac{(-4)^5 \cdot 4^7}{(-4)^6 \cdot 4^3}$$

$$\beta) \frac{(-5)^9 \cdot (-5)^{11}}{5^6 \cdot (-5)^{12}}$$

$$\epsilon) (3^8)^4 : [(3^5)^3 \cdot (3^2)^7]$$

$$\gamma) \frac{(-2)^{12} \cdot 2^5}{2^3 \cdot (-2)^{11}}$$

$$\delta) \frac{(-2^4)^3 \cdot (-2^3)^4}{(-2)^{15} \cdot 2^6}$$

2.20 Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

Αριθμητικές παραστάσεις

2.21 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) 4 \cdot (-3)^2 + (-2)^3 + (-1)^9$$

$$\beta) 3 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2$$

$$\gamma) -(-5)^2 + (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^5$$

$$\delta) (-2)^2 - 2^4 - (-3)^2 - (-3)^3$$

$$\epsilon) 2 \cdot (-3)^3 - (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-3)^2$$

$$\sigma\tau) 3 \cdot (-2)^4 + 59 \cdot (-1)^9 + 4 \cdot (-3)^2 - (-5)^2$$

2.22 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) [(14 - 4^2)^4 + 3^2] : 5 - (7 - 5 \cdot 2)^2 + (-1)^9$$

$$\beta) [3 \cdot (-2)^3 - (-2)^5 : 4 + (-4)^2 : (-2)] : 2^3$$

$$\gamma) [(-4)^3 : (-2)^5 + 3^3 : (-3) + (-2)^3] : \frac{(5^3)^7}{(5^4)^5}$$

$$\delta) [(-1)^{10} + (-1)^{11}] \cdot (2^4 - 3^2) + \frac{(-5^3)^4}{5^{10}} - 20$$

2.23 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) [(2^{10} \cdot 2^6)^2 - 3^{12} : (3^9 \cdot 3) - 5 \cdot (2^3 + 3^2)] : \frac{(3^4)^3}{3^5 \cdot 3^3}$$

$$\beta) [19 \cdot (2^2 - 2^3) + (-2)^3 \cdot (20 - 3^3)] : (5 \cdot 6 - 5^2)$$

$$\gamma) \frac{8^9}{8 \cdot 8^6} : \left[(-2)^5 : \frac{1}{2} \right]$$

$$\delta) [(-2) \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-23)] : \left[\frac{(2^2)^3}{(-2)^2} : \frac{(-2)^3}{(-4)^2} \right]$$

2.24 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^3 : \left(-\frac{1}{9} \right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right]^2 \cdot \frac{3^4 \cdot 3^5}{(3^3)^2}$$

$$\beta) \left[\frac{18^5}{(-3)^5 \cdot 6^5} : \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right] : \frac{(-2)^2 + \frac{5}{-2^2} + \left(\frac{3}{2} \right)^2}{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 - (-1)^9}$$

$$\gamma) \left\{ 2^3 + 3 \cdot (-1)^8 + \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right] \cdot 2^3 \right\} : (-1 - 2^2)$$

$$\delta) \frac{(-2)^3 + (-2)^2 + (-1)^{12}}{\left(\frac{-1}{-2} \right)^2 + \left(\frac{-1}{2} \right)^3 + \frac{1}{(-2)^4}} \cdot \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]$$

Επίλυση εξισώσεων

2.25 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) 2^7 \cdot x = 2^{12}$$

$$\beta) 3^9 : x = 3^6$$

$$\gamma) x : 2^4 = 5^4$$

$$\delta) (-4)^7 \cdot x = (-4)^{10}$$

$$\epsilon) (-6)^9 \cdot x = (-6)^{11}$$

$$\sigma\tau) (-5)^{11} \cdot x = 5^{13}$$

$$\zeta) (-3)^{17} : x = 3^{13}$$

$$\eta) -(-2)^{20} : x = -2^{14}$$

2.26 Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

$$\alpha) 3^6 \cdot x = 3^4 \cdot 3^5$$

$$\beta) 2^9 \cdot 2^{16} \cdot x = 2^{14} \cdot 2^{17}$$

$$\gamma) 2^7 \cdot x = 2^3 \cdot (-2)^4$$

$$\delta) 4^{12} \cdot 4^{15} \cdot x = (4^3)^6 \cdot (4^4)^3$$

2.27 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) x : 5^{10} = \frac{1}{5^6 \cdot 5^2}$$

$$\beta) x : [(3^2)^3 \cdot (3^3)^4] = \frac{1}{3^{15}}$$

$$\gamma) (2^7 \cdot 2^3) : x = 2^6$$

$$\delta) [(2^7)^6 \cdot (2^9)^8] : x = (2^8)^7 \cdot (2^{13})^4$$

Παραστάσεις με γράμματα

2.28 Δίνονται οι αριθμοί:

$$x = \left(-\frac{3}{5}\right)^{17} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^{17} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{17} \quad \text{και}$$

$$y = \frac{(-9)^5}{9^4} + \frac{5^7}{(-5)^6}$$

Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

α) $(x+y)^3$ **β)** $(y-x)^4$ **γ)** $(x-1)^6 + y^3$

δ) $(x-y)^2 - (x^2 - 2xy + y^2)$

2.29 Δίνονται οι αριθμοί:

$$x = \frac{(-24)^6}{12^6} : \left[\left(\frac{2^{20}}{2^{18}} : \frac{1}{2} \right) \cdot (-2)^3 \right] \quad \text{και}$$

$$y = \frac{(-3)^2}{-2} : \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 - \frac{2^{12}}{(2^5)^2} + \frac{2^5 \cdot 2^9}{2^{15} : 2^3} \right]$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = [(x+y)^3 : (x^3 + y^3)]^4$$

2.30 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{(x^2)^5 \cdot (x^3)^2}{x^{17} : (x^3 \cdot x)}$$

α) Να γράψετε την παράσταση A ως μία δύναμη με βάση το x.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για:

$$x = \frac{(-12)^3}{6^3} : \left[(-2)^2 - (-3)^3 + \frac{2^{12}}{(-2)^7} + (-1)^{11} \right]^2$$

2.31 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \left[\left(\frac{1}{x^2} \right)^4 \cdot (x^5)^2 \right]^5 : (x^4)^2$$

α) Να γράψετε την παράσταση A ως μία δύναμη με βάση το x.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για:

$$x = \left(\frac{54^2}{81} - \frac{12^3}{27} \right) : \left[-(-2)^3 + (-1)^{10} - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \cdot 2^3 \right]$$

Για δυνατούς λύτες

2.32 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \frac{3^8 \cdot 27^3}{9^8}$ **β)** $B = \frac{4^{48}}{8^{24}} \cdot (-0,5)^{20}$

2.33 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\frac{4^{15} \cdot 9^{14}}{6^{27}}$ **β)** $\frac{12^{13}}{2^{24} \cdot 3^{12}}$

γ) $\frac{8^9 \cdot 6^5}{2^{29} \cdot 3^4}$ **δ)** $\frac{12^{10}}{18^5 \cdot 8^3}$

2.34 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5 \cdot 2^{27} + 3 \cdot 2^{27}}{2^{25} + 2^{25}}$$

2.35 Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $10^{10^{10}}$;

2.36 Αν $x \cdot y \cdot \omega = -2$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \frac{4 \cdot x^7 \cdot y^{11} \cdot \omega^{23}}{(x \cdot y^2 \cdot \omega^5)^4}$ **β)** $B = \frac{[(-2x^2 \cdot y \cdot \omega^3)^2]^3}{(4x^2 \cdot \omega^4)^3}$

2.37 Αν $x \cdot y = -2$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = \frac{(x^5)^5 \cdot (y^4)^8}{(x^{10})^2 \cdot (y^3)^9}$ **β)** $B = \frac{(x^{v+2})^3 \cdot y^{v+5}}{x^v \cdot (x^{v+1})^2 \cdot y^{v+1}}$

2.38 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left[\left(\frac{y}{x} \right)^3 \cdot (x^5 \cdot y^4)^2 \right] : \left(\frac{x}{x^3} \right)^2$$

για $x = 2.015$ και $y = -\frac{1}{2.015}$.

2.39 Αν ισχύει ότι $x \cdot y^2 = -3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left[\left(\frac{x^2}{y^4} \right)^3 \cdot (y^3)^5 \right]^2 : \left(\frac{x^4}{y} \right)^2$$

2.40 Αν v είναι φυσικός αριθμός, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2^{2v+1} - 4^{v+2}}{2^{2v+3} - 4^v}$$

Ερωτήσεις τύπου πολλαπλής επιλογής

2.41 Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- α) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι θετικός;
A: $-(-7)^2$ **B:** $(-7)^3$ **Γ:** $-(-7^2)$ **Δ:** $: -| -7|^3$
- β) Το γινόμενο $a^{16} \cdot a^{11}$ ισούται με τον κύβο του:
A: a^{27} **B:** a^9 **Γ:** a^6 **Δ:** a^3
- γ) Ο αριθμός $-(-6^2)$ ισούται με:
A: 36 **B:** 12 **Γ:** -36 **Δ:** -12
- δ) Η δύναμη 3^{3^3} ισούται με:
A: 3^{3^3} **B:** 3^{27} **Γ:** 3^9 **Δ:** 3^6
- ε) Το άθροισμα $(-1)^k + (-1)^{k+1}$, όπου $k > 1$ φυσικός αριθμός, ισούται με:
A: 0 **B:** -1 **Γ:** 2 **Δ:** -2

Ελέγχω τις γνώσεις μου στη θεωρία

- 2.42** α) Τι ονομάζουμε δύναμη με βάση τον ρητό αριθμό a και εκθέτη τον φυσικό αριθμό $v > 1$;
 β) Με τι ισούται η δύναμη a^1 ;
 γ) Πώς διαβάζεται η δύναμη a^v ;
 δ) Πώς αλλιώς διαβάζεται η δεύτερη δύναμη του a (a^2) και πώς η τρίτη δύναμη του a (a^3);
 ε) Ποιο είναι το πρόσημο μιας δύναμης με βάση θετικό αριθμό;
 στ) Πώς βρίσκουμε το πρόσημο μιας δύναμης με βάση αρνητικό αριθμό;
 ζ) Πώς πολλαπλασιάζουμε δυνάμεις με την ίδια βάση; Να γράψετε την ισότητα που εκφράζει αυτή την ιδιότητα.
 η) Πώς διαιρούμε δυνάμεις με την ίδια βάση; Να γράψετε την ισότητα που εκφράζει αυτή την ιδιότητα.
 θ) Πώς υψώνουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη; Να γράψετε την ισότητα που εκφράζει αυτή την ιδιότητα.
 ι) Πώς υψώνουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη; Να γράψετε την ισότητα που εκφράζει αυτή την ιδιότητα.
 ια) Πώς υψώνουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη; Να γράψετε την ισότητα που εκφράζει αυτή την ιδιότητα.

Κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1ο

Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $(-2)^3$ β) $(-2)^4$ γ) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ δ) $(-1)^7$ ε) -10^4

Θέμα 2ο

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\frac{5^9}{5^7}$ β) $\frac{21^3}{7^3}$ γ) $(2^5)^8 : (2^9)^4$
δ) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^5$ ε) $\frac{(-3)^7}{3^5}$

Θέμα 3ο

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $2^3 \cdot (-3)^2 - 10 \cdot [(-3)^3 + (7 - 3 \cdot 2^2) \cdot (-2)^3]$
β) $[1 + (-2)^3] \cdot [(-3)^2 - (-2)^3] - 3 \cdot [(-2)^3 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)^2]$

Θέμα 4ο

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{(3^5)^2 \cdot 3^6}{(-3^3)^3}, \quad B = \frac{(-2)^5 \cdot (-2)^8 \cdot (-2)^7}{(2^3)^5 : (-2^2)}, \quad \Gamma = \frac{(-9)^4}{-3^3} \quad \text{και} \quad \Delta = \frac{(-25)^3}{-5^2}$$

α) Να γράψετε καθεμία από τις παραστάσεις αυτές με τη μορφή μίας δύναμης.

β) Να κάνετε τις πράξεις:

i) $A : \Gamma + \frac{B}{(-2)^4} + \frac{\Delta}{-5^2}$

ii) $\frac{A \cdot \Gamma}{(3^2)^5} + \frac{B}{(-2)^3} \cdot \Delta$

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\Gamma \cdot x = A$

ii) $x : \Delta = B$

Ασκήσεις και προβλήματα του σχολικού βιβλίου της Α' Γυμνασίου (σελ. 139)

- 1.** Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:
- α) Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι αριθμός.
 β) Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη είναι θετικός αριθμός.
 γ) Δύναμη με βάση αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.
 δ) Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το των εκθετών.
 ε) Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη
 στ) Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε του γινομένου στον εκθέτη αυτό.
 ζ) Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.
 η) Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο των εκθετών.

Λύση

- α) θετικός. β) άρτιο. γ) αρνητικό. δ) άθροισμα.
 ε) τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.
 στ) κάθε παράγοντα. ζ) καθέναν από τους όρους. η) γινόμενο.

- 2.** Βρες με ποιο στοιχείο της 2ης και της 3ης γραμμής αντίστοιχα είναι ίσο κάθε στοιχείο της 1ης γραμμής του παρακάτω πίνακα.

$3 + 5^2$	$(3 + 5)^2$	$3 \cdot 5^2$	$(3 \cdot 5)^2$	$3 - 5^2$	$(3 - 5)^2$	$\frac{3^2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$
Διαφορά των 3 και 5^2	Άθροισμα των 3 και 5^2	Γινόμενο των 3 και 5^2	Πηλίκο των 3^2 και 5	Τετράγωνο της διαφοράς 3 πλην 5	Τετράγωνο του πηλίκου 3 δια 5	Τετράγωνο του αθροίσματος 3 και 5	Τετράγωνο του γινομένου 3 επί 5
75	4	28	64	0,36	225	1,8	-22

Λύση

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής:

- $3 + 5^2 = 3 + 5 \cdot 5 = 3 + 25 = 28$
- $(3 + 5)^2 = 8^2 = 8 \cdot 8 = 64$
- $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot (5 \cdot 5) = 3 \cdot 25 = 75$
- $(3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 15 \cdot 15 = 225$
- $3 - 5^2 = 3 - 5 \cdot 5 = 3 - 25 = -22$
- $(3 - 5)^2 = (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

- $\frac{3^2}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} = 0,36$

Επομένως η αντιστοίχιση γίνεται ως εξής:

$$3 + 5^2 \rightarrow \text{άθροισμα των } 3 \text{ και } 5^2 \rightarrow 28$$

$$(3 + 5)^2 \rightarrow \text{τετράγωνο του αθροίσματος } 3 \text{ και } 5 \rightarrow 64$$

$$3 \cdot 5^2 \rightarrow \text{γινόμενο των } 3 \text{ και } 5^2 \rightarrow 75$$

$$(3 \cdot 5)^2 \rightarrow \text{τετράγωνο του γινομένου } 3 \text{ επί } 5 \rightarrow 225$$

$$3 - 5^2 \rightarrow \text{διαφορά των } 3 \text{ και } 5^2 \rightarrow -22$$

$$(3 - 5)^2 \rightarrow \text{τετράγωνο της διαφοράς } 3 \text{ πλην } 5 \rightarrow 4$$

$$\frac{3^2}{5} \rightarrow \text{πηλίκιο των } 3^2 \text{ και } 5 \rightarrow 1,8$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \text{τετράγωνο του πηλίκου } 3 \text{ δια } 5 \rightarrow 0,36$$

3. Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$$

$$B = 32 \cdot 5^4 - 25 \cdot 4^5 + 87,5 \cdot 4^3, \quad \Gamma = -\frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3}$$

Λύση

- $$\begin{aligned} A &= (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = \\ &= -1 + (+1) + (-1) + (+1) + (-1) = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = \\ &= -1 - 1 - 1 + 1 + 1 = -3 + 2 = -1 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} B &= 32 \cdot 5^4 - 25 \cdot 4^5 + 87,5 \cdot 4^3 = 32 \cdot 625 - 25 \cdot 1.024 + 87,5 \cdot 64 = \\ &= 20.000 - 25.600 + 5.600 = 20.000 + 5.600 - 25.600 = 25.600 - 25.600 = 0 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \Gamma &= -\frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3} = -\frac{-6^5}{3^5} - \frac{8^4}{4^4} + \frac{10^3}{-5^3} = +\frac{6^5}{3^5} - \frac{8^4}{4^4} - \frac{10^3}{5^3} = \\ &= \left(\frac{6}{3}\right)^5 - \left(\frac{8}{4}\right)^4 - \left(\frac{10}{5}\right)^3 = 2^5 - 2^4 - 2^3 = 32 - 16 - 8 = 32 - 24 = 8 \end{aligned}$$